数理解析研究所講究録
第617巻 1987年 150-159

Hermite形式に対するSiegel級数について

近畿大理工　長岡昇勇（Shōyū Nagaoka）

F を totally real な algebraic number field（$\mathbb{Q}$ 上有限次）とし，K を F の totally imaginary quadratic extension とする．ρ を K の F 上の non-trivial automorphism とし．$\alpha \in M_m(K)$ に対して．$\alpha^* = {}^t\alpha^\rho$ とおく．$\mathbf{f}$ で F の non-archimedean primes の集合を表わし．∞ で F の archimedean primes の集合を表わすことにする．$v \in \mathbf{f} \cup \infty$ に対して F の v-completion を F_v とし，さらに $K_v = K \otimes_F F_v$ とおく．同じく $v \in \mathbf{f} \cup \infty$ に対して

$$G_v = \left\{ \alpha \in SL_{2m}(K_v) \;\middle|\; \alpha^* \eta \alpha = \eta \right\}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & -1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する．G_v の元 x を $x = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix}$，$a_x, b_x, \cdots \in M_m(K_v)$ と表わすことにする．

$$S=\{\alpha\in M_m(K)\mid \alpha^*=\alpha\}\quad,\quad S_v=S\otimes_F F_v$$

とおく．次に関数 χ_v を次の様に定義する．まず $\mathbf{e}(s)=e^{2\pi i s}$ for $s\in\mathbb{C}$ と略記することにする．有理素数 p を固定し．additive group $\mathbb{Q}_p$ 上の character $\mathbf{e}_p$ を．

$$\mathbf{e}_p(t)=\mathbf{e}(-t \text{ の fractional part})\quad\text{for } t\in\mathbb{Q}_p$$

で定義する．さらに．$v\in \mathbf{f}\cup\infty$ に対して additive group F_v 上の character $\mathbf{e}_v$ を

$$\mathbf{e}_v(t)=\begin{cases}\mathbf{e}_p(Tr_{F_v/\mathbb{Q}_p}(t)) & \text{for } t\in F_v \quad \text{if } v|p\\ \mathbf{e}(t) & \text{for } t\in F_v=\mathbb{R}\quad \text{if } v\in\infty\end{cases}$$

と定義する．そこで $x_v,\ y_v\in S_v$ に対して

$$\chi_v(x_v y_v)=\mathbf{e}_v(tr(x_v y_v))$$

によって χ_v を定義することにする．

$\mathfrak{r}$ を K の maximal order とし．$v\in\mathbf{f}$ に対して $\mathfrak{r}_v$ で $\mathfrak{r}$ の K_v 内の v-closure を表わすことにする．次に．S 内の lattice L を

$$L=S\cap M_m(\mathfrak{r})$$

で定義し，さらに $v \in \mathfrak{f}$ に対して S_v 内の lattice L_v を

$$L_v = S_v \cap M_m(\mathfrak{h}_v)$$

で定義しておく．それぞれの dual lattice を L', L'_v で表わす．

$$L' = \{ y \in S \mid tr(yL) \subset \mathfrak{d}^{-1} \}, \quad L'_v = \{ y \in S_v \mid tr(yL_v) \subset \mathfrak{d}_v^{-1} \}.$$

ここで，$\mathfrak{d}$ は F の $\mathbb{Q}$ 上の different $\mathfrak{d}_v$ は F_v の $\mathbb{Q}_p$ 上の different を表わす．

次に表題の Siegel 級数を定義していく．以下 $v \in \mathfrak{f}$ とする．（$v \in \infty$ の場合は超幾何関数が対応する．）まず S_v 上の function $\nu(x)$ を次の様に定義する．

$$G_v \supset P_v = \{ \alpha \in G_v \mid c_\alpha = 0 \}$$

$$C_v = G \cap GL_{2m}(\mathfrak{h}_v)$$

とおく．

そこで，$x \in S_v$ に対して $\tau(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_v$ とおき，

$$\tau(x)^* = yw, \quad y \in P_v, \quad w \in C_v$$

と分解する

このとき.

$$\nu(x) = |\det(dw)^{-1}|_v \quad , \ |\ |_v \text{ は } F_v \text{ の normalyzed valuation.}$$

と定義すると. この値は. 分解の仕方によらず一意に決まる. π_v を F_v の素元とし, $q_v = |\pi_v|_v^{-1}$ とおく. 任意の $h \in L'$ に対して, t を不定元にもつ formal power series $\alpha(v, h, t)$ が存在して

$$\alpha(v, h, q_v^{-s}) = \sum_{y \in S_v/L_v} \chi_v(-hy)\,\nu(y)^{-s}$$

とかける. この級数を Siegel 級数と呼ぶ. 前述の様に $v \in \infty$ の時に対応するものは. 一般化された超幾何関数であり. non-holomorphic Eisenstein series の Fourier 係数は. 本質的に上記のもので記述される.

<u>例.</u> $m = 1$ のとき. $0 \neq h \in \mathbb{Q}_p$ に対して

$$\alpha(p, h, p^{-s}) = \sum_{y = \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q}_p \bmod \mathbb{Z}_p} p^{-ns}\, e_p(-hy)$$

$$= (1 - p^{-s})(1 + p^{1-s} + p^{2(1-s)} + \cdots + p^{\tau(1-s)})$$

ただし $p^{\tau} \| h$.

問題として，

『Siegel 級数 $\alpha(v, h, t)$ の形を具体的に求めよ．』

が．考えられる．一般に $\alpha(v, h, t) \in \mathbb{Q}(t)$ はわかっている．さらに

<u>予想</u>（Shimura [S2]）

$v \in \mathfrak{f}$ は K で不分岐．r を h の rank．

F の prime $\mathbb{P}$ に対して $\theta = \theta(\mathbb{P}) = \left(\frac{K/F}{\mathbb{P}}\right)$ とおくと

$$\alpha(v, h, t) \text{ の分母} = \prod_{i=0}^{m-r-1} (1 - \theta^{m+i-1} q_v^{m+i} t)$$

とかける．

この予想は．P. Feit によって解かれている．（P. Feit: Poles and residues of Eisenstein series for symplectic and unitary groups．A.M.S. Memoirs 346）

quadratic form の場合にも同様の予想があるが．それは．Kitaoka によって解かれている．[Ki]

ここでの目標は．

$m = 2$，K は類数 1 の虚 2 次体，

なる条件のもとで $\alpha(v, h, t)$ の形を．具体的に決定することにある．

いくつかの記号を準備する.

d_K を. K の判別式 とすると.

$$L' = \{ h^* = h = (h_{ij}) \in M_2(K) \mid h_{ii} \in \mathbb{Z},\ \sqrt{d_K}\, h_{ij} \in \mathfrak{h} \}$$

(2次の semi-integral hermitian matrices の集合)

とかける.

$v = p$: 有理素数を固定する.

まず. $0 \neq h \in L'$ に対して

$$d_1 = \max\{ m \in \mathbb{Z} \mid m^{-1} h \in L' \} \qquad p^{\alpha} \parallel d_1$$

によって. integers d_1, α を定義する.

さらに. $\det(h) \neq 0$ なる $h \in L'$ に対して

$$d = \det(\sqrt{d_K}\, h) \quad , \quad d = p^a d_0 . \quad (p, d_0) = 1$$

として. integers d, d_0, a を定義する.

<u>定理 1</u>. $0 \neq h \in L'$ とし. χ_K を K の Kronecker 記号とする.

(1) $\det h \neq 0$ のとき.

$$\alpha(p, h, t) = (1-t)(1-\chi_K(p)\, p\, t)\, \beta_p(t)$$

ただし

$$\beta_p(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\alpha} p^{3l} t^{l} \sum_{m=0}^{a-2l} \chi_k(p)^m \; p^{2m} t^m & \text{if } \chi_k(p) \neq 0 \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\alpha} p^{3l} t^{l} \left(1 + \chi_k(d_0)\left(1 - \chi_k^2\left(\frac{d}{p^{2l}}\right)\right) p^{2(a-2l)} t^{a-2l} \right) & \\ & \text{if } \chi_k(p) = 0. \end{cases}$$

(2) $\det h = 0$ のとき.

$$\alpha(p, h, t) = (1-t)(1-\chi_k(p)pt)(1-\chi_k(p)p^2 t)\beta_p(t)$$

ただし. $\displaystyle\beta_p(t) = \sum_{l=0}^{\alpha} p^{3l} t^{l}$

注意. $h=0$: 2次の零行列 のとき.

$$\alpha(p, 0, t) = \frac{(1-t)(1-\chi_k(p)pt)}{(1-\chi_k(p)p^2 t)(1-p^3 t)}$$

を得る. しかし. これは. すでに [S2] で一般的式として得られている.

次に. Siegel 級数 $\alpha(p, h, p^{-s})$ に対して

$$\alpha(s, h) = \prod_{p:\text{prime}} \alpha(p, h, p^{-s})$$

とおくと. 前述の様に. non-holomorphic な Eisenstein

級数の Fourier 係数は、$\alpha(s, h)$ と超幾何関数で表示できる。

系. $0 \neq h \in L'$ に対して、$\alpha(s, h)$ は $\mathrm{Re}\, s > 4$ で holomorphic かつ、

$$\alpha(s, h) = \begin{cases} \zeta(s)^{-1} L(s-1, \chi_k)^{-1} f(s, h) & \text{if } \det h \neq 0 \\ \zeta(s)^{-1} L(s-1, \chi_k)^{-1} L(s-2, \chi_k)\, f(s, h) & \\ & \text{if } \det h = 0 \end{cases}$$

ここで、

$$f(s, h) = \begin{cases} \prod_{p \mid d} \beta_p(p^{-s}) & \text{if } \det h \neq 0 \\ \prod_{p \mid d_1} \beta_p(p^{-s}) & \text{if } \det h = 0 \end{cases}$$

さらに、$f(s, h)$ は $\mathbb{C}$ 全体に解析接続されて、

$$f(s, h) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(d)\, |d|^{2-s} f(4-s, h) & \text{if } \det h \neq 0 \\ d_1^{3-s} f(6-s, h) & \text{if } \det h = 0 \end{cases}$$

なる関数等式を満たす。

以上に述べた結果の応用を考える．$\mathbb{H}_n$ を．n 次の Hermite 上半空間とし，$\mathbb{H}_n$ の元 Z に対して

$$I(Z) = (2i)^{-1}(Z - {}^t\bar{Z})$$

とおく

そこで

$$\phi^{(2)}(Z, s) = \det(I(Z))^{\frac{s}{2}} \sum_{\{C, D\}} |\det(CZ+D)|^{-s}$$

$$(Z, s) \in \mathbb{H}_2 \times \mathbb{C}.$$

なる Dirichlet 級数を考える．そこで，[S 1] で研究された一般化された超幾何関数に関する結果と定理 1，系の結果を組合せれば．次の結果を得る．

<u>定理 2</u>　$\rho(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$，$\rho_{\chi_k}(s) = 2^s\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s+1}{2})L(s, \chi_k)$ とおく．($\zeta(s)$ は Riemann zeta 関数．$L(s, \chi)$ は character χ に関する Dirichlet L-function．$\Gamma(s)$ は．通常の gamma function)．そこで

$$\xi(s) = \rho(s)\rho_\chi(s-1)\phi^{(2)}(Z, s)$$

と定義すると．$\xi(s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に meromorphic function として解析接続され

$$\xi(4-s) = \xi(s)$$

なる関数等式を満たす.

文献

[S1] G. Shimura: Confluent hypergeometric functions on tube domains, Math. Ann. 260 (1982).

[S2] G. Shimura: On Eisenstein series. Duke Math. 550 (1983).

[Ka]. G. Kaufhold: Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades, Math. Ann. 137 (1959).

[Ki]. Y. Kitaoka: Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms, Nagoya Math. J 95 (1984).