数理解析研究所講究録
第617巻 1987年 77-88

2変数p-進L-関数の値について

九大理 小塚和人（ Kazuhito Kozuka ）

§1. 序

Kを複素数体$\mathbb{C}$に含まれる類数1の虚2次体，$-d_K$を，Kの判別式とする．EをK上定義され，Kの整数環$\mathcal{O}$による虚数乗法を持つ楕円曲線，ψをEのK上の量指標，$\mathfrak{f}$をψの導手とする．EのWeierstrass model

(1.1) $$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

を，$g_2, g_3 \in \mathcal{O}$かつ判別式$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$が$6\mathfrak{f}$の素因子のみで割り切れるように固定する．$\wp(z)$を(1.1)に関するWeierstrassの$\wp$-関数，Lを$\wp(z)$の周期格子とし，$\Omega_\infty \in L$を$L = \Omega_\infty \mathcal{O}$となるようにとる．

pを$6d_K\mathfrak{f}$と素で，Kで$(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}^*$と完全分解する有理素数とし，$\pi = \psi(\mathfrak{p})$，$\pi^* = \psi(\mathfrak{p}^*)$とおく．各$\mathfrak{g} \in \mathcal{O}$に対し，Eの$\mathfrak{g}$-分点全体のなす群を$E_\mathfrak{g}$と書くことにする．$E_{\pi^\infty} = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_{\pi^{n+1}}$，$E_{\pi^{*\infty}} = \bigcup_{m=0}^{\infty} E_{\pi^{*m+1}}$とおく．

以後Kの$\mathfrak{p}$による完備化を，p-進有理数体$\mathbb{Q}_p$と同一視し，$\mathbb{Z}_p$を$\mathbb{Q}_p$の整数環とする．

$\mathfrak{P}_\infty$を$\mathfrak{p}$の上にある$K(E_{\pi^\infty})$の素イデアル，$\mathcal{F}_\infty$を$K(E_{\pi^\infty})$の$\mathfrak{P}_\infty$による完備化，$\mathbb{C}_p$を$\mathcal{F}_\infty$の代数閉包の完備化とし，Kの$\mathbb{C}$における代数閉包を$\mathbb{C}_p$に埋め込んでおく．$\mathcal{F}_\infty$, $\mathbb{C}_p$の整数環をそれぞれ$\mathcal{O}_\infty$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$と書くことにする．

Kの整イデアル$\mathfrak{g}$に対し，$Cl(\mathfrak{g})$をKの ray class group mod $\mathfrak{g}$，$R(\mathfrak{g})$をKの ray class field mod $\mathfrak{g}$とする．整数$k \geq 1$に対し，ψ^kの導手が$\mathfrak{g}$を割り切るとき，$\sigma \in Gal(R(\mathfrak{g})/K)$に対して，$L_\mathfrak{g}(\sigma, \overline{\psi}^k, s)$を部分 zeta 関数，即ち，

$$L_\mathfrak{g}(\sigma, \overline{\psi}^k, s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}:\,K\text{の整イデアル} \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{g})=1,\ (\mathfrak{a}, R(\mathfrak{g})/K)=\sigma}} \overline{\psi}^k(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s} \quad (Re(s) > 1 + k/2)$$

の全s-平面への解析接続とする．$Cl(\mathfrak{g})$の指標χに対し，

$$L_\mathfrak{g}(\chi\overline{\psi}^k, s) = \sum_{C \in Cl(\mathfrak{g})} \chi(C) L_\mathfrak{g}(\sigma_C, \overline{\psi}^k, s)$$

とおく．ここにσ_Cは，Artin 対応によって$C \in Cl(\mathfrak{g})$に対応する$Gal(R(\mathfrak{g})/K)$の元である．特に，$\mathfrak{g}$が$\overline{\chi}\psi^k$の導手に等しいとき，$L_\mathfrak{g}(\chi\overline{\psi}^k, s)$は，$\chi\overline{\psi}^k$に関する primitive Hecke L-関数になる．これを単に，$L(\chi\overline{\psi}^k, s)$と書くことにする．

uを$1+p\mathbb{Z}_p$の位相的生成元とする．このとき，各$(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$に対し，次の補間的性質を持つ巾級数$G_\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) \in \mathcal{O}_\infty[[T_1, T_2]]$が存在する（[5]）；

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \le -k_2 < k_1$, $(k_1, k_2) \equiv (i_1, i_2) \pmod{p-1}$ のとき,

$$(1.2) \quad \mathcal{G}_f^{(i_1,i_2)}(u^{k_1}-1, u^{k_2}-1) = (k_1-1)!\,\Omega_g^{k_2-k_1}(1-\psi(g)^{k_1-k_2}/Ng^{1-k_2}) \times (1-\bar{\psi}(g^*)^{k_1-k_2}/Ng^{*k_1})(2\pi/\sqrt{d_K})^{-k_2}\Omega_\infty^{-(k_1-k_2)}L_f(\bar{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$$

ここに, Ω_g は §2で定義する $\mathcal{O}_0^\times$ の元, また (1.2) の右辺は, Damerell の定理により, $\mathbb{C}_p$ の元とみなしている.

ここでは, $\mathbb{Z}_p^\times$ の第2種指標 φ, φ' 及び整数 $k_1 > -k_2 \ge 0$ に対する $\mathcal{G}_f^{(i_1,i_2)}(\varphi(u)u^{k_1}-1, \varphi'(u)u^{k_2}-1)$ の値を調べ, [1] 系 2.4 の2変数の場合における類似の結果と, Dirichlet 指標に対する p-進 L-関数の $s=1$ での値に関する Leopoldt の公式の類似の結果を紹介する.

§2. Eisenstein 級数

整数 $k \ge 1$ に対し, $K_k(z,s)$ を

$$K_k(z,s) = \sum_{w \in L, w \ne -z} (\bar{z}+\bar{w})^k |z+w|^{-2s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1+k/2)$$

の全 s-平面への解析接続とする. 整数 $k > j \ge 0$ に対し,

$$E_{j,k}(z) = (k-1)!\,(2\pi/\sqrt{d_K})^{j}\,|\Omega_\infty|^{-2j} K_{k+j}(z,k)$$

とおく. さらに, $E_k(z) = E_{0,k}(z)$ とおく.

$\sigma(z)$ を格子 L に関する Weierstrass σ-関数とし,

$$\theta(z) = \Delta \exp(-6 s_2 z^2)\,\sigma(z)^{12}$$

とおく. ここに, $s_2 = \lim_{s \to 0+} \sum_{w \in L - \{0\}} w^{-2}|w|^{-2s}$ である.

I を $6pf$ と素な K の整イデアル全体の集合とする. 各 $\mathfrak{a} \in I$

に対し，

$$\Theta(z,\mathfrak{a})=\theta(z)^{N\mathfrak{a}}/\theta(\psi(\mathfrak{a})z)$$

とおく．$\Theta(z,\mathfrak{a})$，$E_k(z)$ に関して，次の結果が成り立つ．

(2.1) $$\Theta(z,\mathfrak{a})\in K(\wp(z))$$

$k\geq 1$，$\alpha\in\mathbb{C}\setminus L$ に対し，

(2.2) $$(d/dz)^k\log\Theta(z+\alpha,\mathfrak{a})\Big|_{z=0}=12(-1)^{k-1}\{N\mathfrak{a}E_k(\alpha)-\psi(\mathfrak{a})^kE_k(\psi(\mathfrak{a})\alpha)\}.$$

$k>j\geq 0$，$\mathfrak{g}\in\mathcal{O}$ のとき，$\alpha\in\mathfrak{g}^{-1}L\setminus L$ に対し，

(2.3) $$E_{j,k}(\alpha)\in K(E_{\mathfrak{g}}).$$

$\mathfrak{b}$が$\mathfrak{f}$及びアーベル拡大 $K(E_{\mathfrak{g}})/K$ の導手と素なKの整イデアルのとき，

(2.4) $$E_{j,k}(\Omega_\infty/g)^{(\mathfrak{b},K(E_{\mathfrak{g}})/K)}=E_{j,k}(\psi(\mathfrak{b})\Omega_\infty/g).$$

$\mathfrak{g}=(g)$ が $\mathfrak{f}^*$及びψ^{k+j}の導手で割り切れるとき，

(2.5) $$E_{j,k}(\psi(\mathfrak{b})\Omega_\infty/g)=g^{k+j}/Ng^j\,(k-1)!\,(2\pi/\sqrt{d_K})^j\,\Omega_\infty^{-(k+j)}L_{\mathfrak{g}}(\sigma_{\mathfrak{b}},\overline{\psi}^{k+j},k),$$

ここに，$\sigma_{\mathfrak{b}}=(\mathfrak{b},R(\mathfrak{g})/K)$ である．

$\hat{E}$ を Eの演算を parameter $t=-2x/y$ で展開して得られる形式群とし，$\lambda:\hat{E}\xrightarrow{\sim}G_a$ を E の logarithm とする．$\hat{E}$から乗法的形式群G_m への$\mathcal{O}_\infty$上の同型 η が存在する（[5]）．$i:G_m\xrightarrow{\sim}\hat{E}$ を η の inverse とする。

命題2.1. $\mathfrak{g}\in\mathcal{O}$，$(\mathfrak{g},\pi^*)=1$ とすると，整数 $m\geq 0$ に対し，$\pi^{m+1}E_1(\Omega_\infty/g\pi^{*m+1})$ は $\mathfrak{g}$-integral になる．

（証明）　$\alpha = \Omega_\infty / g\pi^{*m+1}$ とおく．$\Theta(\lambda(t)+\alpha, \mathfrak{a})$ の t による巾級数展開は，各係数が $K(E_\alpha)$ の $\mathfrak{g}$-integral な元で，整級数になり，定数項は $\mathfrak{g}$-unit になる。従って，

$$d/dz \log\Theta(z+\alpha,\mathfrak{a})\big|_{z=0} = \lambda'(t)^{-1}\, d/dt \log\Theta(\lambda(t)+\alpha,\mathfrak{a})\big|_{t=0}$$

も $\mathfrak{g}$-integral になり，(2.2) により $\pi^{m+1}E_1(\alpha)$ も $\mathfrak{g}$-integral になる．

命題2.2.　$g\in\mathcal{O}$, $(g,\pi^*)=1$ とする．このとき，整数 $k>j\ge 0$ に対し，整数 $\delta(g,k,j)\ge 0$ が存在し，$\forall m\ge 0$ に対し，

$$(2.6)\quad \overline{(g\pi^{*m+1})^j}\, E_{j,k}(\Omega_\infty/g\pi^{*m+1}) \equiv \left(\overline{-g\pi^{*m+1}}\,E_1(\Omega_\infty/g\pi^{*m+1})\right)^j E_k(\Omega_\infty/g\pi^{*m+1}) \mod \mathfrak{g}^{m+1-\delta(g,k,j)}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

となる．

（証明）　$\eta(T) = \Omega_\mathfrak{g} T + \cdots$ とする．$\mathfrak{a}\in I$ に対し

$$h_\mathfrak{a}(T) = \lambda'(w)^{-1}\, d/dw \log\Theta(\lambda(w)+\Omega_\infty/g\pi^{*m+1},\mathfrak{a})\big|_{w=i(T)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T]]$$

とおく．$h_\mathfrak{a}(T)$ に対応する $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-値 measure $\mu_{h_\mathfrak{a}}$ に対し，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} x^{k-1}\, d\mu_{h_\mathfrak{a}} &= \left((1+T)\,d/dT\right)^{k-1} h_\mathfrak{a}(T)\big|_{T=0} \\ &= \Omega_\mathfrak{g}^{1-k}\cdot 12(-1)^{k-1}\{N\mathfrak{a}\,E_k(\Omega_\infty/g\pi^{*m+1}) \\ &\qquad - \psi(\mathfrak{a})^k E_k(\psi(\mathfrak{a})\Omega_\infty/g\pi^{*m+1})\}\end{aligned}$$

が成り立つ．f を $\mathfrak{f}$ の生成元とし，$\mathfrak{a} = (1+6fg\pi\pi^{*m+1})$ とおくことにより，$m\gg 0$ のとき，$p^{\mathrm{ord}_\mathfrak{g}(g\pi(k-1))}E_k(\Omega_\infty/g\pi^{*m+1})$ は $\mathfrak{g}$-integral になることがわかる．

$k>j\ge 0$, $k>1$ のとき，$P_{j,k}(X_1,\dots,X_{k+j})\in\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_{k+j}]$ で，

$\deg P_{jk} \leq j+1$, $\deg_{X_1} P_{jk}(X_1, \cdots, X_{k+j}) \leq j-1$, $E_{jk}(z) = (-E_1(z))^j E_k(z) + 2^{-j} P_{jk}(E_1(z), \cdots, E_{k+j}(z))$ となるものが存在するから([4]), (2.6) を満たす $\delta(g, k, j)$ が存在する.

命題2.3. $g \in \mathcal{O}$, $(g, \pi^*) = 1$ とする. このとき, 極限値

$$\lim_{m\to\infty} -\overline{g\pi^{*m+1}}\, E_1(\Omega_\infty / g\pi^{*m+1})$$

が $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ において存在する. さらにこれは, g には無関係で, $\mathcal{O}_\infty$ に属する.

命題2.3 は, [6] 定理4.3 の証明と同様の方針で証明される. [5] 定理15 の証明も考慮すると, $\eta: \hat{E} \simeq \mathbb{G}_m$ は, $\Omega_g = \eta'(0) = \lim_{m\to\infty} -\overline{g\pi^{*m+1}}\, E_1(\Omega_\infty / g\pi^{*m+1})$ を満たすようにとれることがわかる. 以下, η はこの条件も満たすものとする.

§3. 2変数 p-進 L-関数への応用

整数 $m \geq 0$ に対し, $B_m \subset I$ を $\{(\mathfrak{b}, R(\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{*m+1})/K), \mathfrak{b} \in B_m\}$ がちょうど $\mathrm{Gal}(R(\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{*m+1})/K(E_{\pi^{*m+1}}))$ と一致するようにとる.

$\mathfrak{a} \in I$ に対し,

$$\Lambda_m(z, \mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{b} \in B_m} \Theta(z + \psi(\mathfrak{b})\Omega_\infty / f\pi^{*m+1}, \mathfrak{a})$$

とおく. これは $K(E_{\pi^{*m+1}})$-係数の $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理関数になり, B_m のとり方にはよらない. $\Lambda_m(z, \mathfrak{a})$ を z の巾級数に展開し,

z を $\pi^{*-(m+1)}\lambda(T)$ で置き換えることにより，$K(E_{\pi^{*m+1}})$-係数の T を不定元とする整級数が得られる。これを $C_{m,\mathfrak{a}}(T)$ と書く．$C_{m,\mathfrak{a}}(T)$ の各係数は $\mathfrak{g}$-integral，$C_{m,\mathfrak{a}}(0)$ は $\mathfrak{g}$-unit になるから，$C_{m,\mathfrak{a}}(T)$ は $(\mathcal{O}_\infty[[T]])^\times$ に属するとみることができる.

$$g_{m,\mathfrak{a}}(T) = \lambda'(T)^{-1}\, d/dT \log C_{m,\mathfrak{a}}(T) \in \mathcal{O}_\infty[[T]]$$

とおく。

$a, m, l \in \mathbb{Z}$，$(a,p)=1$，$m, l \geq 0$，$\sigma \in Gal(R(f\mathfrak{g}^{*m+1})/K)$，$\mathfrak{b} \in I$ のとき，$A(a,m,l,\sigma,\mathfrak{b}) \in \mathcal{O}$ を，$A(a,m,l,\sigma,\mathfrak{b}) \equiv af \mod \mathfrak{g}^{l}$，$A(a,m,l,\sigma,\mathfrak{b}) \equiv \psi(\mathfrak{b}\mathfrak{a}_\sigma)\pi^{l} \mod f\mathfrak{g}^{*m+1}$ を満たすようにとる。ここに $\mathfrak{a}_\sigma$ は，$(\mathfrak{a}_\sigma, R(f\mathfrak{g}^{*m+1})/K) = \sigma$ を満たす K の整イデアルである.

$g_{m,\mathfrak{a}}(T)$ の各係数は，$K(E_{\pi^{*m+1}})$ に属するから，F を $K(E_{\pi^{*m+1}})$ を含む K のガロア拡大とするとき，$\tau \in Gal(F/K)$ に対し，$g^{\tau}_{m,\mathfrak{a}}(T)$ が自然に定義され，$g^{\tau}_{m,\mathfrak{a}}(T) \in \mathcal{O}_\infty[[T]]$ となる．

以下，整数 $n \geq 0$ に対し，1 の原始 p^{n+1}-乗根 $\zeta_{p^{n+1}}$ は，

$$i(\zeta_{p^{n+1}} - 1) = -2\wp(\Omega_\infty/\pi^{n+1})/\wp'(\Omega_\infty/\pi^{n+1})$$

を満たすものとする．(2.2), (2.4), (2.5), 命題 2.2, 2.3 から次の命題が導かれる。

命題 3.1. $a, m, l \in \mathbb{Z}$，$(a,p)=1$，$m, l \geq 0$，$\sigma \in Gal(R(f\mathfrak{g}^{*m+1})/K)$ とする．このとき，$\mathfrak{a} \in I$ 及び整数 $k_1 > -k_2 \geq 0$ に対し，

$$\left((1+T)\, d/dT\right)^{k_1-1} g^{\sigma}_{m,\mathfrak{a}}\left(i(\zeta^{a}_{p^{l}}(1+T)-1)\right)\Big|_{T=0}$$

$$\equiv 12(-\Omega_{\mathfrak{g}})^{1-k_1+k_2} f^{k_1} (\psi^{k_1}\bar{\psi}^{k_2})(\mathfrak{g}^{\ell})\, \bar{\psi}^{k_2}(\mathfrak{a}_\sigma)\, (k-1)! \sum_{\mathfrak{b}\in B_m} (2\pi/\sqrt{d_K})^{-k_2}\, \Omega_\infty^{-(k_1-k_2)}$$
$$\times \Big\{ N\mathfrak{a}\, L_{f\mathfrak{g}^{\ell}\mathfrak{g}^{*m+1}}(\sigma_{A(a,m,\ell,\sigma,\mathfrak{b})}, \bar{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$$
$$- \psi^{k_1}(\mathfrak{a})\bar{\psi}^{k_2}(\mathfrak{a})\, L_{f\mathfrak{g}^{\ell}\mathfrak{g}^{*m+1}}(\sigma_{A(a,m,\ell,\sigma,\mathfrak{b})\mathfrak{a}}, \bar{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)\Big\} \bmod \mathfrak{g}^{m+1-\delta(f\pi^{\ell}, k_1-k_2)}$$

となる.

$\kappa : Gal(K(E_{\pi^\infty})/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ を, $Gal(K(E_{\pi^\infty})/K)$ の E_{π^∞} への作用を表す指標, $\kappa^* : Gal(K(E_{\pi^{*\infty}})/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ を, $Gal(K(E_{\pi^{*\infty}})/K)$ の $E_{\pi^{*\infty}}$ への作用を表す指標とする. 各 $\sigma \in Gal(K(E_{\pi^{*m+1}})/K)$ に対し, $\kappa^*(\sigma)$ が $\mathrm{mod}\ \mathfrak{g}^{m+1}$ で定まり, 従って, $(1+T)^{\kappa^*(\sigma)}$ が $\mathrm{mod}\ ((1+T)^{p^{m+1}}-1)\mathcal{O}_\infty[[T]]$ で定まる. $\mu : I \to \mathbb{Z}$ を, $\mu(\mathfrak{a}) = 0$ *for almost all* $\mathfrak{a} \in I$, $\sum_{\mathfrak{a}\in I} \mu(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a}-1) = 0$ を満たす写像とする. μ に対し,

$$g_{m,\mu}(T) = \sum_{\mathfrak{a}\in I} \mu(\mathfrak{a})\, g_{m,\mathfrak{a}}(T)$$

とおく. このとき,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\sigma\in Gal(K(E_{\pi^{*m+1}})/K)} g_{m,\mu}^{\sigma}(T_1)(1+T_2)^{\kappa^*(\sigma)} \in \mathcal{O}_\infty[[T_1, T_2]]$$

が存在する([5]定理5, 10). この巾級数を $g_\mu(T_1, T_2)$ と書くことにする. さらに,

$$h_\mu(T_1, T_2) = g_\mu(i(T_1), T_2)$$
$$(U_1 h_\mu)(T_1, T_2) = h_\mu(T_1, T_2) - 1/p \sum_{J^p=1} h_\mu(J(1+T_1)-1, T_2)$$

とおく. $U_1 h_\mu$ は, $\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{O}_\infty$-値 *measure* $\mu_{U_1 h_\mu}$ を定義する. ω を Teichmüller character とし, $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対し, $\langle x\rangle = x/\omega(x)$ とおく. このとき, 各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, Γ-変換 $\Gamma_{U_1 h_\mu}^{(i_1,i_2)} : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathcal{O}_\infty$

が,

$$\Gamma_{\upsilon_1 h_\mu}^{(i_1,i_2)}(s_1,s_2)=\int_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times}\langle x_1\rangle^{s_1}\langle x_2\rangle^{s_2}\omega^{i_1}(x_1)\omega^{i_2}(x_2)\,d\mu_{\upsilon_1 h_\mu}$$

によって定義される. さらに, $(\upsilon_1 h_\mu)^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\in\mathcal{O}_\infty[[T_1,T_2]]$ が存在して,

$$\Gamma_{\upsilon_1 h_\mu}^{(i_1,i_2)}(s_1,s_2)=(\upsilon_1 h_\mu)^{(i_1,i_2)}(u^{s_1}-1,\ u^{s_2}-1)$$

となる.

$$G_\mu^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)=(\upsilon_1 h_\mu)^{(i_1-1,-i_2)}(u^{-1}(1+T_1)-1,\ (1+T_2)^{-1}-1)$$

とおく.

(1.2) を満たす補間級数 $G_f^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$ は, $G_\mu(T_1,T_2)$ から容易に構成される([5]).

χ を $\mathbb{Z}_p^\times$ の有限位数の指標とすると, $\chi\circ k$ は $Gal(K(E_{\pi^\infty})/K)$ の有限位数の指標となるから, 類体論により, $\chi\circ k$ の Kernel の固定体の K上の導手で割り切れる Kの整イデアル $\mathfrak{g}$ に対し, $\chi\circ k$ は, mod $\mathfrak{g}$ の類指標を定義する. これを $\chi_{\mathfrak{g}}$ と書くことにする. 同様に, $\mathfrak{g}$ が $\chi\circ k^*$ の Kernelの固定体のK上の導手で割り切れるとき, $\chi\circ k^*$ から mod $\mathfrak{g}$ の類指標が定義される. これを $\chi_{\mathfrak{g}^*}$ と書くことにする.

命題3.1 と, Γ-変換の性質([2], [5])から, 次の結果が得られる.

定理3.2. $(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$, $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$, $k_1>-k_2\geq 0$ とする.

φ, φ'を$\mathbb{Z}_p$の第2種指標, $\chi=\varphi\omega^{i_1-k_1}$, $\chi'=\varphi'\omega^{i_2-k_2}$ とおく. p^{n_1}, p^{n_2}をそれぞれ χ, χ'の導手とする。このとき,

$$(3.1)\quad \mathcal{G}_{\mathfrak{f}}^{(i_1,i_2)}(\varphi(u)u^{k_1}-1, \varphi'(u)u^{k_2}-1)$$
$$= (-1)^{i_1+i_2}(-\Omega_{\mathfrak{g}})^{k_2-k_1}(\psi^{k_1}\overline{\psi}^{k_2}\chi'_{\mathfrak{g}^*})(\mathfrak{g}^{n_1})\,\tau(\chi^{-1}, J_{p^{n_1}})^{-1}(k_1-1)!$$
$$\times (2\pi/\sqrt{d_K})^{-k_2}\,\Omega_\infty^{-(k_1-k_2)}\left(1-(\psi^{k_1-k_2}\chi_{\mathfrak{g}}\chi'_{\mathfrak{g}^*})(\mathfrak{g})/N\mathfrak{g}^{-k_2+1}\right)\left(1-(\overline{\psi}^{k_1-k_2}\overline{\chi}_{\mathfrak{g}}\overline{\chi'_{\mathfrak{g}^*}})(\mathfrak{g}^*)/N\mathfrak{g}^{k_1}\right)$$
$$\times L_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{n_1}\mathfrak{g}^{*n_2}}(\overline{\chi}_{\mathfrak{g}}\overline{\chi'_{\mathfrak{g}^*}}\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$$

となる. ここに, $\tau(\chi^{-1}, J_{p^{n_1}})$は, χ^{-1}と$J_{p^{n_1}}$に対するガウス和である.

$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)\in\mathcal{O}_\infty[[T_1,T_2]]$ を, $k_1>-k_2\geq 0$, $(k_1, k_2)\equiv(i_1, i_2) \pmod{p-1}$ のとき,

$$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(u^{k_1}-1, u^{k_2}-1) = (k_1-1)!\,\Omega_{\mathfrak{g}}^{k_2-k_1}\left(1-\psi(\mathfrak{g})^{k_1-k_2}/N\mathfrak{g}^{1-k_2}\right)\left(1-\overline{\psi}(\mathfrak{g}^*)^{k_1-k_2}/N\mathfrak{g}^{*k_1}\right)$$
$$\times (2\pi/\sqrt{d_K})^{-k_2}\,\Omega_\infty^{-(k_1-k_2)}L(\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$$

となる巾級数とする. このとき, [2] (7.4) により, 次の系が成立する.

系 3.3. 定理 3.2 の仮定の上に, 更に $(k_1, k_2)\equiv(0,0) \pmod{p-1}$とする. このとき, $\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(\varphi(u)u^{k_1}-1, \varphi'(u)u^{k_2}-1)$は, (3.1)の右辺で, $L_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{n_1}\mathfrak{g}^{*n_2}}(\overline{\chi}_{\mathfrak{g}}\overline{\chi'_{\mathfrak{g}^*}}\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$を$L(\overline{\chi}_{\mathfrak{g}}\overline{\chi'_{\mathfrak{g}^*}}\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$におきかえて得られる値に一致する.

Kの整イデアル $\mathfrak{g} \neq (1)$ と，$C \in Cl(\mathfrak{g})$ に対し，$\varphi_{\mathfrak{g}}(C) \in R(\mathfrak{g})$ を，[3]で定義された ray class invariant とする．$Cl(\mathfrak{g})$ の原始指標χに対し，

$$S^{(p)}(\chi) = \sum_{C \in Cl(\mathfrak{g})} \chi^{-1}(C) \log_p \varphi_{\mathfrak{g}}(C)$$

とおく．ここに，$\log_p$ は $\mathbb{C}_p^{\times}$ 上定義されたp-進対数である．

$k_{\mathfrak{g}} > 0$ を，$\mathfrak{g} \cap \mathbb{Z}$の生成元とする．このとき，[2]定理5.1 は次のように表される．

定理 3.4. $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ とし，φ, φ' を $\mathbb{Z}_p$ の第2種指標，p^{n_1}, p^{n_2} をそれぞれ，$\varphi\omega^{i_1}, \varphi'\omega^{i_2}$ の導手とする．$n_1' = \max\{n_1, 1\}$ とおく．さらに，$(\varphi\omega^{i_1})_{\mathfrak{f}}(\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{f}^*} \neq 1$ と仮定する．このとき，

$$G^{(i_1,i_2)}(\varphi(u)-1, \varphi'(u)-1) = \frac{(-1)^{1+i_1-i_2} (\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{f}^*}(\mathfrak{f}^{n_1'})}{12\, k_{\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{f}^{n_1}\mathfrak{f}^{*n_2}}\, \tau(\varphi^{-1}\omega^{-i_1}; J_{p^{n_1}})} \cdot \left(1 - \frac{((\varphi\omega^{i_1})_{\mathfrak{f}}(\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{f}^*})(\mathfrak{f})}{p}\right)$$

$$\times \left(1 - ((\varphi\omega^{i_1})_{\mathfrak{f}}(\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{f}^*})(\mathfrak{f}^*)\right) S^{(p)}\left((\varphi\omega^{i_1})_{\mathfrak{f}}(\varphi'\omega^{i_2})_{\mathfrak{f}^*}\right)$$

となる．

参考文献

[1] C. Goldstein, Courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa, Pub. Math. D'orsay, 82-01

[2] K. Kozuka, Elliptic units and two variable p-adic L-functions, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 40 (1986), 77-90.

[3] G. Robert, *Unités elliptiques*, Bull. Soc. Math. France Mémoire, 36 (1973).

[4] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1976.

[5] R. Yager, *On two variable p-adic L-functions*, Ann. of Math., 115 (1982), 411-449.

[6] R. Yager, *p-adic measures on Galois groups*. Invent. Math 76 (1984), 331-343.