数理解析研究所講究録
第 620 巻 1987 年 75-82

Surface embedding in $\mathbb{R}^4$ と critical point の個数の関係について

広島大 理　関根光弘 (Mituhiro Sekine)

§0.

M^2 を connected, closed, oriented で genus g の 2-mfd とし, $f: M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ を embedding とする。$\mathbb{R}^4$ に座標軸を固定し, その1つの軸へのprojection を $p: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ とする。このとき, smooth function $p \circ f: M^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ は, f を $\mathbb{R}^4$ の微小な isotopy で動かすことにより, Morse function にすることができる。それをあらためて f と書き, $p \circ f = h$ とおく。h の critical point の個数 (これを以下 C_h と書く。) と, f の isotopy type には, 一般には何の関係もないが C_h が小さいとき (とくに, 最小) 制約がつくであろうことが予想される。以下, この問題について簡単な考察を行なう。なお, §1, §2 における, M, f, p, h, C_h などの用語は全て上の通りとする。

§1. $M=S^2$ の場合

$M=S^2$ の場合，Morse の不等式により，C_h のとりうる値を小さい順に2つあげると，2と4になる。$C_h=2$ のとき，$h=p\circ f\,;S^2\longrightarrow \mathbb{R}$ とすると f の isotopy type が standard であることは，よく知られる。

[注意] $f\,;M^2\longrightarrow \mathbb{R}^4$ なる embedding の isotopy type が standard であるとは，$f(M^2)$ が $\mathbb{R}^4$ 内で genus g の solid handlebody によって bound されることとする。[H-K]

$C_h=4$ のとき，f の isotopy type は，やはり standard であることが Scharlemann によって証明されている。[S. 1]

§2. $M=T^2$ の場合

$M=T^2$ の場合，C_h の最小値は4である。そこで次の問題を考える。

問1.　$C_h=4$ とする。($h=p\circ f\,;T^2\longrightarrow \mathbb{R}$) このとき，$f$ の isotopy type は standard か？

[K ; problem 4.30]

[注意] h の indices は，0が1コ，1が2コ，2が1コであるから，$\mathbb{R}^4-f(T^2)$ の handle 分解を考えれば，1-handle 1コから成り立っている。さらに $H_1(\mathbb{R}^4-f(T^2);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ なので，$\pi_1(\mathbb{R}^4-f(T^2))\cong\mathbb{Z}$ である。

従って問1に対する反例が，もし存在するならば，complement の $\pi_1 = \mathbb{Z}$ となる knotted torus in $\mathbb{R}^4$ である。

$C_h = 4$ とする。$h: T^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ の critical point で，index 0 のものを c_1，index 1 のものを c_2, c_3，index 2 のものを c_4 とおくとき，$h(c_1) < h(c_2) < h(c_3) < h(c_4)$ と仮定してよい。いま，$h(c_1) < c_1' < h(c_2) < c_2' < h(c_3) < c_3' < h(c_4)$ となるように c_1', c_2', c_3' をとる。$t \in h(T^2) \subset \mathbb{R}$ に対し，$K_t = f \circ h^{-1}(t)$ in $p^{-1}(t) \cong \mathbb{R}^3$ の様子をみると，$K_{c_1'}$, $K_{c_3'}$ は $\mathbb{R}^3$ 内の unknot，$K_{c_2'}$ は $\mathbb{R}^3$ 内の 2-component link である。t を c_2' から c_1' へ連続的に減少させると，$K_{c_2'}$ に，ある fusion band b がつき，やがて $K_{c_1'}$ になる。（t を c_2' から c_3' へ連続的に増加させれば，$K_{c_2'}$ にある fusion band $\tilde{b}$ がつき，やがて $K_{c_3'}$ になる。）

そこで，次の問題が考えられる。

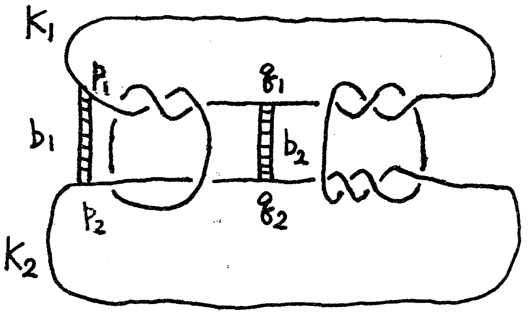
問2. 2-component link $L = K \cup K'$ in $\mathbb{R}^3$ と band b_1, b_2 があって，L を b_1, b_2 で fusion したものをそれぞれ，K_1, K_2 とする。K_1, K_2 が，どちらも unknot であるとき，b_1 と b_2 は isotopic か？

この問2が肯定的であれば，問1も肯定的である。

（cf.[S. 2 ; p.258 Lemma 2.5]）

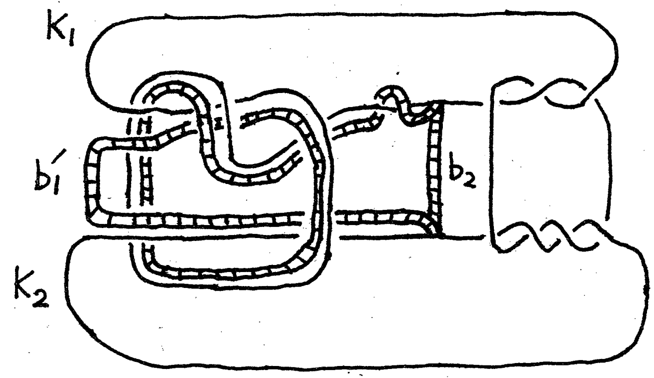
しかし,研究集会中に,河内先生,鈴木先生,中西先生,丸本先生により,それぞれ,問2に対する反例候補が示された。その中で,中西先生の示された例に対し,問2の反例となっていることが証明できたので,以下,これについて述べることにする。

$L = K_1 \cup K_2$ と,band b_1, b_2 を次のようなものとする。

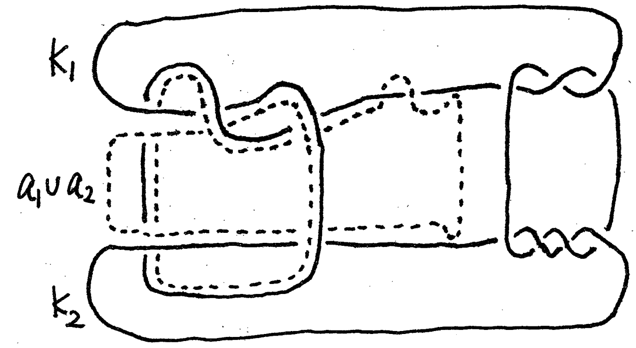


(図.1)

b_1の一端p_1をK_1上すべらせることにより,q_1の位置に動かし.同様に.b_1のもう一方の端p_2をK_2上すべらせることによりq_2の位置に動かす。こうして得られたb_1とisotopicなbandをb_1'とする。(図.2).さらに,b_1'の中心線がつくるarcをa_1,b_2の中心線がつくるarcをa_2とすると,$a_1 \cup a_2$は$R^3 - L$のsimple closed curveとなる(図.3)が,それが$R^3 - L$においてnull homotopicでないことを示せば,b_1とb_2はisotopicでない。



(図.2)



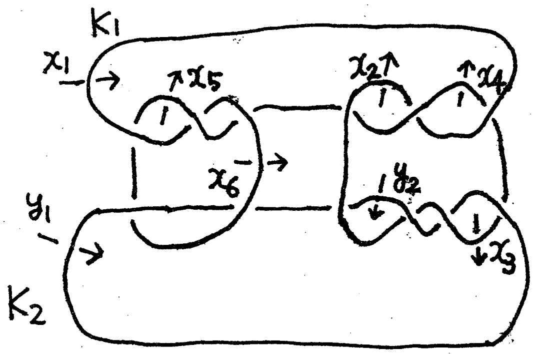
(図. 3)

いま, $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 - L)$ は, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2$ を generator とし, $y_1 x_3 y_1^{-1} x_1 = x_1 x_4 = x_4 x_2$,

$$x_2 x_6^{-1} y_1 x_6 = y_2 x_2 = x_3 y_2 = y_1 x_3,$$

$$x_6 x_2^{-1} x_4 x_2 = x_5 x_6 = x_1 x_5,$$

$x_1 x_5 x_1^{-1} y_1 = y_1 x_6$ なる relation をもつ group である。ただし, x_i, y_j は, 下の通りである。



(図.4)

$a_1 \cup a_2$ が表すGの元Wは、bandのK_1, K_2へのからみをそれぞれ一ヵ所に集めてしまうことにより、

$$W = x_1^{\alpha} u_1 u_2^{n} u_3 u_4^{n'} y_1^{\beta}$$ と書ける。

（ただし、$u_1 = x_4 y_2^{-1} y_1^{-1} x_1 x_2$, $u_2 = x_6^{-1} x_1^{-1} y_1 x_5^{-1} x_4 y_2^{-1} y_1^{-1} x_1 x_2$,
$u_3 = x_2^{-1} x_3^{-1}$, $u_4 = x_6 x_2^{-1} x_3^{-1}$, $\alpha, \beta, n, n' \in \mathbb{Z}$ とする。）

これらが全てGの中でnontrivialであることをいえばよい。

まず、Hurewicz homomorphism $\varphi : G \longrightarrow H_1(\mathbb{R}^3 - L : \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ により、$\varphi(W) = (\alpha + 1 - n', -2 - n + \beta)$ となるので、$\alpha = n' - 1$, $\beta = n + 2$ のとき、すなわち $W = x_1^{n'-1} u_1 u_2^{n} u_3 u_4^{n'} y_1^{n+2}$ について考えればよい。そこで、$\phi : G \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$ なるhomomorphismを次のように定義する。

$\phi(x_i) = A_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $\phi(y_j) = B_j$ $(j = 1, 2)$ とし、

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_3 = \begin{bmatrix} \omega & \omega \\ 0 & \omega^2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & \omega^2 \\ -\omega & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -1 & \omega \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} \omega^2 & \omega^2 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（ただし、ωは1の原始3乗根）とする。

すると、計算により、$\phi(W) = A_1^{n'-1} \begin{bmatrix} -\omega & -\omega \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n'}$

となる。ここで、A_1のorderは3であるから、

$n' \equiv 1 \ (3)$ のとき、 $\phi(W) = \begin{bmatrix} -\omega & n' - \omega \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix}$

$n' \equiv 2\ (3)$ のとき，　$\phi(W) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ \omega & -n'-1 \end{bmatrix}$

$n' \equiv 0\ (3)$ のとき，　$\phi(W) = \begin{bmatrix} \omega & -n'-1 \\ -\omega & n'-\omega \end{bmatrix}$

となり，どの場合にも，$\phi(W) \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
従って以上より，この例が問2の反例であることが示された。

この例の L, b_1, b_2 を用いることにより，次のような2つの torus in R^4 を構成する。(ただし，用語は，3ページと同じとする。)

(i)　$K_{c_2'} = L$，　$K_{c_1'} = K_{c_3'} = $ unknot で，$K_{c_2'} \longrightarrow K_{c_1'}$ $K_{c_2'} \longrightarrow K_{c_3'}$ なる変化は，どちらも fusion band b_1 によるものであるような torus

(ii)　$K_{c_2'} = L$，　$K_{c_1'} = K_{c_3'} = $ unknot で，$K_{c_2'} \longrightarrow K_{c_1'}$ は，fusion band b_1 による変化，$K_{c_2'} \longrightarrow K_{c_3'}$ は，fusion band b_2 による変化であるような torus

(i)の torus は isotopy type が standard であるが，(ii)の torus の isotopy type について筆者には何もわかっていない。

参考文献

[H-K] F. Hosokawa and A. Kawauchi
Proposals for unknotted surfaces in four-spaces
Osaka J. Math. 16 (1979) 233 − 248

[K] R. Kirby
Problems in low dimensional manifold theory
Proc. Symp. Pure. Math 32 (1978) 273 − 312

[S. 1] M. Scharlemann
Smooth spheres in $\mathbb{R}^4$ with four critical points are standard
Invent. Math 79 (1985) 125 − 141

[S. 2] S. Suzuki
Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere
Math. Sem. Notes Kobe Univ 4 (1976) 241 − 371