数理解析研究所講究録
第617巻 1987年 176-192

p進 discrete 群の Ihara-Selberg 型ゼータ関数

早大理工　橋本喜一朗　(Ki-ichiro Hashimoto)
東大理　堀　正　(Akira Hori)

§0 序

$G=PSL_2(\mathbb{R})$とその中に入っている第一種Fuchs群Γに対して、Selberg zetaが[Selberg]によって導入された。そののち、semi-simpleな実Lie群Gで$\mathbb{R}$-rankが1であるものに対して、G/ΓがcompactのときにはGangolli、vol(G/Γ)$<\infty$のときにはWarner-OsborneによってSelberg zetaが定義され、$\mathbb{R}$-rankが1である場合には最終的な結着がついたのである。他方で、$G=PSL_2(K)$（Kはp進体）とその中のdiscrete torsion-free部分群Γで、G/Γがcompactである（これはvol(G/Γ)$<\infty$と同値）ようなものに対して、上記のSelberg zetaとの類似物（Ihara zetaと呼ぶ）が[Ihara 1]によって導入された。ここでは、K上のsemi-simpleな代数群Gで、K-rankが1であるものに対して、同様のΓを考えIhara zetaを定義し、最終的な結着を与える。

§1 設定、定義、定理

Kを$\mathfrak{p}$進体とする。qをその剰余体の位数とする。そして、GをK上の*semi-simple*な代数群で、K-*rank*が1であり*affine* *Tits*系(G, B, N, S)をなすとする。また、そのとき定義される*Weyl*群をWとする。K-*rank*が1であるという仮定より、Sは2つの*involution* s_1, s_2からなり、Wの勝手な元はs_1, s_2を交互に配列して得られる最短表示をもつ。以上の設定をみたす群Gは[*Tits*]によってすべて分類されている。さらに、次が知られている。

<u>Fact 1</u> (*Bruhat*分解)

$$G = \coprod_{w \in W} BwB$$

<u>Fact 2</u>　Gの極大compact部分群は共役で類別すると2つあり、その代表元として$B \amalg Bs_1B$と$B \amalg Bs_2B$がとれる。以下では、これらをそれぞれU_1, U_2という記号で引用する。

<u>Fact 3</u>　次の式をみたす自然数d_1, d_2がある。

$$\#(B \backslash Bs_1B) = q^{d_1} \quad , \#(B \backslash Bs_2B) = q^{d_2}$$

次にΓはGの部分群で、*discrete torsion-free*でG/Γがcompactであるとする。このとき、$\#(U_1 \backslash G/\Gamma)$と$\#(U_2 \backslash G/\Gamma)$は共に有限になり、これらをそれぞれ$h_1, h_2$とおく。このような設定のもとでは、$\Gamma$は自由群になり、その*rank*は

$$q^{d_1}h_1 - h_2 + 1 \ (= q^{d_2}h_2 - h_1 + 1)$$

であることが、[Serre]によって知られている。[Ihara 1]の一般化として示されているのである。以下では、Γのrankをr_Γと書く。ここで、Ihara zetaの定義を出し、新しい記号はあとで説明する。

<u>Def</u> $$Z_\Gamma(u, \rho) = \prod_{\{\gamma\}_\Gamma : \text{primitive}} \det(I_n - \rho(\gamma) u^{\deg\{\gamma\}_\Gamma})^{-1}$$

ここに、uは変数であり、$\rho : \Gamma \longrightarrow U(n)$は$n$次unitary表現である。$I_n$はsize nの単位行列である。$\{\gamma\}_\Gamma$は$\gamma \in \Gamma$の属するΓの共役類であり、それがprimitiveであるとは、[Ihara 1]と同様な次の定義による。Γが自由群であることより、$\gamma \in \Gamma$のΓ内における中心化群$C_\Gamma(\gamma)$が無限次の巡回群になり、

$$\{\gamma\}_\Gamma : \text{primitive} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \gamma\text{が}C_\Gamma(\gamma)\text{を生成する}$$

と定義するのである。また、これも[Ihara 1]と同様であるが、

$$\deg\{\gamma\}_\Gamma \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in G} l(x^{-1}\gamma x)$$

であり、ここでのlは長さと呼ばれるもので、次のように定義する。勝手な$g \in G$に対して

$$l(g) = m \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} g \in U_1(s_1 s_2)^m U_1$$

と定義する。$U_1(s_1 s_2)^m U_1$はB-double cosetとしては、

$$\Gamma_1(s_1s_2)^m\Gamma_1 = \coprod_{\substack{w \in W \\ w\text{の最短表示に現われる} \\ s_2\text{の元の個数が } m}} BwB$$

$$= B(s_1s_2)^m B \amalg B(s_1s_2)^m s_1 B \amalg B s_2(s_1s_2)^{m-1}B$$
$$\amalg B s_2(s_1s_2)^{m-1}s_1 B$$

と表わされる。したがって、勝手な $g \in G$ は同時に異なる2つの Γ_1-double coset に入ることはないし、また、必ずどれかの Γ_1-double coset に入るのである。すなわち、上の l の定義は well-defined である。以下では、Γ_1-double coset $\Gamma_1(s_1s_2)^m\Gamma_1$ を G_m という記号で引用する。ここで、s_1 と s_2 を非対称に用いて l や deg を定義したけれども、s_1 と s_2 の役割を逆にするとどうなるかということに関しては、後に述べるはずの Remark を参照してほしい。本講演の主目標は、次の定理の証明にある。

<u>Th</u>　$Z_\Gamma(u,\rho)$ は次のような有理関数である。

$$Z_\Gamma(u,\rho) = \Big[(1-u)^{n(r_\Gamma-1)}(1+q^{d_2}u)^{n(h_2-h_1)}$$
$$\times \det\{I_{nh_1} - (A_{1\rho} - q^{d_2}+1)u + q^{d_1+d_2}u^2\}\Big]^{-1}$$

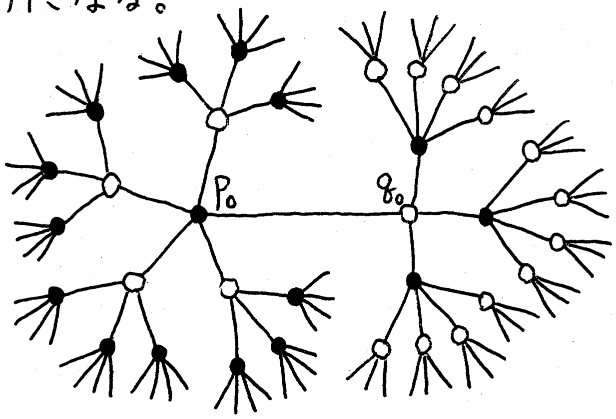
ここで、行列 $A_{1\rho}$ は次のように定義される。$\Gamma_1\backslash G/\Gamma$ の完全代表系 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{h_1}\}$ を一組固定して、次の準同型 φ を考える。

$$\begin{array}{ccc} \varphi : H(G, U_1) & \longrightarrow & M_{nh_1}(\mathbb{C}) \\ \Psi & & \Psi \\ U_1 y U_1 & \longmapsto & \left(\sum_{\gamma \in \Gamma \cap x_i^{-1} U_1 y U_1 x_j} \rho(\gamma) \right) \end{array}$$

ただし、$H(G, U_1)$は対(G, U_1)から定義される$\mathbb{Z}$上のHecke環である。そして、$A_{m\rho} = \varphi(G_m)$によって$A_{m\rho}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$を定義する。$m = 1$のときが上の$A_{1\rho}$になる。

§2　証明のための準備

群Gから作られるBruhat-Tits building Xを、我々の設定の場合に復習する。K-rank 1という仮定からbuildingはtreeになる。作り方は次のようである。vertexの集合は$U_1 \backslash G \amalg U_2 \backslash G$で与えられ、edgeの集合は$B \backslash G$で与えられる。勝手なedge $e \in B \backslash G$に対して、これが結んでいるvertexは、2つの標準的な写像$B \backslash G \longrightarrow U_1 \backslash G$, $B \backslash G \longrightarrow U_2 \backslash G$による$e$の像として与えられる。このようにして構成すると次のようなものになる。



$p_0 \longleftrightarrow U_1$

$q_0 \longleftrightarrow U_2$

図では、Γ_1の共役に対応するvertexを黒丸●で、Γ_2の共役に対応するvertexを白丸○で表わしている。黒丸と白丸が交互に結ばれて、四方八方に無限にのびたtreeになっている。edgeの生えている本数は、vertexの種類だけで決まっており、黒からは$1+q^{d_1}$本、白からは$1+q^{d_2}$本生えている。図での本数は便宜的なものである。どこかにΓ_1、Γ_2自身と対応するvertexがあり、それらをそれぞれP_0, q_0とおいて図に書きこんだ。P_0とq_0はedgeで結ばれている。以下では、$\Gamma_1\backslash G$、$\Gamma_2\backslash G$をそれぞれX_1, X_2と略記する。そして、X_1上だけに距離を入れる。勝手な2つの$p, q \in X_1$に対して、$d(p, q)$を、pとqを結ぶX内の最短径路のedgeの本数の半分であると定義する。vertexは白黒が交互に結ばれているので、pとqを結ぶ最短径路はいつも偶数本のedgeでできており、したがって$d(p, q)$は常に整数になる。

building Xにはその作り方から自然にGが作用しているが、特にΓも作用している。そして、Γの作用でXをわってできるX/Γの構造が[Serre]において調べられている。それを復習すると次のようになる。まず、X/Γは有限graphになる。buildingの2種類のvertexはΓの作用によってうつりあわないので、Γの作用でわっても種類は保たれる。つまり、X/Γにも2種類のvertexが現われ(Xのvertexの種類に

対応して黒丸、白丸で表わす)、それらが交互に結ばれたいくつかの loop からなっている。黒丸は $\Gamma_1\backslash G/\Gamma$、白丸は $\Gamma_2\backslash G/\Gamma$ の元と対応している。X/Γ の edge の生え方も vertex の種類だけで決まっており、黒からは $1+q^{d_1}$ 本、白からは $1+q^{d_2}$ 本生えている。したがって、X/Γ の edge の総本数を2通りに数えて、$(1+q^{d_1})h_1=(1+q^{d_2})h_2$ なる関係が示される。また、$\pi: X \longrightarrow X/\Gamma$ は universal covering になっている。X/Γ 内の勝手な max subtree T_0 をとって、それを π によって X 内に持ち上げたものを T と書く。ただし、$T \ni p_0, q_0$ となるように持ち上げる。そして、$\Gamma_1\backslash G/\Gamma$ の1つの完全代表系 $\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{h_1}\}$ を

$$T \cap X_1 = \{p_0x_1, p_0x_2, \cdots\cdots, p_0x_{h_1}\} \begin{pmatrix}\text{vertex の集合}\\ \text{として等しい}\end{pmatrix}$$

となるように選ぶ。

次に、prime cycle というものを定義する。prime cycle とは、X/Γ 内の closed path の同値類で、backtracking がなく edge の本数が有限で、同じ所を何度も回るだけの繰り返しにはなっていないものであると定義する。ここに、2つの closed path が同値であるとは、始点が違うだけで同じ所を回っているということである。このとき、次のようなことが [Serre] によって知られている。Γ は X/Γ の基本群 $\pi_1(X/\Gamma)$ と同一視できる。また、Γ の共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ で primitive なもの

は prime cycle $\mathfrak{p}$ と1対1に対応しており、

$$\deg\{\gamma\}_\Gamma = \mathfrak{p} \text{ の edge の本数の半分} (= |\mathfrak{p}| \text{ と書く})$$

が成り立つ。そこで、Ihara zeta の定義を次のように書き直すことによって、定理の証明をする。

<u>Def</u> $$Z_\Gamma(u,\rho) = \prod_{\mathfrak{p}:\text{prime cycle}} \det(I_n - \rho(\langle\mathfrak{p}\rangle)u^{|\mathfrak{p}|})^{-1}$$

ただし、$\langle\mathfrak{p}\rangle$ は $\mathfrak{p}$ を Γ の元と見たときにそれの属する共役類を表わす。これより

$$u\frac{d}{du}\log Z_\Gamma(u,\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} N_{m\rho}u^m$$

と展開すると、

$$N_{m\rho} = \sum_{C} \operatorname{tr}\rho(C)$$

$$C \longleftarrow \left(\begin{array}{l} X/\Gamma \text{ 内の closed path で} \\ \text{backtracking なし、始点は黒丸} \\ \text{edge の本数は } 2m \end{array}\right) \cdots\cdots (*)$$

となる。また、行列 $A_{m\rho}$ は次に言うような一次変換の行列表示であるとみなせる。nh_1 次元の $\mathbb{C}$ ベクトル空間

$$S_\rho(\Gamma) = \{ f: X_1 \longrightarrow \mathbb{C}^n \mid f(x\gamma) = f(x)\rho(\gamma) \quad {}^\forall\gamma\in\Gamma, {}^\forall x\in X_1 \}$$

を考え、一次変換 $A_{m\rho}: S_\rho(\Gamma) \longrightarrow S_\rho(\Gamma)$ を

$$(A_{m\rho}f)(u) = \sum_{\substack{v\in X_1 \\ d(u,v)=m}} f(v)$$

で定義する。ベクトル空間 $S_\rho(\Gamma)$ の基底として次のようなものをとって行列表示すれば、前記の行列 $A_{m\rho}$ が得られる。

$$\left\{ f_{v,k}(x) \in S_\rho(\Gamma) \;\middle|\; \begin{array}{l} v \in T \cap X_1 \;,\; k = 1, 2, \cdots, h_1 \\ \text{次の条件をみたす。} \\ f_{v,k}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{e}_k & x = v \\ \mathbb{0} & x \neq v \end{cases} \\ \quad x = T \cap X_1 \end{array} \right\}$$

ただし、

$$\boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad (k\text{成分}) \quad , \quad \mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

さらに、

$$\mathrm{tr}\, A_{m\rho} = \sum_{\left(\substack{(x,\gamma) \in (T \cap X_1) \times \Gamma \\ d(x, x\gamma) = m}\right)} \mathrm{tr}\, \rho(\gamma) \quad \cdots\cdots (**)$$

であることもすぐわかる。

§3 定理の証明

証明のポイントは次の2つの式にある。

① $m \geqq 1$ に対して

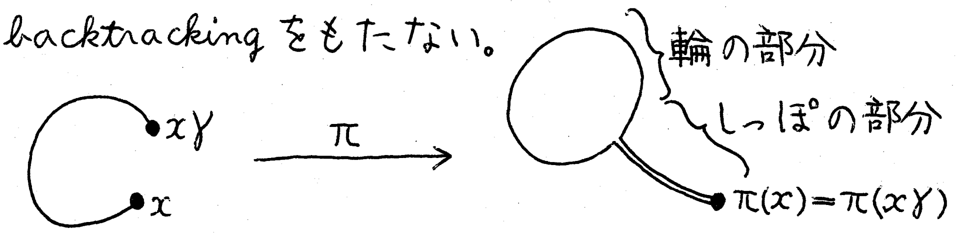
$$\mathrm{tr}\, A_{m\rho} = N_{m\rho} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} (q^{d_1+d_2} - q^{d_2}) q^{(k-1)(d_1+d_2)} N_{m-2k,\rho} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} (q^{d_2} - 1) q^{k(d_1+d_2)} N_{m-2k-1,\rho}$$

② $A_{m\rho}$ たちの関係式

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m\rho} u^m = \frac{(1-u)(1+q^{d_2}u)}{1-(A_{1\rho} - q^{d_2} + 1)u + q^{d_1+d_2} u^2}$$

以下、このセクションでは、①の証明、②の証明、①,②から定理を出すこと、の3つを説明する。

まず、①の証明を述べる。(**)の条件をみたすような径路をすべてとり、それらを一本ずつ universal covering π によって X/Γ 内におとす。おとされてできたそれぞれの closed path は始点の所でのみ backtracking をもち、それ以外の所では backtracking をもたない。



①を出すためには、おとされる前の径路としては異なっているが、おとされると輪の部分が同じで、しっぽの部分だけが異なっているというような径路の個数を数えればよい。

図1

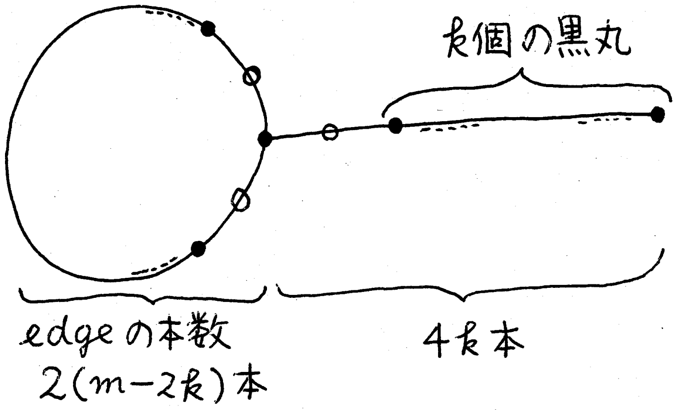


図2

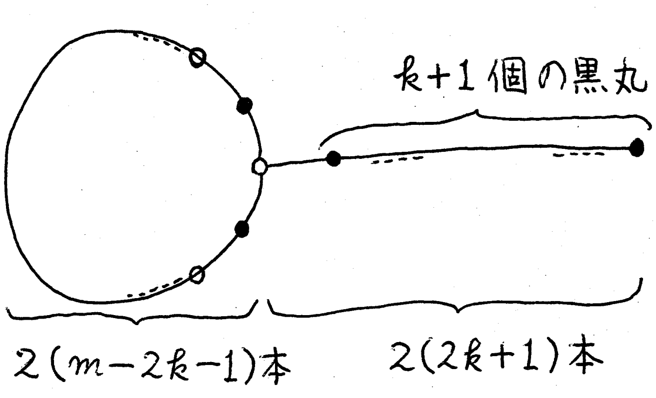


図1、2の輪の部分のedgeが固定されているときに、しっぽの部分のedgeの生え方がそれぞれ$(q^{d_1+d_2}-q^{d_2})q^{(k-1)(d_1+d_2)}$、$(q^{d_2}-1)q^{k(d_1+d_2)}$通りであることを確認すれば、①の証明は終わる。

次に、②の証明を述べる。[Iwahori-Matsumoto]により$H(G,U_1)$の構造が次のようにわかっている。

$H(G,U_1)\cong\mathbb{Z}[G_1]$

であり、Hecke環内における$G_m\ (m=0,1,2,\cdots)$の関係式は、

$$\begin{cases} G_1^2=G_2+(q^{d_2}-1)G_1+q^{d_2}(q^{d_1}+1)G_0 \\ G_1G_m=G_mG_1=G_{m+1}+(q^{d_2}-1)G_m+q^{d_1+d_2}G_{m-1} \end{cases} \quad (m\geqq 2)$$

となる。これらの両辺を準同型φでうつせば、$A_{m\rho}\ (m=0,1,2,\cdots)$の関係式が得られ、それをgenerating functionを用いて表わせば②が得られる。

最後に、①、②から定理が出ることを示す。まず、①の式を反転すると

$$\begin{aligned} N_{m\rho}=&\operatorname{tr}A_{m\rho}-(q^{d_2}-1)\operatorname{tr}A_{m-1,\rho}\\ &-\sum_{k=1}^{m-2}\left\{(q^{d_2}-1)+(q^{d_1+d_2}-q^{2d_2})\sum_{l=0}^{m-2-k}(-q^{d_2})^l\right\}\operatorname{tr}A_{k\rho} \end{aligned}$$

となるので、これを

$$u\frac{d}{du}\log Z_\rho(u,\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}N_{m\rho}u^m$$

に代入して整理する。

$$u\frac{d}{du}\log Z_\Gamma(u,\rho)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{tr}\,A_{m\rho})u^m-(q^{d_2}-1)\sum_{m=2}^{\infty}(\mathrm{tr}\,A_{m-1,\rho})u^m$$
$$-(q^{d_2}-1)\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}(\mathrm{tr}\,A_{k\rho})u^m$$
$$-(q^{d_1+d_2}-q^{2d_2})\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{l=0}^{m-2-k}(-q^{d_2})^l(\mathrm{tr}\,A_{k\rho})u^m$$
$$=\left\{1-(q^{d_2}-1)\sum_{k=1}^{\infty}u^k-(q^{d_1+d_2}-q^{2d_2})\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=0}^{k-2}(-q^{d_2})^l u^k\right\}$$
$$\times\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{tr}\,A_{m\rho})u^m$$
$$=\left\{1-\frac{(q^{d_2}-1)u}{1-u}-\frac{(q^{d_1+d_2}-q^{2d_2})u^2}{(1-u)(1+q^{d_2}u)}\right\}\times\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{tr}\,A_{m\rho})u^m$$
$$=\frac{1-q^{d_1+d_2}u^2}{(1-u)(1+q^{d_2}u)}\sum_{m=1}^{\infty}(\mathrm{tr}\,A_{m\rho})u^m$$

ここで、②の式の両辺のtraceをとって代入する。

$$u\frac{d}{du}\log Z_\Gamma(u,\rho)$$
$$=(1-q^{d_1+d_2}u^2)\,\mathrm{tr}\{1-(A_{1\rho}-q^{d_2}+1)u+q^{d_1+d_2}u^2\}^{-1}$$
$$-nh_1\frac{1-q^{d_1+d_2}u^2}{(1-u)(1+q^{d_2}u)}$$

さらに、ここで次のような等式が容易に示される。

$$\mathrm{tr}\{1-(A_{1\rho}-q^{d_2}+1)u+q^{d_1+d_2}u^2\}^{-1}$$
$$=\frac{u}{1-q^{d_1+d_2}u^2}\frac{d}{du}\log\det\{1-(A_{1\rho}-q^{d_2}+1)u+q^{d_1+d_2}u^2\}^{-1}$$
$$+\frac{nh_1}{1-q^{d_1+d_2}u^2}$$

これを代入すると定理が出る。微分をはずすときの積分定数

は $u=0$ とおいて決める。

§4　定理の系とRemarks

まず、次の系が成り立つ。

<u>Cor</u>　$\rho=1$（単位表現）のとき

$(1-u)^{-1}$ のベキ $= r_\Gamma$

$= L^2(G/\Gamma)$ に含まれるspecial表現の重複度

これは、[Ihara 1] の拡張である。第一の等号は [Ihara 1] と同様に示され、第二の等号は [Garland] による。

次に、いくつかRemarkを出す。

<u>Remark 1</u>

Ihara zetaの有理関数としての表示を求める方法は、[Ihara 1] においては、free product expressionを使う非常にcombinatorialな方法であったが、それは [Serre] によってbuilding Xだけを使うgraph理論的な方法に書き直されたのである。我々の設定の場合にも、後者の方法で有理関数としての表示を求めたのである。なお、building Xを使いはするものの [Ihara 1] の手法をまねたcombinatorialな方法も知られており、それに関しては [Hori] を参照してほしい。

<u>Remark 2</u>

我々の設定をみたす群Gは [Tits] によってすべて分類さ

れている。central isogeny で類別すると11個の type に分けられて、

$$\begin{cases} d_1 = d_2 \text{ なるもの} & 4\text{つ} \\ d_1 \neq d_2 \text{ なるもの} & 7\text{つ} \end{cases}$$

である。前者の4つはすべて[Ihara 1]で扱われている公理をみたしており、後者はどれもみたしていない。

<u>Remark 3</u>

実は、前セクションまでの議論は、2つの involution S_1 と S_2 の役割を入れかえても、全く同様に展開できるのである。Ihara zeta の定義を見ればわかるように、S_1 と S_2 のどちらをとるかということとは無関係に定義されている。それにもかかわらず、得られた有理関数としての表示には、S_1 と S_2 が非対称に入っている。定理の証明をする過程で、手段として S_1 と S_2 を非対称に用いたので、非対称な表示が得られたのである。S_1 と S_2 を逆にして求めた表示と、もとの表示とが等しいということは、上のようなわけで当然であるが、2つの表示を等号で結んだ恒等式は、それ自身では自明ではない。今のところ、その恒等式が成立する直接的な理由ははっきりしておらず、単に同じ定義から右辺と左辺が別々に出てきたからというに過ぎない。Selberg's trace formula などを用いれば、その恒等式の表現論的、または幾何学的な意味などがわかる

のかも知れないが、それはまだできていない。あわせて、定理の表示に出ている第二の因数$(1+q^{d_2}u)^{n(h_2-h_1)}$の意味づけができればおもしろいだろう。特に、このセクションの系に対応するような表現論的な意味づけはできないものだろうか。

参考文献

[Bourbaki] N. Bourbaki

Groupes et Algèbres de Lie, chap.IV, Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Hermann, Paris, 1968

[Garland] H. Garland

P-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups. Ann. of Math. 97(1973), pp. 375−423

[Hori] A. Hori

修士論文, 東京大学, 1987

[Ihara 1] Y. Ihara

On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields. J. Math. Soc. Japan, 18(1966), pp. 219−235

[Ihara 2] Y. Ihara

Discrete subgroups of $PL(2, k_\mathfrak{p})$. Proc. Symposia Pure Math. IX, AMS. 1966, pp. 272-278

[Ihara 3] Y. Ihara

Algebraic curves mod $\mathfrak{p}$ and arithmetic groups. Proc. Symposia Pure Math. IX, AMS. 1966, pp. 265-271

[Ihara 4] Y. Ihara

On congruence monodromy problems I, II. Lecture Notes, Dep. of Math. Univ. of Tokyo, 1968

[Iwahori-Matsumoto] N. Iwahori-H. Matsumoto

On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups. Publ. Math. IHES, 25 (1965), pp. 5-48

[Kuga] M. Kuga

弱対称リーマン空間における位相解析とその応用(A. Selberg の仕事の紹介). 数学, 9 (1957), pp. 166-185

[Selberg] A. Selberg

Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20 (1956), pp. 47-87

[Serre] J.-P. Serre

Arbres, Amalgames, SL_2. Astérisque, no 46, Soc. Math. France, 1977

[Tits] J. Tits

Reductive groups over local fields. Proc. Symposia Pure Math. 33 (1979), part 1, pp. 29–69