数理解析研究所講究録
第 619 巻 1987 年 114-134

関数の C^0-同値について

兵庫教育大学　小池 敏司 (Satoshi Koike)

本稿では関数の C^0-同値に関して最近得た結果と、それら周辺の関連する結果のまとめを述べる。§0 で本稿に必要な記号・定義をまとめて述べ、§1 では実関数、§2 では複素関数に関する結果を扱う。最近の結果の証明は与えないが(命題2以外は小池 [14] にある)、証明に必要な道具は [ ] の中で述べておいた。

§0. 準備.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ とする。

記号.

$\mathcal{E}_{[k]}(n,1)$: $(\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ の C^k 級関数芽全体の作る集合 ($k = 1, 2, \cdots, \infty$)。

$P_{[k]}(n,1)$: $(\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ となる次数 k 以下の多項式全体の作る集合 ($k = 1, 2, \cdots$)。

$\mathcal{H}(n,1)$ ： $(\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{C},0)$ の正則関数芽全体の作る集合．

$J^r(n,1)$ （又は $J^r_{\mathbb{R}}(n,1)$）： $\mathcal{E}_{[k]}(n,1)$ （又は $P_{[k]}(n,1)$）

の中の関数の r-jet 全体の作る集合 （$k\geqq r$）．

$J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$ ： $\mathcal{H}(n,1)$ の中の関数の r-jet 全体の作る集合．

$\mathcal{E}_n$ ： $(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow\mathbb{R}$ の C^∞ 級関数芽のなす環．

m_n ： $\mathcal{E}_n$ の極大イデアル。

$\mathcal{H}(n)$ ： $(\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow\mathbb{C}$ の正則関数芽のなす環．

定義 1. (1) $f,g\in\mathcal{E}_{[k]}(n,1)$ （又は $P_{[k]}(n,1)$）が C^0-同値であるとは、局所同相写像 $\sigma:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$ が存在して

$$f=g\circ\sigma$$

となる時いう。

(2) $f,g\in\mathcal{H}(n,1)$ が C^0-同値であるとは、局所同相写像 $\sigma:(\mathbb{C}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{C}^n,0)$ が存在して

$$f=g\circ\sigma$$

となる時いう．

(3) $f,g\in\mathcal{E}_{[\infty]}(n,1)$ が C^∞-同値であるとは、C^∞ 級局所微分同相写像 $\sigma:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$ が存在して

$$f=g\circ\sigma$$

となる時いう。

<u>定義2</u>. (1) r-jet $w \in J^r(n,1)$ が <u>C^0-sufficient in $\mathcal{E}_{[k]}(n,1)$</u> (resp. <u>$P_{[k]}(n,1)$</u>) ($k \geqq r$) であるとは、$j^r f(0) = j^r g(0) = w$ となる任意の $f, g \in \mathcal{E}_{[k]}(n,1)$ (resp. $P_{[k]}(n,1)$) が C^0-同値の時いう。

(2) r-jet $w \in J^r_c(n,1)$ が <u>C^0-sufficient in $\mathcal{A}(n,1)$</u> であるとは、$j^r f(0) = j^r g(0) = w$ となる任意の $f, g \in \mathcal{A}(n,1)$ が C^0-同値の時いう。

(3) r-jet $w \in J^r(n,1)$ が <u>C^∞-sufficient in $\mathcal{E}_{[\infty]}(n,1)$</u> であるとは、$j^r f(0) = j^r g(0) = w$ となる任意の $f, g \in \mathcal{E}_{[\infty]}(n,1)$ が C^∞-同値の時いう。

<u>注意</u>. jet の "sufficiency" という概念は、関数に対しては "r-既定" という概念で定義される。特に (3) は元来 $\mathcal{E}_n$ の元に対して定義されたもの ([23]) で、同値関係にも定数項のズラシが関係してくるが、その度に断わって使用するのは面倒なので、ここでは全て $\mathcal{E}_{[\infty]}(n,1)$ の中で話を進める。

jet と代表元についての使い方に関し、あまり細い神経を使い過ぎると設定の所ばかり長くなるので、これ以後 r-jet と次数 r を越えない多項式代表元を同一視して用いることにする。

$w \in J^r_{\mathbb{K}}(n,1)$ としよう。ここで gradient についての Łojasiewicz 不等式に関する次の条件を考える：

(L_1) ; ある数 $c, \alpha > 0$ が存在して

$$|\operatorname{grad} w(x)| \geqq c|x|^{r-1}$$

が、$|x| < \alpha$ となる任意の $x \in \mathbb{K}^n$ に対し成立する。

(L_δ) ; ある数 $c, \alpha, \delta > 0$ が存在して

$$|\operatorname{grad} w(x)| \geqq c|x|^{r-\delta}$$

が、$|x| < \alpha$ となる任意の $x \in \mathbb{K}^n$ に対し成立する。

更に、$w \in J^r(n,1)$ に対しては、$\mathcal{E}_n$ の極大イデアル m_n に関する次の条件も考える：

(ϑ) ; $m_n^r \subseteq m_n\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial w}{\partial x_n}\right)_{\mathcal{E}_n} + m_n^{r+1}$.

$f \in \mathcal{H}(n)$ に対し、f の Milnor number μ を次のように定義する：

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(n) \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

$w \in J^r_{\mathbb{K}}(n,1)$ に対し、

$$F(a;x) = w(x) + \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha x^\alpha$$

とおく。この時、係数空間はある $\mathbb{K}^N$ と自然に同一視される

($\{(\cdots a_\alpha \cdots)\} \cong \mathbb{K}^N$)。従って、

$$F : (\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^N, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}, 0)$$

と考えられる。$a = (\cdots a_\alpha \cdots) \in \mathbb{K}^N$ に対し、

$$H_a(x) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha x^\alpha$$

とおく。

補題 1. $w \in J^r_{\mathbb{K}}(n,1)$ に対し、次の条件は同値である。

(1) (L_1).

(2) ある数 $\varepsilon > 0$ と 0 の $\mathbb{K}^N$ の中における近傍 U が存在して、

$$|\operatorname{grad}(w + H_a)(x)| \neq 0$$

が、$0 < |x| < \varepsilon$ となる任意の $x \in \mathbb{K}^n$ と任意の $a \in U$ に対し成立する。

[(1) ⇒ (2) は明らか。(2) ⇒ (1) は計算による。]

注意. (2) は無限個の条件であるが $|x|$ の位数に関する情報を含んでいない。一方、(1) は 1 つの条件であるが、$|x|$ の位数を含んだ条件なのでより強い情報を持つ。従って ((1) ⇒ (…)), ((…) ⇒ (2)) という形で用い易い。

定義 3. (1) r-jet $w \in J^r_{\mathbb{K}}(n,1)$ が次数 r で C^0-安定（又

は、局所 C^0 (r-1)-既定) とは、0 の $\mathbb{K}^N$ の中の近傍 U が存在して、任意の $a\in U$ に対し w と $w+Ha$ とが C^0 同値になる時いう。

(2) r-jet $w\in J^r(n,1)$ が次数 r で C^∞ 安定 (又は、局所 (r-1)-既定) とは、0 の $\mathbb{R}^N$ の中の近傍 U が存在して、任意の $a\in U$ に対し w と $w+Ha$ とが C^∞ 同値になる時いう。

X, Y を $\mathbb{K}^n$ の部分多様体、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の時は C^1 級、$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の時は C^ω 級とする。更に $X\cap Y=\phi$, $\overline{X}\supset Y$, $y_0\in\overline{X}\cap Y$ としよう。

定義4. (1) 対 (X,Y) が $y_0\in Y$ で Ratio Test (R) を満たすとは、任意の $\varepsilon>0$ に対し、$\mathbb{K}^n$ の中の y_0 の近傍 U が存在して

$$\frac{d(T_xX, T_yY)\,|x-y_0|}{|x-y|}<\varepsilon$$

が、任意の $x\in X\cap U$, $y\in Y\cap U$ に対し成立する時いう。

(2) 対 (X,Y) が $y_0\in Y$ で (w)-regularity を満たすとは、ある数 $C>0$ と $\mathbb{K}^n$ の中の y_0 の近傍 U が存在して

$$d(T_xX, T_yY)<C|x-y|$$

が、任意の $x\in X\cap U$, $y\in Y\cap U$ に対し成立する時いう。

注意. 定義より明らかに (w) $\Rightarrow$ (R) である。(R) は Kuo [20]

(w) は Verdier [33] で導入された条件である。

A を $\mathbb{K}^n$ の中の $X \cup Y$ の近傍とし、$f : A \longrightarrow \mathbb{K}^p$ を $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の時は C^1 級、$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の時は C^ω 級の写像とする。更に $f|_X : X \longrightarrow \mathbb{K}^p$, $f|_Y : Y \longrightarrow \mathbb{K}^p$ は constant rank とする。

定義5. 対 (X, Y) が $y_0 \in Y$ で condition (a_f) を満たすとは、y_0 に収束する X の任意の点列 $\{x_i\}$ に対し、$\ker d(f|X)_{x_i}$ がある平面 K に収束するならば $K \supset \ker d(f|_Y)_{y_0}$ が成立する時いう。

定義6. ここでは $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合だけを考える。

(1) 対 (X, Y) が $y_0 \in Y$ で condition (t_f) を満たすとは、y_0 で $f|_Y$ の fiber と横断的に交わる $\mathbb{R}^n$ の任意の C^1 部分多様体 S に対し、$\mathbb{R}^n$ の中の y_0 の近傍 U が存在して、任意の $x \in X \cap U$ で S と $f|_X$ の fiber は横断的である時いう。

(2) 対 (X, Y) が $y_0 \in Y$ で $(\mathcal{F}^1)$ を満たすとは、y_0 を含む leaf が y_0 で $f|_Y$ の fiber と横断的に交わるような、y_0 の近傍で定義された任意の局所 C^1 foliation $\mathcal{F}$ に対し、$\mathbb{R}^n$ の中の y_0 の近傍 U が存在して、任意の $x \in X \cap U$ で $\mathcal{F}$ の leaf と $f|_X$ の fiber は横断的である時いう。

注意. $p = 0$ の時、即ち $\ker d(f|X)_{x_i} = T_{x_i}X$, $\ker d(f|Y)_{y_0} = T_{y_0}Y$ の時、Thom condition (a_f) は Whitney condition (a)

となり、condition (A_f) は Thom の横断性に関する condition (t) となる。

補題2. (小池[13], Trotman[30], [32])
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の時、条件 (a_f) と (t^1) は同値である。

§1. 実関数の場合.

[1] C^0 同値.

$w \in J^r(n,1)$ に対し、§0 で定義した多項式
$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
を思い起こそう。今、
$X = F^{-1}(0) - \{0\} \times \mathbb{R}^N$, $Y = \{0\} \times \mathbb{R}^N$, $Z = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N - \{0\} \times \mathbb{R}^N$
とおく.

定理A. (Kuiper-Kuo [18], [19], Bochnak-Łojasiewicz [3], Kuo-Lu [21], Brodersen [6])
$w \in J^r(n,1)$ に対し、次の各グループ (I), (II) における条件は同値である。

(I) (1) r-jet $w \in J^r(n,1)$ は C^0-sufficient in $\mathcal{E}_{[r]}(n,1)$.

(2) (L_1).

(3) 対 (X,Y) は、$0\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ で Whitney condition (b) を満たす。

(4) 対 (X,Y) は、$0\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ で Ratio Test を満たす。

(5) 対 (X,Y) は、$0\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ で condition (w) を満たす。

(II) (1) r-jet $w\in J^r(n,1)$ は、C^0-sufficient in $\mathcal{E}_{[r+1]}(n,1)$.

(2) (L_δ)。

(3) 対 (Σ,Y) は、$0\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ で condition (t_F) を満たす.

(4) 対 (X,Y) は、$0\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ で Whitney condition (a) を満たす.

(5) 対 (X,Y) は、$0\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ で condition (t) を満たす。

注意. (II) の条件 (4), (5) の同値性は [21] の中で示されたものだが、証明に "gap" が有り "open problem" である。但し、(2) ⇒ (4) ⇔ (5) は成立している。右側 ⇔ については、下の命題1の注意を参照すること。

命題1. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ とする。この時、次の条件は同値である。但し、$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の時の Y,Σ も $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ と同様のものとする。

(1) (L_1).

(2) 対 (Σ,Y) は、$0\in\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^N$ で condition (a_F) を満たす。

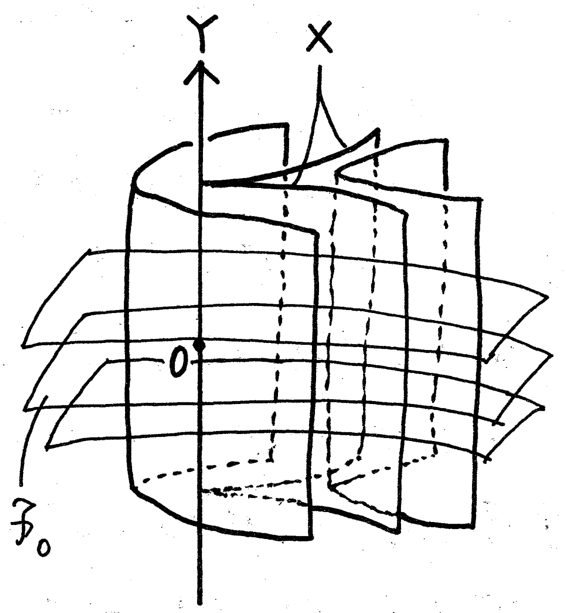
[(1) ⇒ (2): kernel の条件を gradient を用いて書き変える。]

(2)⇒(1)：補題1と curve selection lemma [24] を用いる。

<u>注意</u>. $\mathbb{R}$-subanalytic の場合、(a)⇔(t) である（Trotman [29]）。同じく $\mathbb{R}$-subanalytic の場合に同様の議論を用いて、Trotman は [32] の中で $(a_f)\Leftrightarrow(t_f)$ を証明している。しかし、この場合同様の議論はうまく行かず、結果自体正しくない。定理A、命題1より、今我々の考えている特殊な algebraic な場合には、(a_f)、(t_f) はそれぞれ不等式を伴う条件 (L_1)、(L_δ) と同値であり、又 C^r 級、C^{r+1} 級関数に対する C^0-sufficiency にも同値である。つまり、ある種の"対比"をなしている。

定理A、命題1，補題2より、C^0-sufficiency に関する次の定理を得る：

<u>定理1</u>. $w\in J^r(n,1)$ とし、$\mathcal{F}$ を $0\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ を含む leaf $\mathcal{F}_0$ が 0 で Y と横断的に交わるような $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ の中の 0 の近傍で定義された局所 C^1 foliation とする。上のような任意の C^1 foliation $\mathcal{F}$ に対し、ある $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ の中の 0 の近傍 U が存在して、



F の level surface が $\mathcal{F}$ の任意の leaf (resp. $\mathcal{F}_0$) と $\Sigma \cap U$ の中で横断的である条件は、r-jet $w \in J^r(n,1)$ が C^0-sufficient in $\mathcal{E}_{[r]}(n,1)$ (resp. $\mathcal{E}_{[r+1]}(n,1)$) と同値である。(つまり、今の場合の C^0-sufficiency は、$\mathcal{F}$ の leaf の横断性のみで特徴付けられる。)

Kuo [19]、Chang-Lu [8] の議論を用いることにより、$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ の時、$w \in J^r_{\mathbb{K}}(n,1)$ に対し「$(L_1) \Rightarrow w$ は次数 r で C^0-安定」は容易にわかる。逆、即ち同値は成立するだろうか？この節では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合のみについて述べる。$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は次節に委ねる。

<u>例</u>. (Kucharz)

(E-1)　$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1x_2^5 + x_3^3$ ([16]) とする。

　$u = j^6 h$ は C^0-sufficient in $\mathcal{E}_{[8]}(3,1)$ ...(i),

　$w = j^7 h$ は C^0-sufficient in $\mathcal{E}_{[7]}(3,1)$ でない ...(ii)。

(E-2)　$w = x^3 + 3x^3y^3 + 3xy^{10} \in J^{11}(2,1)$ ([17]) とする。

　w は C^0-sufficient in $\mathcal{E}_{[13]}(2,1)$,

　w は C^0-sufficient in $\mathcal{E}_{[12]}(2,1)$ でない。

<u>主張</u>. ある r-jet $w \in J^r(n,1)$ とある整数 $s \geq 1$ が存在して、w は C^0-sufficient in $P_{[r+s]}(n,1)$ であるが C^0-sufficient

in $\mathcal{E}_{[r+s]}(n,1)$ でないとする。その時、ある k-jet $v \in J^k(n,1)$ が存在して、v は次数 k で C^0-安定だが、(L_1) は満たさない。
[証明は小池-Kucharz [15] と似た議論を用いる。]

次数 r で C^0-安定だが (L_1) を満たさない例.

(E-1)：(i) より w は次数 7 で C^0-安定。
(ii) と定理 A より、w は (L_1) を満たさない。

(E-2)：主張より、ある k-jet $v \in J^k(2,1)$ でそのような例が存在する。厳密には、ある 2 変数 12 次の斉次多項式 H が存在して

$$v = x^3 + 3x^3y^3 + 3xy^{10} + H \in J^{12}(2,1)$$

とおく時、v は次数 12 で C^0-安定だが (L_1) を満たさない。

従って、$w \in J^r_{\mathbb{R}}(n,1)$ に関して次の事が自然に問題になる。

問題 1. "次数 r で C^0-安定" の特徴付けを見つけよ!!

その第一歩として、

問題 2. 次数 r で C^0-安定なら孤立特異点を持つか？

[2] C^∞-同値.

補題 3. (Martinet, 泉屋) $w \in J^r(n,1)$ に対し、次の条

件は同値である。

(1) r-jet $w \in J^r(n,1)$ は C^∞-sufficient in $\mathcal{E}_{[\infty]}(n,1)$。

(2) 任意の $z \in \pi_{r+1}^{-1}(w)$ が条件(𝒹)を満たす。

但し、$\pi_{r+1} : J^{r+1}(n,1) \longrightarrow J^r(n,1)$ は自然な射影とする。

<u>定理B</u>. (Stefan) $w \in J^r(n,1)$ に対し、次の条件は同値である。

(1) r-jet $w \in J^r(n,1)$ は次数 r で C^∞-安定。

(2) w は条件(𝒹)を満たす。

<u>注意</u>. $\pi_r^{-1}(j^{r-1}(w)) \triangleq \mathbb{R}^N$ と同一視しよう。この時、集合

$$\{ v \in \mathbb{R}^N \mid v \text{は条件(𝒹)を満たさない。} \}$$

は $\mathbb{R}^N$ の代数的集合、従って閉集合である。この事実から、Mather の有名な"有限既定性"に関する論文[23]と全く平行な議論で定理Bは直ちにわかる。

補題3、定理Bについては[25]も参照のこと。

補題3と定理Bより、

<u>系</u>. r-jet $w \in J^r(n,1)$ に対し、次の条件は同値である。

(1) $w \in J^r(n,1)$ は C^∞-sufficient in $\mathcal{E}_{[\infty]}(n,1)$.

(2) $w \in J^r(n,1)$ は C^∞-sufficient in $P_{[r+1]}(n,1)$.

<u>注意</u>. この系は C^0-同値の主張に対応している。

次に条件 (∂) と (L_1), (L_δ) の関係について次を得る。

<u>命題2</u>. $w \in J^r(n,1)$ に対し、次の事実が成立する。

(1) 条件 (∂) を満たすならば、条件 (L_1) を満たす。

(2) $w \in J^r(n,1)$ が C^∞-sufficient in $\mathcal{E}_{[\infty]}(n,1)$ でも条件 (L_1) を満たさないものが存在する。

(3) $w \in J^r(n,1)$ が C^∞-sufficient in $\mathcal{E}_{[\infty]}(n,1)$ ならば、条件 (L_δ) を満たす。

[(1) 計算により示される。

(2) 条件 (∂) は満たさないが 4-既定である Siersma [26] による例、$w = x^3 - 3xy^3 \in J^4(2,1)$ がこの例となっている。

(3) (1) と補題3より。]

§2. 複素関数の場合.

[1] C^0-同値.

<u>定理C</u>. (Chang-Lu [8], Bochnak-Kucharz [2], Teissier [28])

$w \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$ に対し、次の条件は同値である。

(1) (L_δ).

(2) r-jet $w \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$ は C^0-sufficient in $\mathcal{H}(n,1)$.

定理A，Cより、実数の場合の(L_1)，(L_δ)，複素数の場合の(L_δ)は、C^0-sufficiencyの特徴付けになっている。一方，複素数の場合の(L_1)はどういう意味を持つだろうか。今§1と同様に、$w \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$とし

$F:(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N, 0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$，$Y=\{0\}\times\mathbb{C}^N$，$\Sigma = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N - \{0\}\times\mathbb{C}^N$

とする。

<u>定理2</u>．$w \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$に対し、次の条件は同値である。

(1) (L_1)．

(2) r-jet $w \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$は，次数$r$で$C^0$-安定．

(3) 対(Σ, Y)は、$0 \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$でcondition (a_F)を満たす．

［(1)⇔(3)は命題1，(1)⇒(2)も既に述べたように明らか．
(2)⇒(1)はZariski予想（下の注意）の部分解と補題1、位相不変⇒μ-不変（Teissier［27］）を用いて示した。Teissier［28］の議論を用いた証明も考えられる。］

<u>注意</u>．（超曲面の重複度に関するZariski予想［35］）

「A，Bを$\mathbb{C}^n$の超曲面とし、$p \in A$，$p' \in B$とする。A，Bがp，p'の周りで局所的に埋め込まれた超曲面として位相同型ならば、$\mathrm{mult}_p(A) = \mathrm{mult}_{p'}(B)$である．ここで$\mathrm{mult}_*(\ )$は$*$における$(\ )$の重複度を表わす。」

曲線の場合には、Zariski［36］によって示された。この予

想の部分解については Gau-Lipman [9] の序文、Lê-Teissier [22] を参照のこと。

$J^r_{\mathbb{R}}(n,1) \subset J^{r+1}_{\mathbb{R}}(n,1)$ と見ることにした時、次の事実が成立している：

(1) $w \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$ に対し、定理Aより

次数 r で C^0 安定 $\Rightarrow$ 次数 $r+1$ で C^0 安定。

(2) $w \in J^r_{\mathbb{R}}(n,1)$ に対し、定理Bより

次数 r で C^∞ 安定 $\Rightarrow$ 次数 $r+1$ で C^∞ 安定。

<u>問題3</u>. $w \in J^r_{\mathbb{R}}(n,1)$ に対し、

次数 r で C^0 安定 $\Rightarrow$ 次数 $r+1$ で C^0 安定か？

<u>注意</u>. 何が起こっても不思議に感じられない実数(real)の特異点の問題だから、反例が存在するかもしれない。でも少し信じ難い。

[2] 問題.

<u>定理 (b)-(R)-(w)</u>. 左の各正則性条件について次の関係が成立している。

(1) $\mathbb{R}$-subanalytic の場合.

$$\begin{tikzcd}
(w) \arrow[r, shift left] & (R) \arrow[l, shift left, "\times"', "(ii)"] \arrow[r, shift left, "(i)"] & (b) \arrow[l, shift left, "\times"', "(iii)"]
\end{tikzcd}.$$

((i) は Kuo [20]、(ii), (iii) は Brodersen-Trotman [7])

(2) $\mathbb{C}$-analytic の場合、

$$(w) \Longleftrightarrow (R) \Longleftrightarrow (b) .$$

(Henry-Merle [12], Teissier, Navarro ; [31] も参照)

定理 (b)-(R)-(w) より、複素数の場合の (b)-regularity は実数の場合のものより強い情報を持っていることがわかる。特に超曲面の場合には、variety が回りの level surface の情報をも支配しているのではないだろうか？（例えば $(b) \Rightarrow (a_f)$ のような!!）

問題. $F : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を C^ω 級関数とする。
$F^{-1}(0) = \bigcup_{i=0}^{\ell} S_i$ を Whitney stratification、但し $S_0 = F^{-1}(0) - \Sigma F$（非特異部分）とする。この時、任意の $i = 1, \cdots, \ell$ に対し対 $(\mathbb{C}^n - F^{-1}(0), S_i)$（又は $(\mathbb{C}^n - \Sigma F, S_i)$）は (a_F)-regular か？

注意. (1) 逆問題 (a_f)-regular ならば (b)-regular か、という問題は正しくない。"位相自明だが (b)-regularity を満たさない" 又 "μ-constant だが μ^*-constant（[27] を参照）でない" 例として有名な Briançon-Speder [4] の例

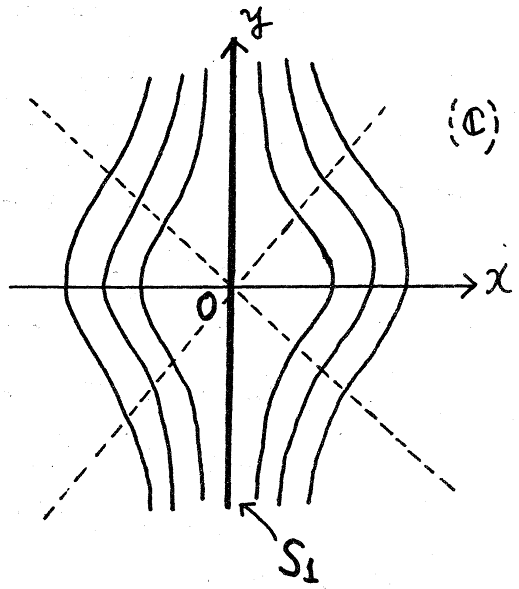
$$F(x, y, z ; t) = z^5 + t y^6 z + y^7 x + x^{15}$$

が、この逆問題の反例になっている。

(2) Hamm-Lê [11] にもこの問題に関連した記述がある。

(3) 実数の場合には "bump" が起こるが、複素数の場合には起こらない。

$f = x^2(x^2+y^2)$ とする。



① 実数の時：$f^{-1}(0) = \Sigma f = \{y\text{-軸}\}$.

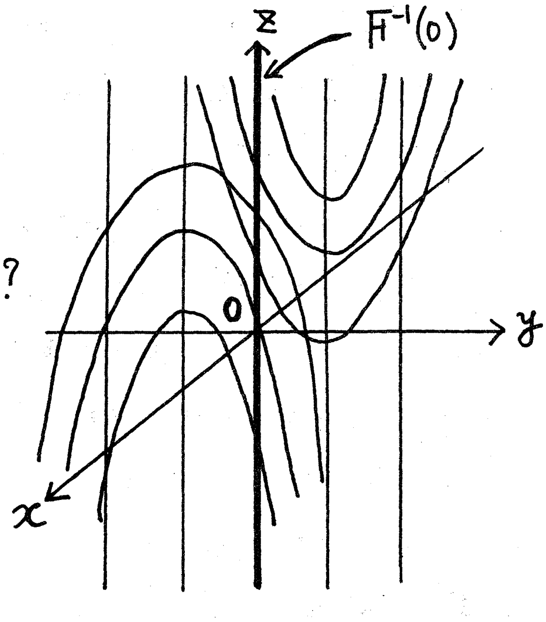
$f^{-1}(0) = \{S_1\}$；自明な stratification.

一方、$0 \in \mathbb{R}^2$ で (a_f)-regular でない。

つまり、(b) $\not\Rightarrow$ (a_f) である。

② 複素数の時：$f^{-1}(0) \supset \{y\text{-軸}\} \ni 0$ であるが、$0 \in \mathbb{C}^2$ は実数の場合と違って y-軸の特別な点である。

(4) 関数の場合であるというのは本質的である。つまり、囲りの level surface が余次元1という状態で支配されているのではないか？



$F : (\mathbb{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ を

$F(x, y, z) = (x, y^2 + xz)$

で定義する。この時、右図からわかるように、variety $F^{-1}(0)$ は囲りの level surface に今考えている意味（level surface の並び方）では何の影響も与えていない。

References

[1] J. Bochnak : Relèvements des jets, Lecture Notes in Math., vol. 275, pp. 106-118, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[2] J. Bochnak, W. Kucharz : Sur les germs d'applications différentiables à singularités isolées, Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), 115-131.

[3] J. Bochnak, S. Łojasiewicz : A converse of the Kuiper-Kuo theorem, Lect. Notes in Math., vol. 192, pp. 254-261, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[4] J. Briançon, J. P. Speder : La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney, C. R. Acad. Sc., Paris, 280 (1975), 365-367.

[5] T. H. Bröcker : Differentiable germs and Catastrophes, London Math. Soc. Lect. Notes Series 17, Cambridge Univ. Press.

[6] H. Brodersen : A note on sufficient and non-sufficient jets, J. London Math. Soc., 27(2) (1983), 167-175.

[7] H. Brodersen, D. J. A. Trotman : Whitney (b)-regularity is weaker than Kuo's Ratio Test for real algebraic stratifications, Math. Scand. 45 (1979), 27-34.

[8] S. H. Chang, Y. C. Lu : On C^0-sufficiency of complex jets, Canad. J. Math. 25 (1973), 874-880.

[9] Y. N. Gau, J. Lipman : Differential invariance of multiplicity on analytic varieties, Invent. Math. 73 (1983), 165-188.

[10] P. Griffiths, J. Harris : Principles of algebraic geometry, J. Wiley, New York, 1978.

[11] H. A. Hamm, Lê D. T. : Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^e Serie t. 6 (1973), 317-366.

[12] J. P. G. Henry, M. Merle : Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka, Proc. of Sympo. in Pure Math., 40 (1983), Part I,

575-584.

[13] S. Koike : On condition (a_f) of a stratified mapping, Ann. Inst. Fourier 33(1) (1983), 177-184.

[14] S. Koike : Łojasiewicz inequalities on gradient of functions, preprint.

[15] S. Koike, W. Kucharz : Sur les réalisations de jets non-suffisants, C. R. Acad. Sc., Paris, 288 (1979), 457-459.

[16] W. Kucharz : Examples in the theory of sufficiency of jets, Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), 163-166.

[17] W. Kucharz : Letter to T. C. Kuo.

[18] N. Kuiper : C^1-equivalence of functions near isolated critical points, Symposium Infinite Dimensional Topology (Baton Rouge 1967), Annals of Math. Studies, no. 69, pp. 199-218, 1972.

[19] T. C. Kuo : On C^0-sufficiency of jets of potential functions, Topology 8 (1969), 167-171.

[20] T. C. Kuo : The ratio test for analytic Whitney stratifications, Lect. Notes in Math., vol. 192, pp. 141-149, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[21] T. C. Kuo, Y. C. Lu : Sufficiency of jets via stratification theory, Invent. Math. 57 (1980), 219-226.

[22] Lê D. T., B. Teissier : Report on the problem session, Proc. Symp. in Pure Math. 40(2) (1983), 105-116.

[23] J. N. Mather : Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined map-germs, Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968), 127-156.

[24] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies, no. 61, 1968.

[25] T. Poston, I. N. Stewart : Catastrophe theory and its applications, Pitman, London-San Francisco-Merbourne, 1978.

[26] D. Siersma : The singularities of C^∞ functions of right-codimension smaller or equal than eight, Indag. Math., 35(1) (1973), 31-37.

[27] B. Teissier : Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, Astérisque 7-8 (1973), 285-362.

[28] B. Teissier : Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces, Invent. Math. 40 (1977), 267-292.

[29] D. J. A. Trotman : A transversality property weaker than Whitney (a)-regularity, Bull. London Math. Soc. 8 (1976), 225-228.

[30] D. J. A. Trotman : Geometric versions of Whitney regulatiry for smooth stratifications, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 12 (1979), 453-463.

[31] D. J. A. Trotman : Comparing regularity conditions on stratifications, Proc. Symp. in Pure Math. 40(2) (1983), 575-586.

[32] D. J. A. Trotman : Whitney stratifications : faults and detectors, Doctoral Thesis, Warwick (1977).

[33] J.-L. Verdier : Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Invent. Math. 36 (1976), 295-312.

[34] C. T. C. Wall : Finite determinancy of smooth map-germs, Bull. London Math. Soc. 13 (1981), 481-539.

[35] O. Zariski : Some open questions in the theory of singularities, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 481-491.

[36] O. Zariski : On the topology of algebroid singularities, Amer. J. Math. 54 (1932), 453-465.