数理解析研究所講究録
第617巻 1987年 66-76

保型形式に associate したゼータ函数 $D(s,f,g)$ の値について
―肥田晴三氏の結果の紹介―

北大理 前田芳孝 (Yoshitaka Maeda)

自然数 $N\geqq 1$ に対して $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群を

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})\;\middle|\; c\equiv 0 \bmod N\right\},$$

$$\Gamma_1(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in \Gamma_0(N)\;\middle|\; a\equiv d\equiv 1 \bmod N\right\},$$

とおき，$\Gamma_1(N)$ に対する weight k の cusp form の空間を $S_k(\Gamma_1(N))$ とおく．また，modulo N で定義された Dirichlet character χ に対して

$$S_k(N,\chi)=\left\{f\in S_k(\Gamma_1(N))\;\middle|\; f|_k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\chi(d)f,\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)\right\}$$

とおく．但

$$\left\{f|_k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right\}(z)=f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-k},\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}).$$

$l<k$ とする．primitive form $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\exp(2\pi i nz)\in S_k(N,\chi)$ と $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b(n)\exp(2\pi i nz)\in S_l(N,\psi)$，$b(n)\in\overline{\mathbb{Q}}$，に対して

$$\mathcal{D}_N(s,f,g)=\Bigl(\sum_{\substack{n=1\\(n,N)=1}}^{\infty}\chi\psi(n)n^{k+l-2s-2}\Bigr)\cdot\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty}a(n)b(n)n^{-s}\Bigr)$$

とおくと，これは全平面上正則に解析接続され，$l \leqq m < k$ なる自然数 m について

$$\frac{\mathcal{D}_N(m,f,g)}{\pi^{2m+1-l}\langle f,f\rangle_N} \text{ は代数的数である}$$

ことが知られている（G. Shimura : The special values of zeta functions associated with cusp forms, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 783–804）．但 $\langle f,f\rangle_N = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} |f(z)|^2 y^{k-2}\,dx\,dy$，$(z=x+iy)$，$\mathfrak{H}=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z)>0\}$．本稿では，上記の値が，$m, f, g$ を変数とする p 進解析函数に interpolate されると云う肥田晴三氏の結果の一部を紹介する．関連論文は次の通り：

H. Hida : A p-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic modular forms I, II, (I: Invent. math. 79 (1985), 159–195 ; II: preprint).

—— : Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e séries 19 (1986), 231–273.

—— : Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, Invent. math. 85 (1986), 545–613.

§1. p 進 cusp forms, Hecke algebras 及び ordinary forms.

以下 $p \geqq 5$：素数，$(N,p)=1$ とし，$\overline{\mathbb{Q}}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込みを1つ固定しておく．

1° p進 cusp forms：

有限次拡大 $K_0/\mathbb{Q}$ に対して

$$S_k(\Gamma_1(Np^r);K_0)=\left\{f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\exp(2\pi inz)\in S_k(\Gamma_1(Np^r))\,\middle|\,a(n)\in K_0\right\}$$

とおく（$r\geqq 0$）．また K_0 の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ に於る topological closure を K とするとき

$$S_k(\Gamma_1(Np^r);K)=S_k(\Gamma_1(Np^r);K_0)\otimes_{K_0}K$$

とおく．これは K のみで定まり，K_0 の取り方に依らない．更に，$q=\exp(2\pi iz)$ とおくとき，$S_k(\Gamma_1(Np^r);K_0)$ の元は ∞ に於る Fourier 展開により $K_0[[q]]$ の元と見なすことができ，従って $S_k(\Gamma_1(Np^r);K)$ も亦 $K[[q]]$ に埋めこまれる．K の p 進整数環 $\mathcal{O}_K$ に対して

$$S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)=S_k(\Gamma_1(Np^r);K)\cap\mathcal{O}_K[[q]]$$

とおく．自然数 $j\,(>0)$ に対して

$$S^j(\Gamma_1(Np^r);K)=\bigoplus_{k=1}^{j}S_k(\Gamma_1(Np^r);K)\subset K[[q]],$$

$$S^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)=S^j(\Gamma_1(Np^r);K)\cap\mathcal{O}_K[[q]],$$

とし，

$$S(Np^r;K)=\varinjlim_{j}S^j(\Gamma_1(Np^r);K)\subset K[[q]],$$

$$S(Np^r;\mathcal{O}_K)=S(Np^r;K)\cap\mathcal{O}_K[[q]]$$

とおく．更に $\overline{\mathbb{Q}}_p$ に於る normalized p-adic norm $|\ |_p$ (i.e. $|p|_p=\frac{1}{p}$) を使って $\left|\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n\right|_p=\sup_n|a(n)|_p$ とするとき，$S(Np^r;K)$ の

各元は有限な値をもつ．この norm に関する $S(Np^r;K)$ の完備化を $\bar{S}(Np^r;K)$ とし，

$$\bar{S}(Np^r;\mathcal{O}_K)=\bar{S}(Np^r;K)\cap\mathcal{O}_K[[q]]$$

とおく．このとき

(1) $$\bar{S}(Np^r;\mathcal{O}_K)=\bar{S}(N;\mathcal{O}_K)$$

となる．$\bar{S}(N;\mathcal{O}_K)$ の元を p 進 cusp form と云う．次に，自然な埋め込みにより，$S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)\subset S_k(\Gamma_1(Np^{r+1});\mathcal{O}_K)$ であるから

$$S_k(Np^\infty;\mathcal{O}_K)=\varinjlim_r S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)\subset\mathcal{O}_K[[q]]$$

が定義される．$S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)\subset S^k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)\subset\bar{S}(Np^r;\mathcal{O}_K)=\bar{S}(N;\mathcal{O}_K)$ であるから

(2) $$S_k(Np^\infty;\mathcal{O}_K)\subset\bar{S}(N;\mathcal{O}_K)$$

である．

2° Hecke algebras：

$S_k(\Gamma_1(Np^r))$ 上には Hecke 作用素 $T(n)$ が定義されているが，自然に $S_k(\Gamma_1(Np^r):K)$ 上に拡張される．また対角的に作用させることにより $S^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)$ 上へ，従って $S(Np^r;K)$ 及び $\bar{S}(N;K)$ 上へ拡張される．このとき，$S_k(\Gamma_1(Np^r):\mathcal{O}_K)$，$S^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)$，$\bar{S}(N:\mathcal{O}_K)$ はいずれも stable となるので，$T(n)$ $(n=1,2,\cdots)$ によって $\mathcal{O}_K$ 上生成される $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(S_k(\Gamma_1(Np^r):\mathcal{O}_K))$ (resp. $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(S^j(\Gamma_1(Np^r):\mathcal{O}_K))$) の subalgebra を $h_k(\Gamma_1(Np^r);$

$\mathcal{O}_K)$ (resp. $h^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)$) とおく. $i<j$ のとき, 制限写像により

$$h^j(\Gamma_1(Np);\mathcal{O}_K) \longrightarrow h^i(\Gamma_1(Np);\mathcal{O}_K);\ \text{surjection}$$
$$T(n) \longmapsto T(n)$$

が定義される。よって

$$h(N;\mathcal{O}_K) = \varprojlim_j h^j(\Gamma_1(Np);\mathcal{O}_K)$$

とおくと, これは $\bar{S}(Np;\mathcal{O}_K)$ 上に作用している.

また, $(l, Np)=1$ となる素数 l に対して,

$$f|l = l\{f|T(l)^2 - f|T(l^2)\}$$

と定めると, $S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)$, $\bar{S}(Np;\mathcal{O}_K)$ 上に $\varprojlim_r \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^\times]$ の作用が定義され, 更に endomorphism として

$$\varprojlim_r \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^\times] \subset h_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K),\ h(N;\mathcal{O}_K)$$

となる. $\Lambda_K = \mathcal{O}_K[[(1+p\mathbb{Z}_p)]]$ とおくと, $\varprojlim_r \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np^r\mathbb{Z})^\times] \cong \Lambda_K \times \mathcal{O}_K[(\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^\times]$ であるから, 特に,

(3) $\qquad h(N;\mathcal{O}_K)$ は Λ_K-algebra である.

3° ordinary forms:

$$S_k(\Gamma_1(Np^r)) \ni f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\exp(2\pi i n z)\ (\neq 0)\ \text{が}$$
$$f|T(n) = a(n)f \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

となるとき, f を normalized eigenform と云う. 特に $a(1)=1$ である. 更に

$$r \geqq 1 \text{ 且 } |a(p)|_p = 1$$

となるとき，f を ordinary form (for p) と云う．$k \geqq 2$ のとき ordinary form f は次の様にして得られる．まず，$f_0 \in S_k(Np^r, \chi)$: primitive form で conductor Np^r とする．更に $f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \exp(2\pi i n z)$ とおくとき，$|b(p)|_p = 1$ と仮定する．このとき

(i) $r \geqq 1$ のとき $f = f_0$;

(ii) $r = 0$ のとき $f = f_0(z) - \beta f_0(pz)$ $(\in S_k(\Gamma_1(Np)))$;

(但 β は $X^2 - b(p)X + \chi(p)p^{k-1} = 0$ の根で $|\beta|_p < 1$ となるもの.)

とおくと f は ordinary form となる．次に充分大きい m によって

$$e_j = \lim_{r \to \infty} T(p)^{p^r m} \in h^j(\Gamma_1(Np); \mathcal{O}_K)$$

が (m に依らずに) 一意に定義される．また，

$$e = \varprojlim_j e_j \in h(N; \mathcal{O}_K)$$

も定義され，$e^2 = e$ である．この e により $f \in S_k(\Gamma_1(Np^r))$ $(r \geqq 1)$: normalized eigenform について

$$f : \text{ordinary form} \Leftrightarrow f|e = f$$

となる．そこで

$$h^0(N; \mathcal{O}_K) = e\, h(N; \mathcal{O}_K),$$

$$\bar{S}^0(N; \mathcal{O}_K) = \bar{S}(N; \mathcal{O}_K)|e, \text{ etc.}$$

とかき，ordinary part と云う．次のことが成立する．

(4) (i) $h^0(N;\mathcal{O}_K)$ は Λ_K 上 free 且 finite rank;

(ii) $k\geqq 2$ のとき $\Lambda_K\cong\mathcal{O}_K[[X]]$ と同一視して,

(イ) $h^0(N;\mathcal{O}_K)/((1+X)^{p^{r-1}}-(1+p)^{kp^{r-1}})h^0(N;\mathcal{O}_K)$

$\cong h_k^0(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)$

(ロ) $h^0(N;\mathcal{O}_K)/(1+X-(1+p)^k\varepsilon(1+p))h^0(N;\mathcal{O}_K)$

$\cong h_k^0(\Gamma_0(p^r)\cap\Gamma_1(Np),\ \varepsilon\ ;\mathcal{O}_K)$;

ここで $\varepsilon: 1+p\mathbb{Z}_p\to\mathcal{O}_K^\times$: finite order の character で $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ $=1+p^r\mathbb{Z}_p$ となるもの. また $h_k^0(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)=h_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)|e$, $h_k^0(\Gamma_0(p^r)\cap\Gamma_1(Np),\varepsilon;\mathcal{O}_K)$ は $S_k(\Gamma_0(p^r)\cap\Gamma_1(Np),\varepsilon;\mathcal{O}_K)$ の Hecke algebra の ordinary part である.

4° duality:

$K[[q]]$ の元 f を $f=\sum_{n=0}^{\infty}a(n,f)q^n$ とかくことにする. このとき, $h^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)\times S^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)$ 上に bilinear form を次の様に定める:

(5) $(h,f)=a(1,f|h)$, $h\in h^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)$, $f\in S^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)$.

特に

(6) $(T(n),f)=a(n,f)$

である. 次の duality が成立する:

(7) $r\geqq 1$ とする.

(イ) $h^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(S^j(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K),\mathcal{O}_K)$,

$$S^{d}(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(h^{d}(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K),\mathcal{O}_K).$$

(ロ) $$h_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K),\mathcal{O}_K),$$

$$S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(h_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K),\mathcal{O}_K).$$

(ハ) $$h(N;\mathcal{O}_K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\bar{S}(N;\mathcal{O}_K),\mathcal{O}_K),$$

$$\bar{S}(N;\mathcal{O}_K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(h(N;\mathcal{O}_K),\mathcal{O}_K).$$

さて，$f \in S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)$: normalized eigenform $(r \geq 1)$ に対して，$f|h = \lambda(h)f$ とおくと

$$h_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K) \ni h \longmapsto (h,f) = a(1,f|h) = \lambda(h)$$

は $\mathcal{O}_K$-algebra homomorphism となる．この対応により，

(8) $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(h_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K),\mathcal{O}_K) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{\text{normalized eigenform} \in S_k(\Gamma_1(Np^r);\mathcal{O}_K)\}$$

となる．

§2. ordinary forms の family.

$\mathfrak{X}(\mathcal{O}_K) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K\text{-alg}}(\Lambda_K,\mathcal{O}_K)$ とおくと，$\Lambda_K \cong \mathcal{O}_K[[X]]$ の同一視により $\mathfrak{X}(\mathcal{O}_K) \ni \mathfrak{P}$ に対して $\mathrm{Ker}(\mathfrak{P}) = (X-a)$ とするとき $\mathfrak{P} \mapsto a$ によって

$$\mathfrak{X}(\mathcal{O}_K) \cong \{a \in \mathcal{O}_K \mid |a|_p < 1\}$$

となり，$\mathfrak{X}(\mathcal{O}_K)$ は p-adic analytic space とみなせる．また，$\mathrm{Ker}(\mathfrak{P}) = (X+1-(1+p)^k\varepsilon(1+p))$，$\varepsilon : 1+p\mathbb{Z}_p \to \mathcal{O}_K^\times$: finite order の character，と表わされる $\mathfrak{X}(\mathcal{O}_K)$ の部分集合

を $\mathfrak{X}_{alg}(\mathcal{O}_K)$ とおく. $k=k(\rho)$, $\varepsilon=\varepsilon(\rho)$, $r=r(\rho)$ とおく. 但 $\mathrm{Ker}(\varepsilon)=1+p^r\mathbb{Z}_p$ $(r\geqq 1)$.

さて,

$$\lambda:\ h^0(N;\mathcal{O}_K)\longrightarrow\Lambda_K\ :\ \Lambda_K\text{-algebra homomorphism}$$

とすると, 各 $\rho\in\mathfrak{X}_{alg}(\mathcal{O}_K)$ について

$$\lambda_\rho:\ h^0(N;\mathcal{O}_K)\xrightarrow{\lambda}\Lambda_K\xrightarrow{\rho}\mathcal{O}_K\ ;\ \mathcal{O}_K\text{-algebra homomorphism}$$

が得られ, 従って (7), (8) によって $S_{k(\rho)}(Np^{r(\rho)}, \varepsilon(\rho)\psi\omega^{-k(\rho)})$ に属する ordinary form f_ρ で

$$f_\rho|T(n)=\lambda_\rho(T(n))f_\rho$$

となるものが存在する. ここで ω は modulo p の Teichmüller character, ψ は modulo Np の Dirichlet character で λ のみで定まるものである. $\lambda(T(n))=A_n(X)\in\Lambda_K=\mathcal{O}_K[[X]]$ とおくと, f_ρ は

$$f_\rho(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\varepsilon(1+p)(1+p)^k-1\right)\exp(2\pi i n z)$$

と parametrize される. ($k=k(\rho)$, $\varepsilon=\varepsilon(\rho)$). $k(\rho)\geqq 2$ 且 f_ρ が conductor $Np^{r(\rho)}$ の primitive form となる ρ が存在するとき, λ を primitive と云う.

§3. generalized p-adic measure.

$\mathbb{Z}_p^\times$ 上の連続函数で $\mathcal{O}_K$ 上に値をとるもののなす p進 Banach space を $C(\mathbb{Z}_p^\times;\mathcal{O}_K)$ とし,

$$Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K) = Hom_{\mathcal{O}_K}(C(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K), \mathcal{O}_K),$$

$$Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\Lambda_K = Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K)\otimes_{\mathcal{O}_K}\Lambda_K \text{ の } p\text{進完備化}$$

とおく. $\Phi \in Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\Lambda_K$ 及び $g \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_K)$ に対して $\Phi_g \in Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K)$ が次の様に定まる:

$$\begin{array}{ccc} id.\otimes g : Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\Lambda_K & \longrightarrow & Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K)\otimes_{\mathcal{O}_K}(\Lambda_K/Ker\, g) \\ & & \| \\ & & Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K) \\ \Psi & & \Psi \\ \Phi & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

同様に $Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\Lambda_K\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\Lambda_K \ni \Phi$ と $g, g' \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_K)$ に対して $\Phi_{g,g'} \in Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K)$ が定まる.

§4. 結果.

定理 (Hida) $(N,p)=1$, $(J,p)=1$ なる自然数 N, J に対して

$\lambda: h^0(N, \mathcal{O}_K) \longrightarrow \Lambda_K$: primitive Λ_K-algebra homomorphism

$\mu: h^0(J, \mathcal{O}_K) \longrightarrow \Lambda_K$: Λ_K-algebra homomorphism

とする. K が充分大きい p進数体のとき, $\Phi = \Phi^{\lambda,\mu} \in Meas(\mathbb{Z}_p^\times; \mathcal{O}_K)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\Lambda_K\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\Lambda_K$ で次のことを満たすものが一意に存在する:

$g, g' \in \mathfrak{X}_{alg}(\mathcal{O}_K)$ で $2 \leqq k(g') < k(g)$ とする. $0 \leqq m < k(g)-k(g')$ なる整数 m と $\chi: \mathbb{Z}_p^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$: finite order の

character に対して

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi(z) z^m \, d\Phi_{g,q}$$
$$= t(g, m, j, \beta)\, a(p, f_g)^{r(g)-\beta} H(g) \frac{\mathcal{D}_{JNp}(j-m, f_g, (g_q|\chi)|_{k(q)}\tau_\beta)}{\pi^{j+1} \langle h_g, f_g \rangle_{Np^{r(g)}}}.$$

但. f_g は (λ, g) によって定まる ordinary form; g_q は (μ, q) によって定まる ordinary form; $j = k(q) + 2m$; β は $g_q|\chi = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) a(n, g_q) \exp(2\pi i n z) \in S_{k(q)}(\Gamma_1(Jp^\beta))$ となる自然数; $\tau_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Jp^\beta & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$;

$$t(g, m, j, \beta) = 2^{1-k(g)-j} (\sqrt{-1})^{k(g)+j} p^{\frac{1}{2}(\beta j - r(g)(k(g)-2))}$$
$$\times (N\text{と}J\text{の最小公倍数})^{1-m+\frac{1}{2}(j-k(g))}$$
$$\times N^{-\frac{k(g)}{2}} J^{m+\frac{k(g)}{2}} (j-m-1)!\, m!;$$

Hは λ によって決まる Λ_K の元で, $H(g)$ は Hの g での値;

$$h_g = f_g^\rho |_{k(g)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Np^{r(g)} & 0 \end{pmatrix} \in S_{k(g)}(Np^{r(g)}, \varepsilon(g)\psi\omega^{-k(g)}),$$

ρ は complex conjugation;

$$\langle h_g, f_g \rangle_{Np^{r(g)}} = \int_{\Gamma_0(Np^{r(g)})\backslash\mathfrak{H}} \overline{h_g(z)} f_g(z) y^{k(g)-2} \, dx\,dy, \quad z = x + iy.$$