数理解析研究所講究録
第 620 巻 1987 年 113-135

Knots in the stable 4-space

大阪市大・理　河内明夫(Akio Kawauchi)

なめらかな有向連結$(n+2)$次元多様体 W に対し，その内部になめらかに埋め込まれた null-homotopic 有向 n次元球面を W 内の <u>knot</u> という。null-homotopic という条件をつけない時，W 内の <u>一般knot</u> という。互いに交わらない有限個の W 内の knots の和を W 内の <u>link</u> (一般 knots の和の場合，<u>一般link</u>) という。2つの W 内の一般links L_1, L_2 に対し，W 上の向き保存微分同相写像で，L_1 を L_2 に向きを保存して移すようなものが存在する時，L_1 と L_2 は <u>同値である</u>といい，その同値類を <u>型</u> という。いわゆる knot 理論とは，この型の分類の研究をさしている。4次元トーラスと $S^2\times S^2$ の connected sum の普遍被覆空間に微分同相な4次元多様体を <u>安定4次元空間</u> (stable 4-space) といい，SR^4 で表わす。この空間は R^4 に可算無限の $S^2\times S^2$ を connected sum することにより得られる。この報告では，SR^4 内の link の性質のうち，R^4 (又は S^4) 内の link について知られていない，あるいは存在

しないような性質を中心に研究する。目次は以下の通りであるが，安定4次元空間の性質については，[Ka1]で述べたので，§1は省略することにした。

[目次]

§2. link の群.

なめらか有向連結 $(n+2)$ 次元多様体 W 内の一般 link L に対し，W 内になめらかに埋め込まれた次のような $(n+1)$ 次元コンパクト有向多様体 V を L の（1つの）Seifert 多様体という：$\partial V = L$ かつ V は閉多様体を成分に含まない。一般 link が必ずしも Seifert 多様体を持たないことは明らかであ

るが，link は必ず Seifert 多様体を持つことがわかる. いくつかの $(n+1)$次元球体の直和に微分同相な Seifert 多様体をもつ link $L\subset W$ は trivial であるという.

SR^4 内の一般 link について考える.

$\boxed{\text{定義}}$ SR^4 内の link L に対して，その Seifert 多様体として $\#_m S^1\times S^2 - \mathring{B}^3$ に微分同相なものがとれる時，その link $L\subset SR^4$ を G-ribbon link という.

$\boxed{\text{定義}}$ L を含むような，SR^4 内のなめらかコンパクト4次元部分多様体 W で $\partial W\cong S^3$ となるものを，一般 link $L\subset SR^4$ の support という. また，∂W にそって B^4 をはりつけたもの: $W^+=W\cup B^4$ を一般 link $L\subset SR^4$ の閉 support という.

各一般 link $L\subset SR^4$ に対して，support W が存在することは明らかである. $\partial W\cong S^3$ だから，van Kampen 定理によって W は単連結となることがわかる. 各 link $L\subset SR^4$ に対し，$L\subset W$ (又は W^+) は link となる. もとの一般 link $L\subset SR^4$ は一般 link $L\subset W$ (又は W^+) から stabilization により得られたということもある. その理由は，$SR^4-\mathring{W}$ は必ず $SR^4-\mathring{B}^4$ に微分同相になり (cf. [Ka1])，従って，一般 link $L\subset SR^4$ は，$\mathring{W}$ に可算無限個の $S^2\times S^2$ を connected sum して $L\subset W$

から得られたと解せるからである. SR^4 内の一般 link L に対し, $G(L)=\pi_1(SR^4-L)$ をその<u>群</u>という. ある群 G の元 $x_1,\cdots,x_s$ に対し, $(x_1,\cdots,x_s)^G$ によって, 元 $x_1,\cdots,x_s$ の G での normal closure を表わすことにする.

定理 2.1 r 成分の link $L\subset SR^4$ の群 $G(L)$ は, その meridians $m_1,m_2,\cdots,m_r$ に対して $(m_1,m_2,\cdots,m_r)^{G(L)}=G(L)$ かつ $H_1(G(L))\cong\bigoplus_r Z$ となるような有限表示群である. さらに, $(m_1,m_2,\cdots,m_r)^G=G$ かつ $H_1(G)\cong\bigoplus_r Z$ となる任意の有限表示群 G と元 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ に対し, G をその群としかつ $m_1,m_2,\cdots,m_r$ を meridians とするような r 成分の G-ribbon link $L\subset SR^4$ が存在する.

次は任意の有限表示群は SR^4 内の一般 link の群として実現できることを示している:

定理 2.1' r 成分の一般 link $L\subset SR^4$ の群 $G(L)$ は, その meridians $m_1,m_2,\cdots,m_r$ に対して $(m_1,m_2,\cdots,m_r)^{G(L)}=G(L)$ となるような有限表示群である. さらに, 任意の有限表示群

Gと $(m_1, m_2, \cdots, m_r)^G = G$ となる元 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ に対して，G をその群とし，かつ $m_1, m_2, \cdots, m_r$ を meridians とする r 成分の一般 link $L \subset SR^4$ が存在する．

G-ribbon link $L \subset SR^4$ は trivial 法バンドルを持つある一般 link $L^* \subset SR^4$ から次の操作で得られる link と言いかえることができる：collar $L^* \times [0,1] \subset SR^4$ の境界である一般 link $\partial(L^* \times [0,1]) \subset SR^4$ に fusion（つまり 1-handles に関した surgery）を行う…<u>操作(A)</u>という．

$\boxed{\text{定義}}$ $SR^4 = R^4 \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S_i^2$ と表わした場合に，R^4 内の trivial link といくつかの $S^2 \times S_i^2$ の factors の和である一般 link に同値な L^* から操作(A)で得られる link $L \subset \Sigma$ を <u>Q-ribbon link</u> という．（$p \times S^2$ 又は $S^2 \times p$ $(p \in S^2)$ を $S^2 \times S^2$ の factor という．）

$\boxed{\text{定理 2.2}}$ Q-ribbon link の群の class は R^4 内のなめらかに埋め込まれた有向閉曲面の群の class と一致する．さらに，Q-ribbon link の群でない（G-ribbon）link の群が多数存在する．

trivial link である L^* から操作(A)で得られる link $L \subset SR^4$ を ribbon link という。これは R^4 内の通例の ribbon link の SR^4 への stabilization と考えられる。特に、R^4 及び SR^4 内の ribbon links の群の classes は一致する。

link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ に対し、積 $S^1 \times (S^3, k_1 \cup \cdots \cup k_r)$ を考える。S^3 内の互いに交わらない3-球 $B_1, \ldots, B_r$ で $B_i \cap k_i$, $i=1,2,\ldots,r$, が B_i で unknotted arc となるものをとる。$S^1 \times B_i$ を $D^2 \times \partial B_i$ でおきかえる surgery により $S^1 \times k_1 \cup \cdots \cup S^1 \times k_r \subset S^1 \times S^3$ から r 成分 link $L' \subset \#_{r-1} S^2 \times S^2$ を得る。

(定義) $\#_{r-1} S^2 \times S^2$ の SR^4 への stabilization により L' から得られる link $L \subset SR^4$ を link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ の surgery-spun link という。

(定理2.3) surgery-spun link $L \subset SR^4$ が link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ から得られているとする。その時次が成りたつ：

(0) link $L \subset SR^4$ の型は link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ の型により一意に決まる，

(1) 自然な meridian 保存同型 $\pi_1(S^3 - k_1 \cup \cdots \cup k_r) \cong G(L)$ が存在する，

(2) $L \subset SR^4$ は Q-ribbon link である,

(3) L の各成分は SR^4 内のある 4-球内に,対応する成分k_i の spun knot として,入ることができる.

定義 次の性質をもつ link $L \subset SR^4$ を *flexible* という:
任意の写像 $f: S^2 \to SR^4$ が $f'S^2 \cap L = \phi$ となる写像 $f': S^2 \to SR^4$ に homotopic になる.

補題2.4 link $L \subset SR^4$ が flexible となる必要十分条件は $H_2(G(L)) = 0$ となることである.

系 link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ の surgery-spun link $L \subset SR^4$ に対して次は同値:

(1) $L \subset SR^4$ は flexible,

(2) $L \subset SR^4$ は SR^4 内のある 4-球に入る,

(3) $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ は completely splittable.

定理2.2 と例えば Litherland [Lit] の結果により,次がわかる:

系 各 $r \geq 1$ に対し, r 成分の flexible でない Q-ribbon links が無数存在する.

定理2.1とKervaireの結果[Ke1]により次がわかる:

系 flexible linksの群のclassは S^{n+2} $(n\geqq 3)$ 内のlinksの群のclassと一致する.

この系とYajima [Y1], [Y2]の結果により次が出る:

系 flexible linkの群はQ-ribbon linkの群である.

§3で述べるように, SR^4内のlinkのtorsion pairing invariantによって, 次がわかる: G-ribbonでない(従ってQ-ribbonでない) flexible linksが多数存在する。

§3. torsion pairing invariant.

Hを無限巡回群$\langle t\rangle$の整数環$\Lambda=Z\langle t\rangle$上の有限生成加群とする. DHによって, Hの最大の有限Λ-部分加群を表わす(cf. [Ka2])。THをHのΛ-torsion部分とし, $BH=H/TH$とおく. $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(H,\Lambda)$を$E^1H$と書く. link $L\subset SR^4$に対し, $E(L)=SR^4-L$とおく. Lの各meridianをtに写すepimorphism $\pi_1(E(L))\longrightarrow\langle t\rangle$に

付随した被覆を $\tilde{E}(L)$ と書く時，$H_1(\tilde{E}(L))$ は有限生成 Λ-加群である (cf. 定理2.1)。次の定理は [Ka2] の第2双対定理の帰結である：

定理3.1 各 link $L \subset SR^4$ に対し，次の (1) と (2) を満たすような t-isometric, symmetric, non-singular pairing $\ell : D(L) \times D(L) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が存在する：

(1) $(D(L), \ell)$ は link の型の invariant である，

(2) link の型で不変な t-反 epimorphism

$$\theta : DH_1(\tilde{E}(L)) \to E^1(BH_2(\tilde{E}(L)))$$

が存在し，$D(L)$ はその kernel に等しい。

注意 S^4 内の knot K の SR^4 への stabilization を $\bar{K} \subset SR^4$ と表わす時，この pairing $\ell : D(\bar{K}) \times D(\bar{K}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は knot $K \subset S^4$ の Farber/Levine pairing (Farber [F], Levine [Lev]) と一致する.

注意 $L \subset SR^4$ が G-ribbon link ならば，$D(L) = 0$ となる。

S^4 内の knot について Levine [Lev] が呼んでいたように

$(D(L), \ell)$ を link $L \subset SR^4$ の <u>torsion pairing</u> と呼ぶことにする。上の注意により，次がわかる：

$\boxed{系}$ 各 $r \geqq 1$ に対し，G-ribbon でない r 成分の flexible 及び non-flexible links が多数存在する。

knot $K \subset SR^4$ に対して，$t-1 : H_1(\tilde{E}(K)) \cong H_1(\tilde{E}(K))$，従って $t-1 : D(K) \cong D(K)$ となるので，次は SR^4 内の knots の torsion pairings を特徴づける：

$\boxed{定理3.2}$ $t-1 : D \cong D$ となる任意の有限 Λ-加群 D とその上の任意の t-Isometric, symmetric, non-singular pairing $\ell_D : D \times D \to Q/Z$ に対し，Λ-同型 $(D, \ell_D) \cong (H_1(\tilde{E}(K)), \ell)$ をもつ knot $K \subset SR^4$ が存在する。

$\boxed{注意}$ 多くの (D, ℓ_D) は S^4 内の knot により実現できる (cf. Zeeman [Z]) が，すべての (D, ℓ_D) が S^4 内の knot で実現できるかどうか知られていない (cf. Levine [Lev])。

§4. 極小 Seifert 多様体をもてない knots とその supporting degree.

なめらかな有向連結 $(n+2)$ 次元多様体 W 内の一般 link L が Seifert 多様体 V を持っていたと仮定する.

定義 V の各連結成分 V_j に対して, $\pi_1(\mathring{V}_j) \to \pi_1(W-L)$ が 1:1 になる時, Seifert 多様体 V は <u>極小</u> であるという.

$n=1$ のとき, W 内の Seifert 曲面をもつ一般 link は必ず極小 Seifert 曲面をもつ. これは loop 定理からよく知られていることである.

命題 4.1 $n \geqq 3$ で W がコンパクトの場合, Seifert 多様体をもつ W 内の一般 link は必ず極小 Seifert 多様体をもつ.

この証明は Gutiérrez [G, Lemma 1] と同様にしてできる. SR^4 内の link L が極小 Seifert 多様体を持つのは, L のある support W の中で極小 Seifert 多様体をもつ

時であり，しかもその時に限る。

$\boxed{命題4.2}$ S^3 内の任意の link の surgery-spun link $\subset SR^4$ は極小 Seifert 多様体をもつ。

$\boxed{定義}$ $\#_m S^2\times S^2$ に微分同相な一般 link $L\subset SR^4$ の閉 supports のうち，最小の m を，一般 link $L\subset SR^4$ の <u>supporting degree</u> といい，$sd(L)$ で表わす，ただし $\#_0 S^2\times S^2 = S^4$ とする。

$\boxed{定理4.3}$ 任意の自然数 n に対し，S^4 内の fibered knot の stabilization でできた knot $K_0\subset SR^4$ および knots $K_i\subset SR^4$, $i=1,2,\cdots,n$, の組で，次をみたすものが多数存在する：

(1) $G(K_i)$, $i=0,1,\cdots,n$, はすべて meridians を保存して同型である，

(2) $H_2(\tilde{E}(K_i))$, $i=0,1,\cdots,n$, のどの2つも Λ-同型でない，

(3) $sd(K_i)=i$, $i=0,1,\cdots,n$,

(4) $i\neq 0$ となる K_i は極小 Seifert 多様体をもたない。

注意 定理4.3の証明には使えないが，次の命題は極小 Seifert 多様体を持てない SR^4 内の knot の比較的簡単な構成法を与える：

命題4.4 knot $K \subset SR^4$ が極小 Seifert 多様体をもち，かつ G(K)の commutator 部分群 $[G(K), G(K)]$ が有限生成ならば，$[G(K), G(K)]$ は3次元有向連結閉多様体の基本群に同型になる．

この命題は Neuwirth [N, Theorem 4.5.1] と同様の方法で示すことができる．S^3 内の non-trivial fibered knot の 0-surgery でできる3次元多様体の基本群を G とする．G は SR^4 内の（実際，$S^2 \times S^2$ 内の）ある knot の群になる．G をその群としてもつような任意の SR^4 内の knot は極小 Seifert 多様体を持つことができない．何故ならば $[G, G]$ は genus が正の有向閉曲面の基本群に同型であり，従ってそれは3次元有向連結閉多様体の基本群に同型になれないからである．定理4.3は $[G(K), G(K)]$ が3次元有向連結閉多様体の基本群に同型であっても極小 Seifert 多様体をもてない knot $K \subset SR^4$ の例を与えている．S^4 内の knot で極小 Seifert

多様体を持てない例は知られていない。

注意 S^4内の knots K に対して, 定理4.3の(1),(2)を同時に満たすようなものは存在しない. というのはセー反同型
$H_2(\tilde{E}(K)) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1(\tilde{E}(K)), Q(\Lambda)/\Lambda)$, $E(K)=S^4-K$, が
いつも成りたち(例えば, Levine [Lev]を見よ), 従って
Λ-加群 $H_2(\tilde{E}(K))$ は その群$G(K)=\pi_1(E(K))$で決定されるからである.

しかしながら, S^4内の knot K に対してさえ, その群$G(K)$とその meridian の対は, 一般には, $E(K)$の homotopy 型を決定しないことが知られている(cf. Plotnick/Suciu [P/S]).

注意 Lee [Lee] は $S^2\times S^2$内の knots K で, その群 $G(K)=\pi_1(S^2\times S^2-K)$ が $H_2(G(K))\neq 0$ となるものの存在を示すことにより, $S^2\times S^2$内の knots で4-球に入れない例を与えた。定理4.3はその群がS^4内の knots の群に同型であっても4-球に入れない$S^2\times S^2$内の knots の例を与えている. Tamura [T] は類似の問題をもっと高い次元において考えていた。

§5. Cobordism.

R^3 内の linking number が 0 でない link $k_1 \cup k_2$ に対し、その成分 k_i は互いに交わらないコンパクト有向曲面を $R^4_+ = R^3 \times [0, +\infty)$ において bound することはない。一方、SR^4 内の link については、このようなことは決して起らない。

命題5.1 SR^4 内の各 link に対し、その成分は、$SR^4 \times [0, +\infty)$ において、なめらかに埋め込まれた、互いに交わらない、コンパクト有向3次元多様体を bound する。

これは、ある意味で、SR^4 内の link に対し、linking number に対応する不変量が存在しないことを意味する。

定義 2つの links $L, L' \subset SR^4$ が <u>I-equivalent</u> であるというのは、$SR^4 \times [0,1]$ に位相的に埋め込まれた、$L \times [0,1]$ に同相な多様体 A で、$(\partial A) \cap SR^4 \times 0 = (-L) \times 0$, $(\partial A) \cap SR^4 \times 1 = L' \times 1$ かつ $(\partial \mathring{A}) \cap SR^4 \times (0,1) = \phi$ となるものが存在する時をいう。さらに、A がなめらかに $SR^4 \times [0,1]$ に埋め込まれている場合、$L, L' \subset SR^4$ は

<u>cobordant</u> であるという.

すべての成分が,互いに交わらないような Seifert 多様体を持つような link $L \subset SR^4$ を <u>boundary link</u> という.また,非連結 Seifert 多様体をもつような link $L \subset SR^4$ を <u>weakly split link</u> という.次は Kervaire [Ke2] と同じ方法で示される:

命題5.2 SR^4 のすべての boundary links は trivial links に cobordant である.特に,SR^4 のすべての knots は trivial knot に cobordant である.

S^4 のすべての links (もっと一般に,SR^4 内のすべての flexible links) は trivial links に cobordant かどうかは知られていない (cf. Cochran [C]) が,SR^4 内の non-flexible links に対しては,I-equivalent になれないものが多数存在する.実際,次が示される:

定理5.3 各整数 $r \geq 2$ に対し,次のような r 成分の links $L \subset SR^4$ が (I-equivalence を無視して) 多数存在する: L に I-equivalent な任意の link

L' は $sd(L') \geq r-1$ をみたし, *flexible* でなく, また *weakly split* でない.

我々は, また, 次を示すことができた:

$\boxed{\text{定理5.4}}$ 各整数 $r \geqq 2$ に対し, $G(L)$ と $G(L')$ が meridians を保存して同型であるが, cobordant でない r 成分の *links* $L, L' \subset SR^4$ の対が (I-*equivalences* を無視して) 多数存在する.

§6. Arithematic.

任意の *link* $L \subset SR^4$ と L 上の点 p に対し, SR^4 になめらかにかつ *proper* に埋め込まれた半開区間 α で, $\partial\alpha = p$ かつ $\mathring{\alpha} \cap L = \phi$ となるものを, 点 p を始点として *link* L から出発する *half-open line* と呼ぶ.

補題6.1 同じ点を始点として link L から出発する2本の half-open lines α_1, α_2 に対し，α_1 を α_2 に移しかつ L を固定するような SR^4 の向き保存同相写像が存在する．

SR^4 内の knots K_i, $i=1,2$, から出発する half-open lines α_i の tube 近傍 $T(\alpha_i)$ で，$(T(\alpha_i), T(\alpha_i)\cap K_i) \cong (D^3\times[0,+\infty), D^2\times 1)$ となるものをとる，ここで $D^2\subset D^3$ は標準的な disk pair とする．

今，2つの pairs $(SR^4-\mathring{T}(\alpha_i), K_i-\mathring{T}(\alpha_i)\cap K_i)$，$i=1,2$，をそれらの boundaries にそって，向き逆転微分同相写像により，はり合わせることによって，SR^4 内の新しい knot K' ができる．補題6.1から この knot K' の型は，half-open lines の取り方によらず K_1 と K_2 の型だけで決まることがわかる．この knot K' を K_1 と K_2 の sum といい $K_1\# K_2$ で表わす．

定義 $K=K_1\# K_2$ と表わした時，必ず K_1 又は K_2 が trivial knot となるような knot $K\subset SR^4$ を prime という．

$\boxed{\text{定理6.2}}$ 任意の knot $K \subset SR^4$ は有限個の prime knots の sum になる.

この結果は少し後で述べる Maeda の定理 [Mae] と次の, 本質的には Matumoto [MaT] による, Triviality 定理の直接の結果である:

$\boxed{\text{定理6.3 (Triviality 定理)}}$ link $L \subset SR^4$ が trivial である必要十分条件は, $G(L)$ が meridians を基底にもつ自由群となることである. 特に, knot $K \subset SR^4$ が trivial である必要十分条件は, $G(K) \cong \mathbb{Z}$ となることである.

Maeda の定理を述べるために, $(m)^G = G$ かつ $H_1(G) \cong \mathbb{Z}$ となる有限表示群 G とその元 m の pair (G, m) を考える. そのような2つの pairs (G_i, m_i), $i=1,2$, について, pair $(G_1 \underset{m_1=m_2}{*} G_2,\ m_1(=m_2))$ をそれらの <u>sum</u> と呼び, $(G_1, m_1) * (G_2, m_2)$ と表わす. $(G, m) = (G_1, m_1) * (G_2, m_2)$ と表わす時, 必ず G_1 又は $G_2 \cong \mathbb{Z}$ となるような (G, m) を <u>prime</u> という. $K = K_1 \# K_2$ に対して, $(G(K), m) = (G(K_1), m_1) * (G(K_2), m_2)$ (m, m_i は K, K_i の meridians) となる. 従って $(G(K), m)$ が prime ならば, Triviality 定理によって, K は prime となる.

$\boxed{\text{Maedaの定理}}$ (G, m)は必ず有限個のprime pairs (G_i, m_i)の sumになる。しかも、そのsumは(順番を除けば)ただ一通りである。

定理6.2で述べた SR^4 内のknotのprime分解が一意的かどうかはわからない。次に SR^4 内のknotのunknotting numberについて考える。SR^4 になめらかに埋め込まれたsolid torusの境界曲面は SR^4 のambient isotopyを無視してただ1つしかない。これは[H/K]と同様な方法で示せる。この曲面を<u>unknotted曲面</u>という。SR^4 内のknot Kは、Seifert多様体をもつのだから、[H/K]と同様にして、有限個の1-handlesによるsurgeryにより、Kはunknotted曲面に変換できる。従って、Hosokawa/Maeda/Suzuki [HMS]と同様にして、SR^4 内のknot Kにunknotting numberを定義できる。

$\boxed{\text{定義}}$ surgeryによって、unknotted曲面に変換するのに必要な、knot Kにそった1-handlesの個数のうち、最小のものをknot $K \subset SR^4$ の<u>unknotting number</u>と呼び、$u(K)$で表わす。

knot $K \subset SR^4$ に対し，$SR^4 - K$ の中の なめらかな null-homologous 単純閉曲線 C を考える．C の tube 近傍 $T(C) \cong S^1 \times D^3$ にそった spin surgery $SR^4 - T(C) \cup D^2 \times \partial D^3$ は $SR^4 \# S^2 \times S^2 \cong SR^4$ に微分同相である．これにより，knot $K \subset SR^4$ は 新しい knot $K' \subset SR^4$ に変わる．C に homotopic な loop で表される $G(K)$ の元を $x(C)$ と書く時，$G(K')$ は $G(K)$ に 関係 $x(C)=1$ をつけ加えたものである．$G(K)$ は 有限生成だから，このような変換 の有限回で，K を その群が Z となる knot，つまり Triviality 定理によって trivial knot，に変換できる．

$\boxed{\text{定義}}$ この変換の最少回数を knot $K \subset SR^4$ の <u>unknotting number in the weak sense</u> といい，$u_w(K)$ で表わす．

$b(K)$，$w(K)$，$e(K)$ によって，$G(K)$ の meridian generators の最少数，$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)^{G(K)} = [G(K), G(K)]$ となる元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in [G(K), G(K)]$ の最少の数 s，$H_1(\tilde{E}(K))$ の Λ-generators の最少数 をそれぞれ表わす．このとき，次が成り立つ：

$\boxed{\text{定理 6.3}}$ $e(K) \leqq w(K) = u_w(K) \leqq u(K) \leqq b(K) - 1$．

参考文献

[C] T. Cochran, Slice links in S^4, Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 389-401.

[F] M. Š. Farber, Duality in an infinite cyclic covering and even-dimensional knots, Math. USSR Izvestija 11 (1977), 749-781.

[G] M. A. Gutiérrez, An exact sequence calculation for the second homotopy of a knot, Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972) 571-577.

[H/K] F. Hosokawa / A. Kawauchi, Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, Osaka J. Math. 16 (1979), 233-248.

[H/M/S] F. Hosokawa / T. Maeda / S. Suzuki, Numerical invariants of surfaces in 4-space, Math. Sem. Notes 7 (1979), 409-420.

[Ka1] 河内, Stabilization of exotic 4-spaces, 数理研講究録「多様体のトポロジー」の中.

[Ka2] A. Kawauchi, Three dualities on the integral homology of infinite cyclic coverings of manifolds, Osaka J. Math. (to appear).

[Ka3] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space: An introduction (to appear)

[Ka4] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space, I: The stable 4-space, II: The groups of links, III: The torsion pairing invariant, IV: Knots with no minimal Seifert manifolds and the supporting degree, V: Cobordism, VI: Arithematic. (ただ今準備中)

[Ke1] M.A. Kervaire, On higher dimensional knots, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, 1965, 105–119.

[Ke2] M.A. Kervaire, Les noeuds de dimensions supérieures, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 225–271.

[Lee] Y.W. Lee, Contractibly embedded 2-spheres in $S^2 \times S^2$, Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 280–282.

[Lev] J. Levine, Knot modules. I, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 1–50.

[Lit] R.A. Litherland, The second homology of the group of a knotted surface, Quart. J. Math. 32 (1981), 425–434.

[Mae] T. Maeda, Star decompositions of groups splitting along cyclic groups.

[Mat] T. Matumoto, On a weakly unknotted 2-sphere in a simply-connected 4-manifold, Osaka J. Math. 21 (1984), 489–492.

[N] L.P. Neuwirth, Knot Groups, Ann. Math. Studies 56, Princeton Univ. Press, 1965.

[P/S] S.P. Plotnick / A.I. Suciu, k-Invariants of knotted 2-spheres, Comment. Math. Helv. 60 (1985), 54–84.

[T] I. Tamura, Fundamental theorems in global knot theory (preprint).

[Y1] T. Yajima, On a characterization of knot groups of some spheres in R_4, Osaka J. Math. 6 (1969), 435–446.

[Y2] T. Yajima, Wirtinger presentations of knot groups, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 997–1000.

[Z] E.C. Zeeman, Twisting spun knots, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 471–495.