数理解析研究所講究録
第617巻 1987年 114-129

Jacobi 形式, Oda lifting, Maass space について

東大・教養（学振・研究員）
菅野孝史（Takashi Sugano）

このノートの目的は、符号 $(2, m+2)$ の直交群上の正則尖点形式の空間への1変数保型形式からの持ち上げ（Oda lifting）を、Jacobi 形式の言葉で言い換えることにある。このことから、Maass space と lifting image が一致することがわかる。更に持ち上げに伴うL関数の関係を求める。最後に、image をL関数の言葉で特徴付けるための1ステップに、ふれたい。

§1. Jacobi 形式のL関数

Jacobi 形式とは、Siegel 保型形式の様々な部分 Fourier 係数と同じ変換公式を満す保型形式のことである。ここでは、新谷先生により [14] で導入された用語、Hecke 環・L関数の定義を用いて、一番易しい場合（本質的には1変数の保型形式の場合）に、L関数の解析接続・関数等式を調べる［一般的

な場合については Murase [09], [10] を参照されたい]。なお、この節の内容は、昨年度のシンポジウム報告集に書いた [16] §7 と殆んど重複しているが、記号の導入を兼ねて再記させてもらう。

1-1 Jacobi形式の定義: m を非負整数, $V_0=\mathbb{Q}^m$, $L_0=\mathbb{Z}^m$ とする。$\mathbb{Q}$上の代数群 H を、

$$H=H_{1,m}=\{(u,v,z)\mid u,v\in V_0,\ z={}^tz\in M_m(\mathbb{Q})\}$$
$$(u,v,z)(u',v',z')=(u+u',\ v+v',\ z+z'+u\,{}^tv'+v'\,{}^tu)$$

によって定義する。これには SL_2 が、

$$g^{-1}(u,v,z)g=(u',v',z'),\quad (u',v')=(u,v)g,\ z'=z-v\,{}^tu+v'\,{}^tu',$$

と作用している。この作用による H と SL_2 の半直積を、$\underline{G}=\underline{G}_{1,m}=H_{1,m}\cdot SL_2$ であらわす。これは、Sp_{m+1} の部分群とみなせる。なお、$\underline{G}$ の中心Zは、Hの中心と一致し、$\{(0,0,z)\mid z={}^tz\}$ である。

さて $\underline{G}_\infty$ は、$\underline{\mathfrak{D}}=\underline{\mathfrak{D}}_{1,m}=\{Z=(z,w)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ に、

$$(u,v,z)g\langle(z,w)\rangle=(g\langle z\rangle,\ w\,j(g,z)^{-1}+u\,g\langle z\rangle+v)$$

と作用している(ここで $g\langle z\rangle$, $j(g,z)$ は $SL_2(\mathbb{R})$ の上半平面への通常の作用及び保型因子)。m次正定値半整数対称行列 S と、自然数 k に対し、

$$J_{S,k}(\underline{g},Z)=j(g,z)^{k}\,\mathbf{e}\Big[-\mathrm{tr}Sz+\frac{c}{j(g,z)}S[w]-\frac{2}{j(g,z)}S(u,w)-g\langle z\rangle S[u]\Big]$$
$$\Big(\underline{g}=(u,v,z)g,\ g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Big)$$

は、$\underline{\underline{G}}_\infty \times \underline{\underline{\mathfrak{D}}}$ 上の正則保型因子を与える。$\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{G}}(\mathbb{Z})$ とし、$\underline{\underline{\Gamma}}$ に関する weight k, index S の Jacobi (cusp) forms の空間 $\mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\underline{\Gamma}})$ を、

$$\mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\underline{\Gamma}}) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ f : \underline{\underline{\mathfrak{D}}} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(\gamma\langle Z\rangle) = J_{S,k}(\underline{\gamma}, Z) f(Z) \quad \forall \underline{\gamma} \in \underline{\underline{\Gamma}} \\ \text{holomorphic, cuspidal} \end{array} \right\}$$

と定義する。各元は、

$$f(z, w) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z},\ \alpha \in L_0^* = (2S)^{-1} L_0 \\ a - S[\alpha] > 0}} a_f(a, \alpha)\, \mathbf{e}[az + 2S(\alpha, w)]$$

と Fourier 展開されることに注意しておく。

$\mu \in L_0^* / L_0$ に対し、

$$\theta_\mu(z, w) = \sum_{\eta \in L_0} \mathbf{e}[zS[\eta + \mu] + 2S(\eta + \mu, w)]$$

とおく。$\mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\underline{\Gamma}})$ を、$\{\theta_\mu(z, w) \mid \mu \in L_0^*/L_0\}$ を basis にして展開することによって、weight $k - \frac{m}{2}$ のベクトル値尖点形式が得られる。すなわち、

$$\mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\underline{\Gamma}}) \cong S_{k-\frac{m}{2}}(SL_2(\mathbb{Z}); U_S),$$

ここで右辺の U_S はテータの変換公式からきまる $|L_0^*/L_0|$ 次のユニタリ行列。

1 - 2 Hecke 環：p を素数とし、$\underline{\underline{G}}_p = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Q}_p}$, $\underline{\underline{K}}_p = \underline{\underline{G}}_{\mathbb{Z}_p}$, $Z_p = Z_{\mathbb{Q}_p}$ とおく。$\chi = \prod_v \chi_v$ を $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$ の指標で $\chi_\infty(x) = \mathbf{e}[x]$ となるものとする。新谷先生により $\underline{\underline{G}}_p$ の Hecke 環が、

$$\underline{\underline{\mathcal{H}}}_{S,p} = \left\{ \phi : \underline{\underline{G}}_p \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{bi } \underline{\underline{K}}_p\text{-invariant} \\ \phi((0,0,z)g) = \chi_p(\mathrm{tr}\, Sz)\phi(g) \quad \forall z \in Z_p \\ Z_p \backslash \mathrm{supp}\,\phi = \text{compact} \end{array} \right\}$$

と定義されている（積は、$Z_p\backslash \mathfrak{G}_p$ 上の convolution）。

以下、"$L_{0,p}=L_0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$ が S に関し maximal integral lattice for $\forall p$" を仮定する。

$$L'_{0,p}=\{\,x\in L^*_{0,p}\mid S[x]\in p^{-1}\mathbb{Z}_p\,\}$$

は，$L_{0,p}$ を含み、$L'_{0,p}/L_{0,p}$ は、有限体 $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ 上の vector space となるから、その次元を ∂_p であらわす（殆んどの p では、$\partial_p=0$ である）。ν_p を S の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index，$n_{0,p}=m-2\nu_p$ とし、$\underline{\underline{\mathcal{H}}}_{S,p}$ の特別な元 $\phi_{0,p}$，$\phi_{1,p}$ を

$$\begin{cases}\phi_{0,p}:(0,y,0)\ (y\in L'_{0,p})\ \text{での値}=p^{-\partial_p},\ \mathrm{supp}=Z_p\underline{\underline{K}}_p\{(0,y,0)\mid y\in L'_{0,p}\}\underline{\underline{K}}_p\\ \phi_{1,p}:\begin{pmatrix}p&0\\0&p^{-1}\end{pmatrix}\ \text{での値}=1,\ \mathrm{supp}=Z_p\underline{\underline{K}}_p\begin{pmatrix}p&\\&p^{-1}\end{pmatrix}\underline{\underline{K}}_p\end{cases}$$

と定義する。容易に、

$$\phi_{0,p}*\phi_{1,p}=\phi_{1,p}*\phi_{0,p}=\phi_{1,p},$$

$$\phi_{0,p}=1\ \text{ if }\partial_p=0,\quad \phi_{0,p}^2=\begin{cases}1 & \text{if }\partial_p=1\\ (1-p^{-1})\phi_{0,p}+p^{-1} & \text{if }\partial_p=2.\end{cases}$$

この２元で生成される $\underline{\underline{\mathcal{H}}}_{S,p}$ の subalgebra を、$\underline{\underline{\mathcal{H}}}'_{S,p}$ とおく。

$\lambda_p\in\mathrm{Hom}(\underline{\underline{\mathcal{H}}}'_{S,p},\mathbb{C})$ の L関数を、

$$L_p(\lambda_p;s)=\left\{1-\left(\lambda_p(\phi_{1,p})p^{-(1+\frac{m}{2})}-p^{-n_{0,p}/2+\partial_p}+p^{-1+n_{0,p}/2}\right)p^{-s}+\lambda_p(\phi_{1,p})^{-1}p^{-2s}\right\}^{-1}$$

$$\times\begin{cases}(1-\chi_S(p)p^{-s})^{-1} & \text{if } m=\text{偶}\\ 1 & \text{if } m=\text{奇}\end{cases}$$

$$\times\begin{cases}1 & (n_{0,p},\partial_p)=(2,1)\ \text{or}\ \partial_p=0\\ 1+p^{1/2-s} & (n_{0,p},\partial_p)=(1,1)\\ 1-p^{1/2-s} & \quad=(3,1)\\ (1+p^{1/2-s})(1-p^{1/2-s}) & \quad=(3,2)\\ (1+p^{1-s})(1+p^{-s}) & \quad=(2,2)\\ (1-p^{1-s})(1-p^{-s}) & \quad=(4,2)\end{cases}$$

と定義する。ここで χ_S は、$\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{m/2}\det S})/\mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標.

1-3 L関数 : $\mathfrak{S}_{S,k}(\Gamma)$ の元を、G_A 上の関数とみる。convolution で、$\otimes_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$ が（Petersson 内積に関し）正規可換に作用している。今、同時固有関数 $f\in\mathfrak{S}_{S,k}(\Gamma)$: $f*\phi=\lambda_f(\phi)f \quad \forall\phi\in\otimes_p\mathcal{H}'_{S,p}$ に対し、

$$\xi(f;s)=\prod_p L_p(\lambda_f;s)\times\Gamma\left(s+k-\frac{m+2}{2}\right)\times\begin{cases}2^{-s}\pi^{-\frac{3}{2}s}(\det 2S)^s & m=\text{偶}\\ (2\pi)^{-s}(2^{-1}\det 2S)^s & m=\text{奇}\end{cases}$$

$$\times\begin{cases}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) & \text{if } m\equiv 0\ (4)\\ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) & \text{if } m\equiv 2\ (4)\\ 1 & \text{if } m=\text{奇}\end{cases}$$

とおく。

このL関数に対し、次の定理が成立する。

Theorem 1　$k>\frac{m+1}{2}$ とする。$\xi(f;s)$ は全 s 平面に解析接続され 関数等式

$$\xi(f;s)=\begin{Bmatrix}-1 & \text{if } m\equiv 1 \text{ or } 3\ (8)\\ 1 & \text{otherwise}\end{Bmatrix}\xi(f;1-s)$$

をみたす。更に、$m\not\equiv 6\ (8)$ ならば $\xi(f;s)$ は entire であり、$m\equiv 6\ (8)$ のときは $s=0,1$ で possible simple pole を持つのみである。

§2. Oda lifting と Maass space

この節では、Oda [11] で構成されている elliptic modular から直交群上の保型形式への lifting を、前節の Jacobi 形式

の言葉を使って言い換える。こうするメリットのひとつは、original versionでは一般には成立しない、*lifting* の単射性が成立することにある。また、Fourier係数をみると、2次Siegelの場合のMaass spaceと同様、部分Fourier係数からの持ち上げとなっていることがわかる。

2-1 Oda *lifting* : L_0, V_0, S 等は前節の通りとし、

$$L_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ L_0 \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subset V_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ V_0 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -2S & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ L_1 \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subset V = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ V_1 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & Q_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

とおく。

G を Q の直交群 $O(Q)$, $\mathcal{D} = \{ \mathfrak{z} \in \mathbb{C}^{m+2} \mid Q_1[\mathrm{Im}\,\mathfrak{z}] > 0 \}$ とする。$\mathcal{D}$ は2個の連結成分を持つが、$\mathfrak{z}_0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ を含む方を $\mathcal{D}^+$ と書く。G_∞ は $\mathcal{D}$ に、

$$g \cdot \hat{\mathfrak{z}} = \widehat{g\langle \mathfrak{z} \rangle} \cdot J(g, \mathfrak{z}) \quad \left(\hat{\mathfrak{z}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Q_1[\mathfrak{z}] \\ \mathfrak{z} \\ 1 \end{pmatrix},\ J(g,\mathfrak{z}) \in \mathbb{C}^\times \right)$$

と作用し, $J(g, \mathfrak{z})$ は $G_\infty \times \mathcal{D}$ 上のひとつの正則保型因子.

$$\Gamma = G \cap GL(m+4, \mathbb{Z}) \supset \Gamma^* = \{ \gamma \in \Gamma \mid (\gamma - 1) L^* \subset L \}$$

とおき、$S_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma^*)$ でそれぞれ Γ, Γ^* に関する weight k の正則尖点形式の空間をあらわす. 各 $F \in S_k(\Gamma^*)$ は、$F(\mathfrak{z}) = \sum_{\nu \in L_1^*} a_F(\nu)\, e[Q_1(\nu, \mathfrak{z})]$ と各連結成分上Fourier展開される.

上半平面の点 $z = x + iy$ に対し

$$Q_z = xQ + iyR, \qquad R = \begin{pmatrix} 1_2 & & \\ & 2S & \\ & & 1_2 \end{pmatrix}$$ とおき、

V_∞ 上の急減少関数 f_z を.

$f_z(v) = Q(\tilde{\mathfrak{z}}_0, v)^k\, \mathbf{e}[Q_z[v]]$ で定める.

最後に, *lifting* を定義するテータ関数を、

$\theta((z,w),g) = \sum_{\mu\in L^*/L} \theta(z,g;\mu)\, \theta_{\pi(\mu)}(z,w)$ とおく.

ここで $(z,w)\in \mathfrak{D}_{1,m}$, $g\in G_\infty$ で,

$\theta(z,g;\mu) = y^{\frac{m+2}{2}} \sum_{\mathfrak{z}\in L} f_z(g^{-1}(\mathfrak{z}+\mu))$,

π は. V の元の V_0 -成分を対応させる mapping.

Oda [11] の主結果は. 次のように言い直される.

<u>Theorem (Oda)</u> $k > 2m+4$ とする.

(i) $f\in \mathfrak{S}_{S,k}(\Gamma)$ のとき,

$\iota f(g) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{D}} \overline{\theta(Z,g)}\, f(Z)\, y^{k-2} dx\,dy\,du\,dv$

$(Z = (x+iy,\ u(x+iy)+v))$

$\in S_k(\Gamma^*)$.

逆に, $F\in S_k(\Gamma^*)$ のとき,

$\rho F(Z) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{\Gamma^*\backslash G_\infty} \theta(Z,g)\, F(g)\, dg \quad \in \mathfrak{S}_{S,k}(\Gamma)$.

(ii) $\rho F(z,w)$ は (up to non-zero constant で)

$$\sum_{\substack{\mathfrak{z}\in L^*/\Gamma^* \\ Q[\mathfrak{z}]>0}} \theta_{\pi(\mathfrak{z})}(Z)\, \mathbf{e}[\tfrac{1}{2}Q[\mathfrak{z}]z] \int_{\Gamma^*_{\mathfrak{z}}\backslash X_{\mathfrak{z}}} F(x)\, Q(\tilde{x},\mathfrak{z})^{k-(m+2)}\, \omega(x)$$

と Fourier 展開される. ここで、$X_{\mathfrak{z}} = G_{\mathfrak{z}}/G_{\mathfrak{z}}\cap U_\infty \hookrightarrow \mathfrak{D}$,

ω は $\mathfrak{D}$ 上の holomorphic $(m+2)$ form の $X_{\mathfrak{z}}$ への引き戻し, $U_\infty = \{g\in G_\infty \mid g\langle \mathfrak{z}_0\rangle = \mathfrak{z}_0\}$.

(iii) $\iota f(\mathfrak{z})$ $(\mathfrak{z}\in\mathfrak{D}^+)$ は (up to non-zero constant で)

$$\sum_{\substack{\nu=\begin{pmatrix} m\\ \alpha\\ n\end{pmatrix}\in L_1^* \\ \sqrt{-1}\nu\in\mathfrak{D}^+}} \left\{ \sum_{\substack{r>0\\ r^{-1}\nu\in L_1^*}} r^{k-1} a_f(mn/r^2, \alpha r^{-1}) \right\} e[Q_1(\nu,\mathfrak{z})]$$

と Fourier 展開される。

Remark ・ (i) の定義より、ρ と ι は、Petersson 内積に関し、互いに他の adjoint になっている。

・ (iii) より特に、(original version とは異なり) ι は injective となっている。

・ もうひとつの maximal parabolic subgroup による部分 Fourier 係数は、記号の違いを除き、$\mathfrak{S}_{s,k}(\Gamma)$ の元である。直接 (iii) が $S_k(\Gamma^*)$ に属することを示すこともできる。(cf. [08], [16])

2-2 Maass space

: 2次 Siegel の場合にならい、$S_k(\Gamma^*)$ の Maass space $S_k(\Gamma^*)^{(M)}$ を、

$$S_k(\Gamma^*)^{(M)}=\left\{F\in S_k(\Gamma^*) \;\middle|\; a_F\begin{pmatrix} m\\ \alpha\\ n\end{pmatrix} = \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ r^{-1}m,\, r^{-1}n\in\mathbb{Z},\, \alpha r^{-1}\in L_0^*}} r^{k-1} a_F\begin{pmatrix} mn/r^2\\ \alpha r^{-1}\\ 1\end{pmatrix} \right\}$$

で定義する (original case [08], SU(2,2) case [06] [03] [17])。

また、形式的にはこれより大きい空間 $S_k(\Gamma^*)^{(F)}$ を、

$$S_k(\Gamma^*)^{(F)}=\left\{F\in S_k(\Gamma^*) \;\middle|\; a_F\left(l\cdot\begin{pmatrix} m\\ \alpha\\ n\end{pmatrix}\right)=a_F\left(l\cdot\begin{pmatrix} mn\\ \alpha\\ 1\end{pmatrix}\right) \quad \forall\begin{pmatrix} m\\ \alpha\\ n\end{pmatrix}:\text{primitive}\right\}$$

と定義。$S_k(\Gamma)^{(M)}=S_k(\Gamma^*)^{(M)}\cap S_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma)^{(F)}=S_k(\Gamma^*)^{(F)}\cap S_k(\Gamma)$.

<u>Proposition</u>　$k > 2m+4$ とする．

$$\begin{array}{ccc} S_k(\Gamma^*)^{(M)} & \xleftarrow[\iota]{\cong} & \mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\Gamma}) \\ \cup & & \cup \\ S_k(\Gamma)^{(M)} & \cong & \mathfrak{S}^+_{S,k}(\underline{\Gamma}) = \{ f \in \mathfrak{S}_{S,k}(\underline{\Gamma}) \mid f * \phi_{0,p} = f \quad \forall p \} \end{array}.$$

§3. 直交群のL関数

この節では，$S_k(\Gamma)$ のL関数を定義するとともに，Eisenstein級数を使った積分表示を与える．特に $S_k(\Gamma)^{(F)}$ の元に対しては，L関数の関数等式を求める．

3－1 *local* L関数の定義 ：　$G_p = G_{\mathbb{Q}_p} \supset U_p = G_{\mathbb{Z}_p}$

G_p と U_p の組で決まるHecke環 $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}(G_p, U_p)$ について Satake同型（[13]）が成立する．

$$\Phi : \mathcal{H}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[X_1^{\pm}, \cdots, X_{\nu_p+2}^{\pm}]^W$$

（ここで，ν_p は，§1 で述べた S の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index，
W は，Weyl群．）

$\lambda_p \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_p, \mathbb{C})$ に対し，その *local* L関数を定義する．

$$L_p(\lambda_p; s) \underset{\mathrm{def}}{=} \lambda_p\left(\Phi^{-1}\left(\prod_{j=1}^{\nu_p+2}(1-X_j p^{-s})(1-X_j^{-1}p^{-s})\right)\right)^{-1}$$

$$\times \begin{cases} 1 & \text{if } (n_{0,p}, \partial_p) = (0,0),\ (1,0) \\ (1-p^{-2s})^{-1} & = (2,0) \\ (1-p^{-s})^{-1} & = (2,1) \\ (1-p^{-s})^{-1}(1+p^{1-s}) & = (2,2) \\ (1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-1-s})^{-1} & = (4,2) \\ (1+p^{-\frac{1}{2}-s}) & = (1,1) \\ (1-p^{-\frac{1}{2}-s})^{-1} & = (3,1) \\ (1-p^{-\frac{1}{2}-s})^{-1}(1+p^{\frac{1}{2}-s}) & = (3,2) \end{cases}$$

ここで、$n_{o,p}$, ∂_p は§1で定義したもの．

Remark　$\partial_p \neq 0$ なる有限個の p については，[15] で与えた定義と少し異なる場合がある（λ_p によらぬ違い）。

3-2　local Whittaker 関数

$\xi \in V_{1,p}$ に対し、

$$\mathcal{W}_\xi \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ W : G_p \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} W(n(X)(1,h)gu) = \chi_p(Q_1(\xi, X))\, W(g) \\ \forall X \in V_{1,p},\ \forall g \in G_p,\ \forall u \in U_p,\ \forall h \in H(\xi)_p \cap U_p \end{array} \right\}$$

とおく．但し，$n(X) = \begin{pmatrix} 1 & -{}^tX Q_1 & -\frac{1}{2}Q_1[X] \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$t \in \mathbb{Q}_p^\times$, $h \in O(Q_1)_p$ に対し，$(t,h) = \begin{pmatrix} t & & \\ & h & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix}$ とおいた．また，$H(\xi)$ は ξ を固定する $O(Q_1)$ の元全体。

$\xi = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \in L_{1,p}^*$，$Q_1[\xi] \neq 0$ とする．任意の $X \in V_{1,p}$ に対し、$(p^{-1},1)\,n(X)\,\xi \notin L_{1,p}^*$ のとき、ξ を（p で）reduced ということにする。以下これを仮定し，§2で定義した $S_k(\Gamma)^{(M)}$, $S_k(\Gamma)^{(F)}$ の local version にあたるものを導入しておく。

$$\mathcal{W}_\xi^{(F)} \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ W \in \mathcal{W}_\xi \mid W((1,h)g) = W(g) \quad \forall h \in H(\xi) \right\}$$

$$\mathcal{W}_\xi^{(M)} \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ W \in \mathcal{W}_\xi^{(F)} \;\middle|\; \begin{array}{l} W((p^{n+l}, M_n)) - W((p^{n+l}, M_{n+1})) \\ = p^{-l}\, W((p^n, M_n)) \qquad \forall n, l \geq 0 \end{array} \right\}$$

但し　$M_n = \begin{pmatrix} p^{-n} & & \\ & 1 & \\ & & p^n \end{pmatrix}$

これらは全て $\mathcal{H}_p$-stable である。

Theorem 2　$W \in \mathcal{W}_\xi$，$\phi' * W * \phi = \lambda'_p(\phi')\,\lambda_p(\phi)\, W$ for $\forall \phi \in \mathcal{H}_p$, $\forall \phi' \in \mathcal{H}(H(\xi)_p, H(\xi)_p \cap U_p)$ とする。このとき、

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} W((t,1))\,|t|_p^{s-\frac{m+2}{2}}\,d^\times t$$
$$= L_p(\lambda_p\,;s)\cdot L_p(\lambda_p'\,;s+\tfrac{1}{2})^{-1}\times\begin{Bmatrix} 1 & m=\text{奇} \\ (1-p^{-2s})^{-1} & m=\text{偶}\end{Bmatrix}\times W(1)\ .$$

3-3 $O(1,m+2)$ 上の Eisenstein 級数 ： $\xi=\begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ 1\end{pmatrix}\in L_1^*$, $Q_1[\xi]>0$ とする。ξ は全ての p で reduced としよう。

$$\underline{\underline{S}}=\begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t(S\alpha) & a\end{pmatrix}\ ,\qquad Q'=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & -2\underline{\underline{S}} & \\ 1 & & \end{pmatrix}\qquad \text{とおく。}$$

G' を Q' の直交群、P' を G' の上三角 parabolic subgroup とする。$H(\xi)$ を $O(\underline{\underline{S}})$ と同一視しておく。

$$f:\ H(\xi)_{\mathbb{Q}}\backslash H(\xi)_{\mathbb{A}}/H(\xi)_\infty \prod_p (H(\xi)_p\cap U_p)\longrightarrow \mathbb{C}$$

が、$\bigotimes_p \mathcal{H}(H(\xi)_p, H(\xi)_p\cap U_p)$ の同時固有関数：$f*\phi'=\lambda'(\phi')f$ だとしよう。Eisenstein 級数を、

$$E(g,s;f)\underset{\mathrm{def}}{=}\sum_{\gamma\in P'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_{\mathbb{Q}}} f(\beta(\gamma g))\,|\alpha(\gamma g)|_{\mathbb{A}}^{s+\frac{m+1}{2}}\qquad \text{で定義。}$$

ここで、$G'_{\mathbb{A}}\ni g$ を、$g=\begin{pmatrix}\alpha(g) & * & * \\ 0 & \beta(g) & * \\ 0 & 0 & \alpha(g)^{-1}\end{pmatrix}\prod_v u_v$ と

岩沢分解した。

Eisenstein 級数の一般論より（cf. [02], [04], [05], [07]）$E(g,s;f)$ は全 s-平面に解析接続され、関数等式

$$E(g,s;f)=\frac{\xi(f\,;s)}{\xi(f\,;s+1)}\,\mu(s)\times\begin{Bmatrix} 1 & m+1=\text{偶} \\ \dfrac{\xi(2s)}{\xi(2s+1)} & m+1=\text{奇}\end{Bmatrix}$$
$$\times E(g,-s\,;f)\qquad \text{をみたす。}$$

ここで，$\mu(s)$ は、$\mu(s)\mu(-s)=1$ をみたす（具体的にわかる）s の有理式であり、

$$\xi(f;s) = \prod_p L_p(\lambda'_p;s) \times \left\{ \begin{array}{ll} (2\pi)^{-ns}(2^{-1}\det 2\underline{\underline{S}})^{s/2} & m=\text{奇} \\ (2\pi)^{-ns}(\det 2\underline{\underline{S}})^{s/2} & m=\text{偶} \end{array} \right\}$$

$$n=\left[\tfrac{m+1}{2}\right] \qquad \times \left\{ \begin{array}{ll} \prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(s-n+\tfrac{1}{2}+2j) & m=\text{奇} \\ \prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(s-n+1+2j)\prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(s+2j) & m=\text{偶},\ n=\text{偶} \\ \prod_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(s-n+1+2j)\prod_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\Gamma(s+2j+1) & m=\text{偶},\ n=\text{奇} \end{array} \right.$$

$\underline{3-4}$ $S_k(\Gamma)$ のL関数： $G_A = G_Q G_\infty \prod_p U_p^*$

（$U_p^* = \{u\in U_p \mid (u-1)L^* \subset L\}$）が成立するから、$S_k(\Gamma)$，$S_k(\Gamma^*)$ とも G_A 上の関数とみなしてよい。今、$F\in S_k(\Gamma)$ が、$\otimes_p \mathcal{H}_p$ の同時固有関数としよう。F のL関数を次のように定義する。$\nu=\left[\frac{m}{2}\right]$，

$$\xi(F;s) \underset{\mathrm{def}}{=} (2\pi)^{-(\nu+2)s} \left\{ \begin{array}{ll} (2^{-1}\det 2S)^{s/2} & m=\text{奇} \\ (\det 2S)^{s/2} & m=\text{偶} \end{array} \right\}$$

$$\times\Gamma(s+k-\tfrac{m}{2}-1)\Gamma(s+\tfrac{m}{2}) \left\{ \begin{array}{ll} \prod_{j=0}^{\nu}\Gamma(s-\tfrac{1}{2}-\nu+2j) & m=\text{奇} \\ \prod_{j=1}^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(s-\nu+2j)\prod_{j=1}^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(s+2j-1) & m=\text{偶},\ \nu=\text{偶} \\ \prod_{j=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\Gamma(s-\nu+2j)\prod_{j=0}^{\frac{\nu-1}{2}}\Gamma(s+2j) & m=\text{偶},\ \nu=\text{奇} \end{array} \right\}$$

$$\times \prod_p L_p(\lambda_F;s)$$

各 $\xi\in V_{1,Q}$ に対し、

$$F_\xi(g) = \int_{V_{1,Q}\backslash V_{1,A}} F(n(x)g)\,\chi(-Q_1(\xi,x))\,dx$$

とおく。今 ξ が全ての p で reduced だとし、f を前項のよう

にとる。さらに、

$$W_{F,\xi,f}(g) = \int_{H(\xi)_{\mathbb{Q}}\backslash H(\xi)_{A}} F_{\xi}((1,h)g)\, f(h)\, dh$$ とおく。

<u>Theorem 3</u>　以上の状況で、次式が成立する。

$$\int_{G'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_{A}} E^*(g', s-\tfrac{1}{2}; f)\, F(g'g_0)\, dg'$$

$$= c\cdot \lambda^*(s)^{-1}\, \xi(F; s)\, W_{F,\xi,f}(g_0)$$

ここで，c は non-zero constant，$g_0 \in G^{\circ}_{\infty}$ は ξ に依存する元，$\lambda^*(s)$ は、具体的にわかる s の多項式，そして

$$E^*(g'; s; f) = \xi(f; s+1) \begin{Bmatrix} \zeta(2s+1) & m = 偶 \\ 1 & m = 奇 \end{Bmatrix} E(g', s; f).$$

<u>Remark</u>　E^* の解析的性質より、$W_{F,\xi,f}(g_0) \neq 0$ なる条件下で、$\xi(F; s)$ の解析接続が言えたことになる。しかし、関数等式については、$\xi(f; s)$ のそれが障害となり、一般には難しい。

<u>Corollary</u>　$F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$ が Hecke eigen とする。このとき、$\xi(F; s)$ は全 s-平面に解析接続され、関数等式

$$\xi(F; s) = \begin{Bmatrix} -1 & \text{if } m \equiv 5, 7 \ (8) \\ 1 & \text{otherwise} \end{Bmatrix} \xi(F; 1-s)$$

をみたす。possible pole は，$s = -\frac{m}{2} + j \quad (0 \leq j \leq m+1)$ のみであり、そのうち最大のもの $\frac{m}{2}+1$ では高々 simple である。

§4. Maass space のL関数

この節では、§1 でみたJacobi形式がHecke eigenのとき、Oda liftingで持ち上げたものが再びHecke eigenとなること及びその関係を求める。応用としてMaass spaceについて、前節Corollaryより詳しい情報が得られる。最後に、$S_k(\Gamma)^{(F)}$ に於けるMaass spaceの特徴付けを行う。

Theorem 4　$k > 2m+4$ とする（$\nu = [\frac{m}{2}]$）。

$f \in \mathfrak{S}^+_{S,k}(\Gamma)$ が $\otimes_p \mathcal{H}'_{S,p}$ - eigen ならば、ιf は $\otimes_p \mathcal{H}_p$ - eigen であり、次式が成立する。

$$\zeta(\iota f\,;s) = c\cdot\zeta(f\,;s) \times \begin{cases} \prod_{j=0}^{\nu} \zeta(s+\frac{1}{2}+j)\,\zeta(s-\frac{1}{2}-j) \prod_{j=0}^{2\nu}(s-\frac{1}{2}-\nu+j) & m=\text{奇} \\ \prod_{j=0}^{2\nu} \zeta(s-\nu+j) \prod_{j=0}^{2\nu-1}(s-\nu+j) & m=\text{偶}. \end{cases}$$

（cf. $Sp(2,\mathbb{R})$ … [01], $SU(2,2)$ … [03]）

Corollary　上と同じ状況に於て、$\zeta(\iota f\,;s)$ は、$m \not\equiv 6\ (8)$ ならば高々simple poleをもつのみであり、$m \equiv 6\ (8)$ の場合は、$s=0,1$ で高々2位である他ではsimple poleのみである。

さて、$E^*(g', s\,;1)$ の $s = \frac{m+1}{2}$ での留数が定数となること及び、ι の adjoint map ρ の表示（Theorem Oda (iii)）を使えば、Oda [12] と平行な議論によって次の定理が証明される。

<u>Theorem 5</u>　$k > 2m+4$, $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$ とする.

$F \in S_k(\Gamma)^{(M)} \iff \zeta(F;s)$ が $s = \frac{m+2}{2}$ で simple pole をもつ.

<u>Remark</u>　$Sp(2,\mathbb{R}) \sim SO(2,3)$ (cf. [12]), $SU(2,2) \sim SO(2,4)$ (cf. [16]) の場合の例から考えると、上の定理は $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$ の仮定をなくしても成立することが期待される。

References

[01] A. N. Andrianov : Modular descent and Saito-Kurokawa conjecture , Inv. Math. 53 (1979), 267-280.

[02] J. Arthur : Eisenstein series and the trace formula , Proc. Symp. Pure Math. vol.33 (1979), part 1, 253-274.

[03] V. Gricenko : Maass space for SU(2,2), Hecke algebra and zeta function, in Russian, (preprint).

[04] Harish-chandra : Automorphic forms on semi-simple Lie groups , Lecture Note in Math. 62, Springer, 1968.

[05] V. L. Kalinin : Eisenstein series on the symplectic group, Math. USSR-Sb. 32 (1977), 449-476.

[06] H. Kojima : An arithmetic of hermitian modular forms of degree two , Invent. Math. 69 (1982), 217-227.

[07] R. P. Langlands : On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lecture Note in Math. 544, Springer,1976.

[08] H. Maass : Über eine Spizialschar von Modulformen zweiten Grades, I, II, III, Invent. Math. 52 (1979), 95–104, 53 (1979), 249–253, 53 (1979), 255–265.

[09] A. Murase : Jacobi formsに付随するL函数について, 数理解析研究所講究録 583.

[10] A. Murase : L-functions attached to Jacobi forms of degree n (preprint).

[11] T. Oda : On modualr forms associated with indefinite quadratic forms of signature (2,n-2) , Math. Ann. 231 (1977), 97–144.

[12] T. Oda : On the poles of Andrianov L-functions , Math. Ann. 256 (1981), 323–340.

[13] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields , Inst.Hautes Études Sci. Publ. Math. 18 (1963).

[14] Shintani : unpublished notes.

[15] T. Sugano : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on SO(2,q) , Advanced Studies in Pure Math. vol. 7, Kinokuniya, 1985, 333–362.

[16] T. Sugano: 符号（2，2）のユニタリ群のL関数について，数理解析研究所講究録 583.

[17] T. Sugano : On the L-functions associated with hermitian modular forms of genus 2 (preprint).