数理解析研究所講究録
第619巻 1987年 1-11

Topics on Real Enumerative Geometry

石川剛郎 (Goo ISHIKAWA)
奈良女子大・理

複素領域上の幾何学と異なり，実領域上の幾何学では，いわゆる"数え上げ"は，一般にきれいな形をとらない．それは典型的に，一変数多項式の零点を求める問題に象徴される．しかし，Strumの定理があり，Mapping degreeの理論があり，いまだ解明はされていないが，"実数え上げ幾何"と呼ぶべきものが成立すると思われるふしがある．こんなことを[5]を読みながら考えた．ここでは，"実数え上げ幾何"を形成するとき参考になるようなtopicsを集めてみた．

§1. Legendre変換の特異点を数える．

$S_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}P^n$ を"generic"なalgebraic hypersurface of deg d とする．ここではgenericということを定義しないが，hypersurfaces全体の空間の中でproper algebraic setをのぞいたところで以下のことが成立する．

$PT^*\mathbb{R}P^n = \{$tangent hyperplanes of $\mathbb{R}P^n\}$,

とおくと，よく知られているように $PT^*\mathbb{R}P^n$ には自然にcontact structure が入る．図式

$$\begin{tikzcd} & PT^*\mathbb{R}P^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}P^{n\vee} \\ & \\ S_{\mathbb{R}} \arrow[uur, "j"] \subset \mathbb{R}P^n & \end{tikzcd}$$

を考える．ここで π は projection，φ は各 tangent hyperplane に対し対応する $\mathbb{R}P^n$ の hyperplane を対応させる写像，j は，$S_{\mathbb{R}}$ の各点に，その点の $S_{\mathbb{R}}$ の tangent space を対応させる写像である．すると，π, φ は Legendre fibration，j は Legendre immersion となる．$\varphi\circ j(S_{\mathbb{R}}) = S_{\mathbb{R}}^{\vee}$ は $S_{\mathbb{R}}$ の dual あるいは Legendre 変換とよばれる．そこで，Legendre 変換の特異性は，Legendre map $\varphi\circ j$ の特異性としてとらえられる．たとえば次のような評価を得る：

$$n=1: \quad \#\,\text{cusps of } S_{\mathbb{R}}^{\vee} \leqq 3d(d-2)$$
$$\equiv d \quad (\text{mod. } 2)$$

$$n=2: \quad \#\,\text{swallow tails of } S_{\mathbb{R}}^{\vee} \leqq 2d(d-2)(11d-24)$$
$$\equiv 0 \quad (\text{mod. } 2).$$

(cf. [6], [□])．このような結果は，古典的な Plücker 公式と結びつく．また Legendre cobordism と結びつく．Thom 多項式の具体的な応用とも考えられる．

§2. 実代数関数の特異点を数える.

一般に X, Y を real algebraic manifold とし, $A \subset X \times Y$ を subvariety, すなわち, real algebraic correspondence とする. A を generic としたとき, 図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

の特異性を調べたい. このとき, 次の様な best possible な評価を得る.

(1) $X = Y = \mathbb{P}^1 \qquad A \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad \deg A = (d, r)$

$$\begin{cases} s(\varphi_{\mathbb{R}}) \leqq 2(d-1)r \\ s(\pi_{\mathbb{R}}) \leqq 2d(r-1), \end{cases}$$

ここで, $s(\cdot)$ は critical points の個数を表わす.

(2) $X = \mathbb{P}^2, Y = \mathbb{P}^1 \qquad A \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \quad \deg A = (d, r)$

$$\begin{cases} s(\varphi_{\mathbb{R}}) \leqq 3(d-1)^2 r \\ \kappa(\pi_{\mathbb{R}}) \leqq 3d^2(r-2) \end{cases}$$

ここで, $\kappa(\cdot)$ は cusps の個数.

(3) $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, Y = \mathbb{P}^1 \qquad A \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \deg A = (d, e, r)$

$$\begin{cases} s(\varphi_{\mathbb{R}}) \leqq (6de - 4d - 4e + 4)r \\ \kappa(\pi_{\mathbb{R}}) \leqq 6de(r-2) \end{cases}$$

これらの結果は Hilbert 第16問題の一般化としてとらえ

ることができる．また，この問題でもThom多項式の具体的な応用が重要になる．

§3. Hilbert第16問題の前半（一般論の主要部）

この問題については，あまり知られていないので，とりわけ重要な結果を挙げておく．

Xを<u>実代数多様体</u> i.e. くわしくは (X,τ)，X: compact複素多様体，$\tau: X\to X$ conjugation が与えられ，埋めこみ $e: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ で $e\circ\tau = \mathrm{conj}\circ e$ となるものが存在するとする．ここで conjugation とは anti-holomorphic な involution のことである．また $\mathrm{conj}: \mathbb{P}^N\to\mathbb{P}^N$ は，複素共役から定義される conjugation を表わす．

$$\mathbb{R}X = X_{\mathbb{R}} = X^\tau = \{x\in X \mid \tau(x)=x\},\quad X_\tau = X/\tau$$

とおくと，X^τ は C^ω submanifold，$\dim_{\mathbb{R}} X^\tau = \dim_{\mathbb{C}} X$，(又は $X^\tau=\phi$)．$\dim X=1$ ならば X_τ は境界付"実曲面"，$\dim X=2$ ならば X_τ は closed 4-mfd，一般に X_τ は orbifold となる．

$$P_t(X,K) = \sum_i \dim H_i(X;K)\, t^i \qquad (K:\text{体})$$

$$\chi(X) = P_{-1}(X;K) \qquad (\text{Euler 標数})$$

とおく．X^τ のベッチ数の評価が次によって得られる．

Theorem (Harnack-Thom)

$$P_1(X^\tau;\mathbb{Z}/2) \leq P_1(X;\mathbb{Z}/2)$$

(等号成立のとき，(X, τ) を <u>M-多様体</u> とよぶ)

Theorem.(Petrovskii - Oleinik - Kharlamov) $\dim_{\mathbb{C}} X = 2n$ のとき，

$$|\chi(X^\tau) - 1| \leq h^{n,n}(X) - 1$$

ここで，$h^{n,n}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \{\text{harmonic } (n,n)\text{-forms}\}$.

さらに，M-多様体の重要な性質として

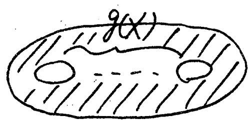
(1) $\tau_* : H_*(X; \mathbb{Z}/2) \circlearrowleft$, $\tau_* = id$

(2) $\chi(X^\tau) \equiv \sigma(X)$ (mod. 16)

ここで $\sigma(X)$ は X の signature である．

M-多様体の典型的なものは，$(\mathbb{P}^n, conj)$ である．

M-curve に対し，$X^\tau \cong S^1 \amalg \cdots \amalg S^1$ $(g(X)+1)$，

$X_\tau \cong$ 

となる．X が M-surface のとき，$X_\tau \cong S^4$ となるか，というのは，大きな問題に思える．この方面での未解決問題としては他に，Ragsdale − Viro 予想「X: 1-connected, $\dim X = 2 \Rightarrow \dim H_1(X^\tau; \mathbb{Z}/2) \leq h^{1,1}(X)$」がある．

§4. 実代数関数の特異点を数える．(つづき)

いま，M-多様体の構成問題をとりあげてみる．$X^1 \subset \mathbb{P}^2$ $\deg X = d$ に対しては Harnack (1876)，$X^2 \subset \mathbb{P}^3$, $\deg X = d$ に対しては，Viro (1979) が示した．$X^1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $\deg X = (d, r)$ に対しては容

易である．$X^2 \subset \mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1$ に関しては次に述べることにより構成される．

いま，$A\subset \mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1$，$\deg A=(d,r)$ に対し，次数 (d,r) を制限したとき，A の種々の不変量がどんな制約をうけるか？ということをとりあげる．図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 \\ \pi\downarrow & & \\ \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

について，A は平面曲線族 $\{\pi\varphi^{-1}[\lambda:\mu]\}_{[\lambda:\mu]\in\mathbb{P}^1}$ と思える．このとき φ の (real) crit. pt = curve の (real) sing. pt.，π の (real) cusp pt. = envelope の (real) cusp pt. が成立する．

Theorem $A\subset\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1$，$\deg A=(d,r)$，一般の位置，$\mathbb{R}$ 上 def. に対し 次の <u>best possible</u> な一様評価がある；

$$\begin{cases} P_1(\mathbb{R}A;\mathbb{Z}/2) \leqq 3+d^2+3(d-1)^2(r-1) & (r\geqq 1) \\ s(\mathbb{R}\varphi) \leqq 3(d-1)^2 r & (r\geqq 1) \\ k(\mathbb{R}\pi) \leqq 3d^2(r-2) & (r\geqq 2) \end{cases}$$

一般に，$A\subset X\times\mathbb{P}^1$ を，X 上の line bdle L に対し，$p_1^*L\otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r)$ への "transverse" な section の零点集合とするとき，

$$\begin{cases} P_1(\mathbb{R}A;\mathbb{Z}/2)\leqq P_1(A;\mathbb{Z}/2)=(3r-2)c_1(L)^2-(2r-2)c_1(L)c_1(TX)+rc_2(TX) \\ s(\mathbb{R}\varphi)\leqq s(\varphi)=r(3c_1(L)^2-2c_1(L)c_1(TX)+c_2(TX)) \\ k(\mathbb{R}\pi)\leqq k(\pi)=3(r-2)c_1(L)^2 \end{cases}$$

が成立する．ここで $c_i(\cdot)$ は Chern class．

この計算は Thom 多項式の具体的適用により得られる．

§5 Thom 多項式を使って数える．

$\Sigma \subset J^k(n,p)$ を座標変換で不変な algebraic set とする．$f: X \to Y$ に対し，$j^kf: X \to J^k(X,Y) \supset \Sigma(X,Y)$ を考え，$\Sigma f = j^kf^{-1}(\Sigma(X,Y))$ とおく．このとき，j^kf が Σ に transverse ならば，Σf の Poincaré dual in $X = P(c(TX), f^*c(TY))$ と書ける．ここで重要なのは多項式 P が Σ にのみよることである．多項式 P を <u>Thom 多項式</u> とよぶ．

Thom 多項式の具体的応用は，次のような Process を通じて行なう．X を $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ の submanifold とし，$f: X \to Y$ で，簡単のため $\operatorname{codim} \Sigma = \dim X$ とする．このとき $j^kf \pitchfork \Sigma$ ならば Σf は有限集合である；

$$\# \Sigma f = \langle 1, [\Sigma f] \rangle = \langle P, [X] \rangle .$$

多くの問題では，$P = \iota^* \alpha$，$\alpha \in H^*(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s})$，$\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ と表わすことができる．$\iota_*[X]$ の Poincaré dual を β とおけば，したがって，

$$\begin{aligned} \# \Sigma f &= \langle \iota^* \alpha, [X] \rangle = \langle \alpha, \iota_*[X] \rangle \\ &= \langle \alpha\beta, [\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}] \rangle = \int_{\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}} \alpha\beta \end{aligned}$$

Thom 多項式については，Porteus, Ronga, Gaffney, Ando 等の仕事がある．

§6. Mapping degree を使って数える.

まず言及すべきは，代数方程式の解の分岐を，Mapping degree の言葉で記述する Fukuda, Aoki, Sun, Nishimura 等の理論（cf. [6]）である．それについては，他に解説があると思う．ここでは，Mapping degree を使って，generic singularity を perturb したとき得られる cusps を数える話（[4]）をのべよう．

$f: \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ を "generic" な singularity とする．f を perturb することにより multi-stable な $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をうる．もともと f は 0 以外では stable だから perturbation は 0 の十分小さな近傍上に support をもつようにできるが，このとき，$\tilde{f}$ の cusp (i.e. $(x,y) \mapsto (x, y^3+xy)$ at 0 と equivalent) の個数は，もともとの f からどのような制約をうけるだろうか？

Theorem ([4]) $f: \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ を generic な map-germ $\tilde{f}: \tilde{D}^2 \to D_\delta^2$ ，($\tilde{D}^2 = f^{-1}(D_\delta^2) \cap D_\varepsilon^2$; $0<\delta \ll \varepsilon \ll 1$) を f の stable な perturbation とする．このとき，

$$\kappa(\tilde{f}) \equiv 1 + \frac{1}{2}(C(f) \text{ の branch の個数}) + \deg f \quad (\mathrm{mod}.\,2)$$

ここで注意したいのは，$C(f)$ は f の Jacobian determinant $Jf: \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}, 0$ の零点集合であり，その branch の個数は，前出の Fukuda-Aoki-Sun-Nishimura により，やはり degree の言葉で記述できることである．

この考察は，図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^\ell,0 & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\ell-1},0 \arrow[l, "F"'] \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, "P_1"'] & \mathbb{R},0 \\ & \mathbb{R}^2,0 & \end{tikzcd}$$

に対しても適用できる．すなわち，F を defining equation と考え，variety $A=F^{-1}(0)\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\ell-1}$ を考える．generic には，F は isol. sing. であり，$\pi=P_1|A: A\to\mathbb{R}^2$ は，0 以外で multi-stable となる．F を perturb して，$\tilde{A}=\tilde{F}^{-1}(0)$ が non-singular $\tilde{\pi}=P_1|\tilde{A}$ が multi-stable とできる．また，perturbation の support は好なだけ小さくとれる．$\tilde{\pi}: M\to D_\delta^{\,2}$; $M=D_\varepsilon^{\ell+1}\cap\tilde{\pi}^{-1}(D_\varepsilon^{\,2})$ に対し次が成立する．

$$\kappa(\tilde{\pi})\underset{(2)}{\equiv}\#(\text{comp. of }\partial M)+\tfrac{1}{2}\#(\text{branches of }C(\pi))+\deg\pi\,.$$

先の場合は，$M\cong D^2$ であった．

証明は，Quine [8] の結果による．（この拡張は，泉屋周一氏により示唆された）

§7　$Q(f)$ を使って数える．

Eisenbud-Levine [2] の定理が出発点である．

$f:\mathbb{R}^n,0\to\mathbb{R}^n,0$　C^∞ map-germ,　$Q(f)=\mathcal{E}_n/\langle f_1,\dots,f_n\rangle$ とおく．$\dim_{\mathbb{R}}Q(f)<+\infty$ のとき，

$$|\deg f| = \dim_{\mathbb{R}}Q(f)-2\dim_{\mathbb{R}}I\,.$$

ここで，I は $I^2=0$ をみたす $Q(f)$ の ideal のうち極大なもの．

これは，$\deg f=\mathrm{sign}\langle\ ,\ \rangle_\varphi$ という記述から導びかれ

る. ここで, $\langle\ ,\ \rangle_\varphi : Q(f)\times Q(f) \to \mathbb{R}$ は, functional $\varphi : Q(f) \to \mathbb{R}$ $\varphi(Jf) > 0$ なるものに対し, $\langle h, k\rangle_\varphi = \langle hk\rangle_\varphi$ により定義される. signature $\langle\ ,\ \rangle_\varphi$ は φ によらない。

Mapping degree により記述される invariants は, したがって, 種々の f の algebra $Q(f)$ により記述される.

最後に福田拓生氏による問題を挙げておく.

「$f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ の topological invariants を $Q(f)$ から絞り出せ」

以上

References

[1] V.I. Arnol'd, Singularities of systems of rays, Russ. Math. Surveys 38-2(1983), 87-176.

[2] D. Eisenbud, H.I. Levine, An algebraic formura for the degree of a C^∞ map-germ, Ann. of Math., 106(1977), 19-38.

[3] T. Fukuda, Local topological properties of differentiable mappings II, Tokyo J. of Math., 8-2(1985), 501-520.

[4] T. Fukuda, G. Ishikawa, On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity, preprint.

[5] S.L. Kleiman, The enumerative theory of singularities, in Real and Complex Singularities, ed. by P. Holm, Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1977.

[6] V.S. Kulikov, the calculation of the singularities of the embedding of a generic algebraic surface in the projective space $\mathbb{P}^3$, Funct. Anal. Appl., 17(1983), 176-186.

[7] T. Nishimura, T. Fukuda, K. Aoki, An algebraic formula for the topological types of one parameter bifurcation diagrams,

[8] J.R. Quine, A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 236(1978), 307-314.