数理解析研究所講究録
第617巻 1987年 130-139

Dirichlet series associated with wave forms on GL(2,H)

東工大・理学部　高瀬幸一 (Koichi Takase)

§1. wave form.

1-1. B を $\mathbb{Q}$ 上の定符号四元数環として，その判別式を $D(B)=d(B)^2$，極大整環 $\mathcal{O}\subset B$ を一つ固定する。$B_p=B\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p$ $(p\leq\infty)$ とおく。G は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で，$G_{\mathbb{Q}}=GL(2,B)$ とする。G の $\mathbb{Q}$ 上のアデール化を $G_A=\prod'_{p\leq\infty}G_p$ とおく（$G_p=G_{\mathbb{Q}_p}=GL(2,B_p)$）。

$$K_p=\begin{cases}\{g\in G_\infty \mid g^*g=1\} & : p=\infty \quad \left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\bar a&\bar c\\ \bar b&\bar d\end{pmatrix}\right)\\ GL(2,\mathcal{O}_p) & : p<\infty \quad (\mathcal{O}_p=\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p\subset B_p)\end{cases}$$

として，$K=\prod_{p\leq\infty}K_p\subset G_A$ とおく。K_∞ は G_∞ の極大コンパクト部分群であり，$p<\infty$ に対して，K_p は G_p の極大開コンパクト部分群である。

1-2. $GL(2,B)$ 上の wave form の空間 $\mathcal{A}(\omega,\rho)$ を次の様に定義する；

<u>定義</u>　ユニタリ指標 $\omega\in\widehat{\mathbb{Q}_A^\times/\mathbb{Q}^\times}$ と $\rho\in\mathbb{C}$ に対して，G_A から $\mathbb{C}$ への連続関数 φ で，次の条件 1)～3) を充すもの全体を $\mathcal{A}(\omega,\rho)$ とする；

1) ${}^{\forall}z \in \mathbb{Q}_A^{\times}$, ${}^{\forall}\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$, ${}^{\forall}k \in K$ に対して, $\Phi(z\gamma g k) = \omega(z)\cdot\Phi(g)$,

2) G_∞ 上の関数としては実解析的で, 実 Lie 群 $SL(2, B_\infty)$ の Casimir operator D に対して, $D\cdot\Phi = \frac{1}{8}\cdot(\rho^2-4)\cdot\Phi$,

3) ${}^{\forall}M \subset G_A$: compact subset に対して, $c>0$, $r\geq 0$ があって, ${}^{\forall}g \in M$, ${}^{\forall}y \in \mathbb{Q}_A^{\times}$ に対して, $\left|\Phi\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot g\right)\right| \leqq c\cdot \mathrm{Max}\{|y|_A^{r}, |y|_A^{-r}\}$.

上の定義で, $A(\omega,\rho)\neq 0$ とすると, $\mathbb{Q}_A^{\times}$ の idele norm $|\cdot|_A$ に対して, $\omega = |\cdot|_A^{\sigma}$ ($\sigma \in \sqrt{-1}\cdot\mathbb{R}$) となるから, $\Phi \in A(1,\rho)$ に対して

$$\tilde{\Phi}(g) = |N(g)|_A^{\sigma/4}\cdot\Phi(g) \qquad (N: M(2,B) \text{ の reduced norm})$$

とおくと, $\mathbb{C}$ 上の線形同型 $A(1,\rho) \ni \Phi \mapsto \tilde{\Phi} \in A(\omega,\rho)$ を得る。

注意　B_∞ の $\mathbb{R}$-base $\{1, i, j, k\}$ ($i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$) を取って $x = x_1 + x_2\cdot i + x_3\cdot j + x_4\cdot k \in B_\infty$ ($x_j \in \mathbb{R}$) とおくと, Casimir operator D の作用は次の様になる; G_∞/K_∞ 上の C^∞-関数 φ に対して,

$$F(x,y) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y}\end{pmatrix}\right) \quad \text{for } x \in B_\infty,\ 0<y\in\mathbb{R}$$

とおくと,

$$(D\cdot\varphi)\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y}\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8}\left\{y^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 3\cdot y\cdot\frac{\partial}{\partial y} + y^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right)\right\}F.$$

ここで, $SL(2,B_\infty)$ の岩沢分解

$$SL(2, B_\infty) = N\cdot A\cdot K_1 \qquad N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| x \in B_\infty\right\},\ A = \left\{\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y}\end{pmatrix} \middle| 0<y\in\mathbb{R}\right\}$$

$$K_1 = K_\infty \cap SL(2, B_\infty)$$

に注意する。

1-3. $t\in B_\infty$ に対して，G_∞ から $\mathbb{C}$ への実解析的関数 W で，次の条件 1)～4) を充すもの全体を $W_t(p)$ と書く；

1) ${}^\forall z\in \mathbb{Q}_\infty^\times$，${}^\forall k\in K_\infty$ に対して，$W(z\cdot g\cdot k)=W(g)$，

2) $D\cdot W=\frac{1}{8}\cdot(p^2-4)\cdot W$，

3) ${}^\forall x\in B_\infty$ に対して，$W(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\cdot g)=\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,tr(\bar{t}x))\cdot W(g)$ （tr : B の reduced trace），

4) ${}^\forall M\subset G_\infty$: compact subset に対して，$c>0$, $r\geq 0$ があって，${}^\forall g\in M$，${}^\forall y\in\mathbb{Q}_\infty^\times$ に対して，$\left|W(\begin{pmatrix}y&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot g)\right|\leq c\cdot\mathrm{Max}\{|y|^r,|y|^{-r}\}$。

すると，

$$\dim_{\mathbb{C}} W_t(p)=\begin{cases}1 & : t\neq 0\\ 2 & : t=0\end{cases}$$

で，$t\neq 0$ ならば，modified Bessel function

$$K_p(z)=\int_0^\infty e^{-z\cdot\cosh t}\cdot\cosh(pt)\,dt \qquad \text{for } \mathrm{Re}\, z>0$$

を用いて，

$$W_t(p)=\langle W_{p,t}\rangle_{\mathbb{C}} \qquad W_{p,t}\begin{pmatrix}y&0\\0&1\end{pmatrix}=K_p(4\pi\cdot|t|\cdot y)\cdot(4\pi\cdot|t|\cdot y)^2 \quad \begin{pmatrix}0<y\in\mathbb{R}\\ |t|=N(t)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

又，$t=0$ ならば，

$$W_t(p)=\langle W_p^{(1)},W_p^{(2)}\rangle_{\mathbb{C}} \quad \begin{cases}W_p^{(1)}\begin{pmatrix}y&0\\0&1\end{pmatrix}=y^{2+p}\\ W_p^{(2)}\begin{pmatrix}y&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{cases}y^{2-p} & : p\neq 0\\ y^2\cdot\log y & : p=0\end{cases}\end{cases} \quad (0<y\in\mathbb{R})$$

となる。

さて，$\Phi\in A(1,P)$ に対して，Fourier 展開

$$\Phi(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\cdot g)=\sum_{t\in B}\Phi_t(g)\cdot\Lambda(tr(\bar{t}x)) \quad \text{for } x\in B_A,\ g\in G_A$$

を考える。ここで，Λ は $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$ のユニタリ指標で $\Lambda_\infty(x)=\exp(-2\pi\sqrt{-1}x)$ なるものとし，tr は B の reduced trace とする。$\forall t\in B$ に対して，Φ_t は G_∞ 上の関数としては $W_t(p)$ の元だから，$t\neq 0$ のときは

$$\Phi_t(g)=C_t(\Phi,g_f)\cdot W_{p,t}(g_\infty)\quad \text{for } g\in G_A$$

として，$t=0$ のときは

$$\Phi_0\left(\begin{pmatrix} y&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\right)=C_0^{(1)}\left(\Phi,\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\right)\cdot W_p^{(1)}\begin{pmatrix}|y|_A&0\\0&1\end{pmatrix}+C_0^{(2)}\left(\Phi,\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\right)\cdot W_p^{(2)}\begin{pmatrix}|y|_A&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{for } y\in\mathbb{Q}_A^\times,\ \alpha,\beta\in B_f^\times\subset B_A^\times:\text{finite part}$$

とおく。

1-4. $p<\infty$ に対して，G_p から $\mathbb{C}$ への両側 K_p-不変，support compact なる連続関数の全体 $\mathcal{L}(G_p,K_p)$ は，convolution $\varphi*\psi(g)=\int_{G_p}\varphi(x)\cdot\psi(x^{-1}g)\,d_px$ により，単位元をもつ可換な $\mathbb{C}$-algebra となる（d_px は G_p 上の Haar measure で $\int_{K_p}d_px=1$ とする）。$\mathcal{L}(G_p,K_p)$ の $\mathbb{C}$-algebra としての構造は良くわかっている（c.f. Satake [2]）；$p\mid D(B)$ ならば，prime element $\pi_p\in B_p$ を一つ固定したとき，double coset $K_p\cdot\begin{pmatrix}\pi_p&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot K_p$ (resp. $K_p\cdot\begin{pmatrix}\pi_p&0\\0&\pi_p\end{pmatrix}\cdot K_p$) の G_p 内での特性関数を $\zeta_p^{(1)}$ (resp. $\zeta_p^{(2)}$) とすると，

$$\mathcal{L}(G_p,K_p)=\mathbb{C}[\zeta_p^{(1)},\zeta_p^{(2)\pm1}].$$

又，$p\nmid D(B)$ のときは，$B_p=M(2,\mathbb{Q}_p)$ と同一視したときに，$O_p=M(2,\mathbb{Z}_p)$ となる様にできて，$G_p=GL(4,\mathbb{Q}_p)$, $K_p=GL(4,\mathbb{Z}_p)$ と同一視したとき，double coset $K_p\cdot\mathrm{diagonal}(\underbrace{p,\cdots,p}_{k\text{コ}},1,\cdots,1)\cdot K_p$ の G_p 内での特性関数を $\zeta_p^{(k)}$ とすると，

$$\mathcal{L}(G_p,K_p)=\mathbb{C}[\zeta_p^{(1)},\zeta_p^{(2)},\zeta_p^{(3)},\zeta_p^{(4)\pm1}]$$

となる。

$\mathcal{L}(G_p, K_p)$ は、$\mathcal{A}(1, p)$ 上に

$$\psi \cdot \Phi(g) = \int_{G_p} \Phi(g \cdot x) \cdot \psi(x) \, d_p x \quad \text{for } \psi \in \mathcal{L}(G_p, K_p),\ \Phi \in \mathcal{A}(1, p)$$

により作用する。よって、制限テンソル積 $\mathcal{L}(G, K) = \bigotimes'_{p<\infty} \mathcal{L}(G_p, K_p)$ が $\mathcal{A}(1, p)$ 上に作用する。

§2. Mellin 変換

2-1. $B_A^\times$ の finite part を $B_f^\times$ として、$O_f^\times = \prod_{p<\infty} O_p^\times \subset B_f^\times$ とおくと、$B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times$ は有限集合であるが、$\Phi \in \mathcal{A}(1, p)$ と連続関数 $\varphi : (B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times)^2 \to \mathbb{C}$ に対して、

$$L(\Phi, \varphi; s) = \sum_{t \in B^\times} \sum_{\alpha, \beta \in B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times} C_t\left(\Phi, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi(\alpha, \beta) \cdot |N(\alpha t \beta^{-1})|_f^s$$

$$Z(\Phi, \varphi; s) = \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + 1 + \frac{p}{2}\right) \cdot \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + 1 - \frac{p}{2}\right) \cdot L(\Phi, \varphi; s)$$

とおく。ここで、N は B の reduced norm、$|\cdot|_f$ は $\mathbb{Q}_A^\times$ の idele norm の finite part、$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{1-s} \cdot \Gamma(s)$ とおく。すると、

$$Z(\Phi, \varphi; s) = \sum_{\alpha, \beta \in B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times} |N(\alpha \beta^{-1})|_f^s \cdot \varphi(\alpha, \beta) \cdot \int_{\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{Q}_A^\times} (\Phi - \Phi_0)\begin{pmatrix} y\alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot |y|_A^{2s} \, d^\times y$$

と書けて、Φ の保型性

$$\Phi\begin{pmatrix} y\alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \Phi\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & y\alpha \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} y^{-1}\beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{for } y \in \mathbb{Q}_A^\times,\ \alpha, \beta \in B_f^\times$$

から、Mellin 変換の方法により、次の定理を得る；

<u>定理 1</u> 1) $Z(\Phi, \varphi; s)$ は全 s-平面に有理形に解析接続され，関数等式 $Z(\Phi, \varphi; s) = Z(\Phi, \check{\varphi}; -s)$ をもつ。ここで $\check{\varphi}(x, y) = \varphi(y, x)$。

2) $$Z(\Phi, \varphi; s) + \zeta_0^{(1)}(\Phi, \varphi)\cdot(2s+2+\rho)^{-1} - \zeta_0^{(1)}(\Phi, \check{\varphi})\cdot(2s-2-\rho)^{-1}$$
$$+\begin{cases} \zeta_0^{(2)}(\Phi, \varphi)\cdot(2s+2-\rho)^{-1} - \zeta_0^{(2)}(\Phi, \check{\varphi})\cdot(2s-2+\rho)^{-1} & : \rho \neq 0 \\ -\zeta_0^{(2)}(\Phi, \varphi)\cdot(2s+2)^{-2} - \zeta_0^{(2)}(\Phi, \check{\varphi})\cdot(2s-2)^{-2} & : \rho = 0 \end{cases}$$

は全 s-平面で正則である。ここで
$$\zeta_0^{(j)}(\Phi, \varphi) = \sum_{\alpha, \beta \in B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times} \zeta_0^{(j)}\left(\Phi, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right)\cdot \varphi(\alpha, \beta) \qquad (j = 1, 2)\text{。}$$

2-2. $\alpha \in B_f^\times$ に対して，$O_\ell(\alpha) = B \cap (B_\infty \times \alpha \cdot O_f \cdot \alpha^{-1})$ とおく。即ち，$\alpha = (\alpha_p)_{p<\infty} \in B_f^\times$ に対して，right O-ideal $(\alpha) \subset B$ が一意的に存在して，$(\alpha)\cdot O_p = \alpha_p \cdot O_p$ for $^\forall p < \infty$ となる。このとき $O_\ell(\alpha) = \{x \in B \mid x\cdot(\alpha) \subset (\alpha)\}$ である。ここで $O_\ell(\alpha)^\times$ は有限群だから，$\varepsilon(\alpha) = |O_\ell(\alpha)|^{-1}$ とおくと，ε は $B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times$ 上の関数となる。

$\Phi \in A(1, \rho)$ と連続関数 $\varphi : (B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times)^2 \to \mathbb{C}$ に対して，
$$\hat{\Phi}_\varphi\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \int_{B^\times \backslash B_f^\times} \Phi_1\begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\cdot \varphi(x \cdot y_f, x)\, d^\times x \quad \text{for } y \in B_A^\times$$

とおくと，
$$Z(\Phi, \varphi\cdot(\varepsilon \times \varepsilon); s) = \int_{B_A^\times} \hat{\Phi}_\varphi\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot |N(y)|_A^s\, d^\times y$$

と書けて，これを用いると，次の定理を得る；

<u>定理 2.</u> $\Phi \in \mathcal{A}(1,p)$ は Hecke eigen form で $\psi\cdot\Phi = \lambda(\psi)\cdot\Phi$ for ${}^\forall\psi \in \mathcal{L}(G,K)$ とする。このとき任意の連続関数 $\varphi : (B^\times\backslash B_f^\times/\mathcal{O}_f^\times)^2 \to \mathbb{C}$ に対して,

$$L(\Phi, \varphi\cdot(\xi\times\xi)\,;\,s) = \hat{\Phi}_\varphi\begin{pmatrix}\mathcal{D}&0\\0&1\end{pmatrix}\times d(B)^s\cdot\prod_{p<\infty}H_p(\lambda, p^{-(s+2)})^{-1}$$

となる。ここで

$$H_p(\lambda,T) = \begin{cases} 1-\lambda(\zeta_p^{(1)})\cdot T + p^2T^2 & : p\mid D(B) \\ 1-\lambda(\zeta_p^{(1)})\cdot T + \lambda(\zeta_p^{(2)})\cdot pT^2 - \lambda(\zeta_p^{(3)})\cdot p^3T^3 + p^6T^4 & : p\nmid D(B)\end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \prod_{p\mid D(B)}\pi_p^{-1} \in B_f^\times \quad (\pi_p\in B_p : \text{prime element for } p\mid D(B))$$

とおく。

<u>注意 1.</u> <u>定理 2</u> で, $p\nmid D(B)$ に対する $H_p(\lambda,T)$ は, $GL(2,B_p) = GL(4,\mathbb{Q}_p)$ の standard な Euler p-factor である (c.f. Satake [2]).

<u>注意 2.</u> simple algebra の乗法群上の保型形式 (保型表現) に附随する standard な Euler p-factor から定まる L-関数は, Godement-Jacquet [1] により扱われている。

§3. Rankin-Selberg の方法.

3-1. G' は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で

$$G'_\mathbb{Q} = \{g\in GL(2,B) \mid g^*\cdot J\cdot g = \nu(g)\cdot J,\ \nu(g)\in\mathbb{Q}^\times\} \quad \left(J = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$$

なるものとする。$P' = \left\{\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}\in G'\right\}$ は, G' の $\mathbb{Q}$ 上定義された minimal parabolic subgroup である。$\mathbb{Q}$ 上のアデール化 G'_A は G_A の内部分群で, $K' = K\cap G'_A$ とおく。$G'_A = P'_A\cdot K'$ となるから, $g\in G'_A$

に対して，$g=\begin{pmatrix}\alpha(g) & * \\ 0 & \delta(g)\end{pmatrix}\cdot k \quad (k\in K')$ とおくと，$\alpha(g)\cdot\delta(g)^{-1}\in\mathbb{Q}_A^\times$ となる。

Eisenstein series

$$E(g,s)=\sum_{\gamma\in P'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_{\mathbb{Q}}}|\alpha(\gamma g)\cdot\delta(\gamma g)^{-1}|_A^{s+\frac{3}{2}} \qquad (g\in G'_A,\ s\in\mathbb{C})$$

は $\mathrm{Re}\,s>\frac{3}{2}$ で絶対収束し，全 s-平面へ有理形に解析接続され，

$$G(g,s)=d(B)^s\cdot(1+2s)\cdot\prod_{p|D(B)}(1-p^{-(1+2s)})\cdot Z(1+2s)\cdot Z(\tfrac{3}{2}+s)\cdot E(g,s)$$

$$(Z(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot\Gamma(\tfrac{s}{2})\cdot\zeta(s))$$

とおくと，関数等式 $G(g,s)=G(g,-s)$ をもつ。

3-2. $\Phi\in A(1,\rho)$ は cuspidal (i.e. $\Phi_0=0$) であるとして，

$$Z_\infty^+=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\in G'_\infty \;\middle|\; 0<\alpha\in\mathbb{R}\right\}\subset G'_A$$

$$\tilde{\Phi}_1(g)=\int_{B^\times\backslash B_f^\times}\Phi_1\left(\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\cdot g\right)d^\times x \quad \text{for } g\in G_A$$

とおくと，

$$\int_{Z_\infty^+G'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_A}\Phi(g)\cdot E(g,s)\,dg=\int_{\mathbb{Q}_A^\times}\tilde{\Phi}_1\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot|y|_A^{s-\frac{3}{2}}\,d^\times y$$

となる。これを用いて，次の定理を得る；

<u>定理 3.</u> $\Phi\in A(1,\rho)$ は cuspidal Hecke eigen form として，$\psi\cdot\Phi=\lambda(\psi)\cdot\Phi$ for $^\forall\psi\in\mathcal{L}(G,K)$ とすると，

$$\int_{Z_\infty^+G'_{\mathbb{Q}}\backslash G'_A}\Phi(g)\cdot G(g,s)\,dg\times Z(s+\tfrac{1}{2})$$

$$=\tilde{c}_1(\Phi)\times d(B)^s\cdot\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\tfrac{3}{2})\cdot\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\tfrac{1}{2})\cdot\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\tfrac{1}{2}+\rho)\cdot\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\tfrac{1}{2}-\rho)\cdot\prod_{p<\infty}\tilde{H}_p(\lambda,p^{-(s+\frac{3}{2})})^{-1}$$

となる。ここで

$$\tilde{\zeta}_1(\Phi) = \int_{B^\times \backslash B_f^\times} \zeta_1(\Phi, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}) d^\times x$$

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{1-s} \cdot \Gamma(s), \quad \Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma(\tfrac{s}{2}), \quad Z(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s) \cdot \zeta(s).$$

又，Euler factor $\tilde{H}_p(\lambda, T)$ は次の様に定める；$p \mid D(B)$ のとき，

定理2 の Euler p-factor

$$H_p(\lambda, T) = 1 - \lambda(\zeta_p^{(1)})T + p^2 T^2 = (1-\alpha T)(1-\beta T)$$

に対して，

$$\tilde{H}_p(\lambda, T) = (1-\alpha^2 pT)(1-\alpha\beta pT)(1-\beta^2 pT)(1-p^2 T)$$

とおく。$p \nmid D(B)$ のときは，定理2 の Euler p-factor

$$H_p(\lambda, T) = 1 - \lambda(\zeta_p^{(1)})T + \lambda(\zeta_p^{(2)}) \cdot pT^2 - \lambda(\zeta_p^{(3)}) p^3 T^3 + p^6 T^4$$

$$= (1-\alpha_1 T)(1-\alpha_2 T)(1-\alpha_3 T)(1-\alpha_4 T)$$

に対して，$GL(4, \mathbb{C})$ の $V = \{X \in Mat(4, \mathbb{C}) \mid {}^tX = -X\}$ 上の表現 ρ を

$\rho(g) \cdot X = g \cdot X \cdot {}^tg$ により定めたとき，

$$\tilde{H}_p(\lambda, T) = \det(1 - \rho\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix} \cdot T)$$

とおく。

注意　定理3 において，$\tilde{\zeta}_1(\Phi) \neq 0$ とすると，$^\forall p \nmid D(B)$ に対して

$\lambda(\zeta_p^{(1)}) = \lambda(\zeta_p^{(3)})$ となる。これは Φ が old form であることを示している。即ち，Φ は $B^\times$ 上の保型形式からの lifting で，$p \nmid D(B)$ なる p-local 表現の対応は，L-group の対応 $Sym^3 : GL(2, \mathbb{C}) \to GL(4, \mathbb{C})$ に

附随するものと思われる。

一方、一般の（old form でない）$\Phi \in A(\Gamma, P)$ に対して<u>定理3</u>を意味あるものにするためには、$E(g, s)$ の代りに、P' の Levi part 上の保型形式でひねった Eisenstein series を用いればよい。

以上二点については、尚若干の考察を要する。

<u>References.</u>

[1] Godement,R. and Jacquet,H.: Zeta Functions of Simple Algebras. Lecture Notes in Math. 260 (1972) Springer-Verlag.

[2] Satake,I.: Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields. Inst.Hautes Etudes Sci. Publ.Math. 18 (1963) 5-69.