

Jones's Braid-Plat Formulae, and a New Surgery Triple

Columbia 大学 Joan S. Birman

九州大学 理 全信 泰造

(Taizo Kanenobu)

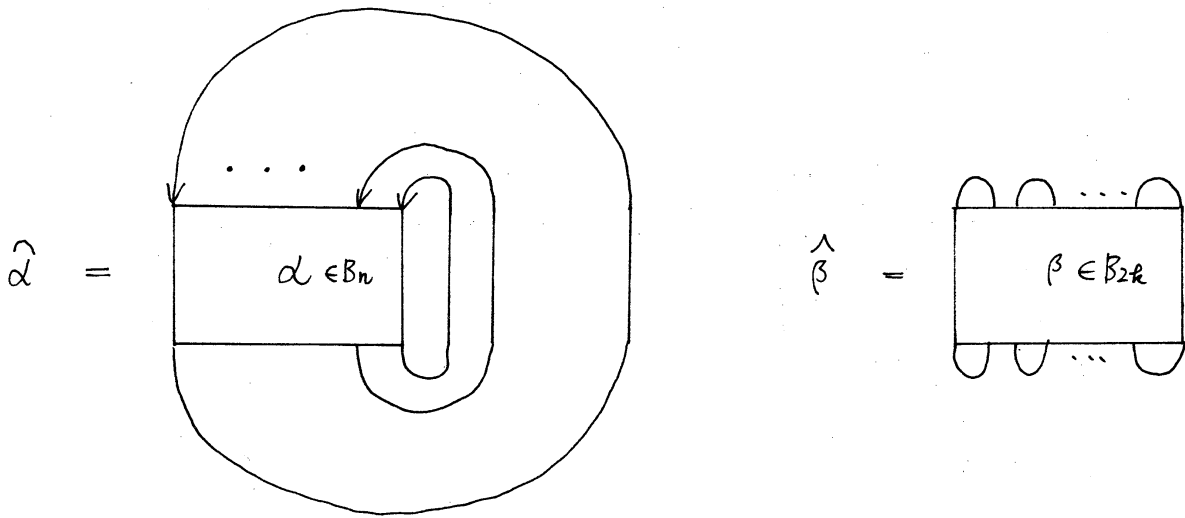
$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i-j| > 1 \rangle$ を Artin の braid 群 とする. $\alpha \in B_n$ に対し α の closed braid $\hat{\alpha}$ の isotopy type の 多項式不変量 — Jones 多項式 — を Jones は 次の ように 定義した: A_n を 1 と 射影 e_1, e_2, \dots, e_{n-1} で生成された von Neumann 環 とし, $\gamma: B_n \rightarrow A_n$ を $\gamma(\sigma_i) = g_i = \sqrt{t}(te_i - (1-e_i))$ で 定義された 表現, $\text{tr}: A_n \rightarrow \mathbb{C}$ を Jones の トレース とする. このとき $\hat{\alpha}$ の Jones 多項式 は

$$(1) \quad V_{\hat{\alpha}}(t) = \delta^{n-1} \text{tr}(\gamma(\alpha)),$$

但し, $\delta = -(t+1)/\sqrt{t}$. さらに Jones は $\beta \in B_{2k}$ に対し β の plat $\hat{\beta}$ の Jones 多項式 が

$$(2) \quad V_{\hat{\beta}}(t) \equiv \delta^{3k-1} \text{tr}(\gamma(\beta)e_1 e_3 \dots e_{2k-1})$$

で与えられることを示した. ここで " \equiv " は \sqrt{t} のべきを除いて一致することを意味する. $\hat{\alpha}$ に対しは orientation は定まらなければならないが, $\hat{\beta}$ では定まら無い.

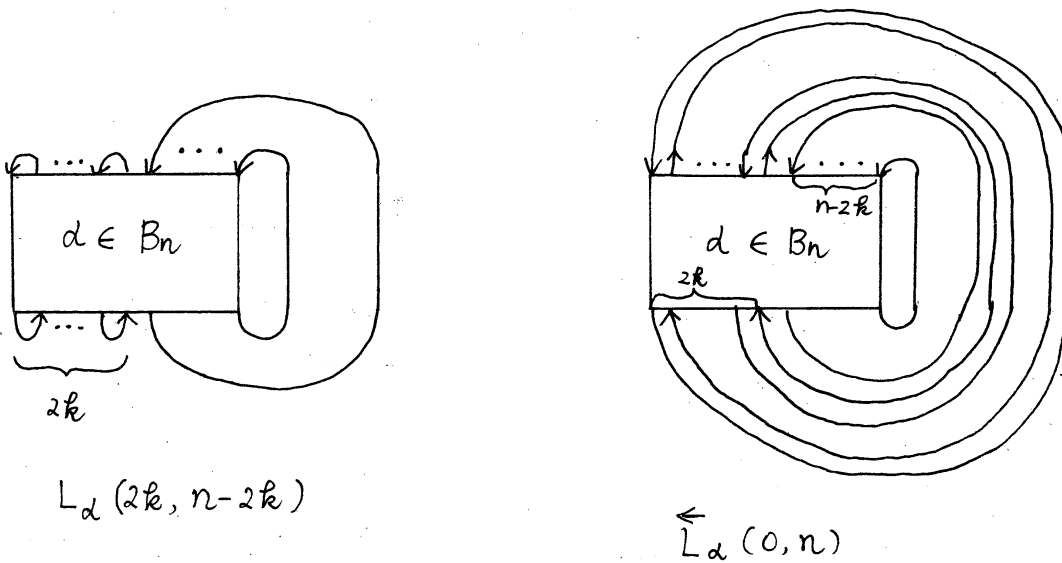


次の定理は (1) と (2) を一般化して一つの公式にまとめられたものである。

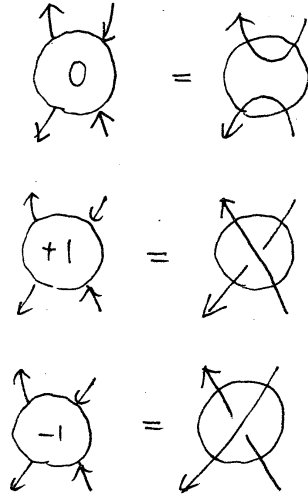
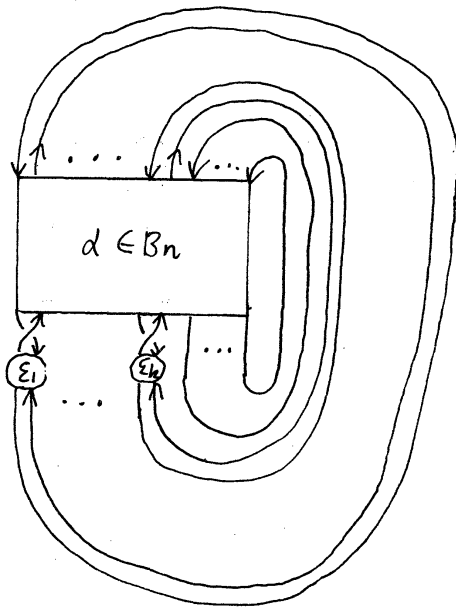
定理 1. $\alpha \in B_n$ とし, $L_\alpha(2k, n-2k)$ を下の図のよう oriented link とする. このとき, その Jones 多項式は

(3)
$$V_{L_\alpha(2k, n-2k)}(t) = t^{3\lambda} \int^{n+k-1} \text{tr}(\tau_\alpha(d) e_1 e_3 \cdots e_{2k-1}),$$

 \vec{k} を $\vec{L}_\alpha(0, n)$ の sublink として上向き orientation がつけられたものとし, $\lambda = \text{lk}(\vec{k}, \vec{L}_\alpha(0, n) - \vec{k})$.



証明. $\overleftarrow{L}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k}$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$, ε 次の link とす.



$\{\overleftarrow{L}_{\varepsilon_1 \dots +1 \dots \varepsilon_k}, \overleftarrow{L}_{\varepsilon_1 \dots -1 \dots \varepsilon_k}, \overleftarrow{L}_{\varepsilon_1 \dots 0 \dots \varepsilon_k}\}$ は skein triple である.

$\overleftarrow{V}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$ を $\overleftarrow{L}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$ の Jones 多項式 とすと,

$$\begin{aligned} \overleftarrow{V}_{0 \dots 0} &= \frac{1}{\mu} (t^{-1} \overleftarrow{V}_{10 \dots 0} - t \overleftarrow{V}_{-10 \dots 0}) \\ &= \frac{1}{\mu^2} (t^{-1} (t^{-1} \overleftarrow{V}_{110 \dots 0} - t \overleftarrow{V}_{1-10 \dots 0}) - t (t^{-1} \overleftarrow{V}_{-110 \dots 0} - t \overleftarrow{V}_{-1-10 \dots 0})) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(4) \quad = \frac{1}{\mu^k} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} (-1)^{m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} t^{-k + 2m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} \overleftarrow{V}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$$

但し, $m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$ は $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ の中の -1 の個数, $\mu = (t-1)/\sqrt{t}$.

$d \sigma_1^{1-\varepsilon_1} \sigma_3^{1-\varepsilon_2} \dots \sigma_{2k-1}^{1-\varepsilon_k}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, に対応する closed braid $\vec{L}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k}$ とす.

$\vec{L}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k}$ と $\overleftarrow{L}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k}$ と orientation が異なる

sublink を $\vec{K}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k}$ とす. $\lambda_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k} = \text{lk}(\vec{K}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k}, \vec{L}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$

$- \vec{K}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k})$ とすと,

$$\lambda_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k} = -\lambda + m_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k}.$$

$\vec{V}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k} \in \vec{L}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$ の Jones 多項式 とすると, Jones の reversing result から

$$\overleftarrow{V}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k} = t^{-3\lambda_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} \vec{V}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}$$

であるから,

$$(5) \quad \overleftarrow{V}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k} = \delta^{n-1} t^{3\lambda - 3m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} \text{tr}(a g_1^{1-\varepsilon_1} g_2^{1-\varepsilon_2} \dots g_{2k-1}^{1-\varepsilon_{2k-1}}),$$

但し, $a = \kappa_t(d)$, $g_i = \kappa_t(\sigma_i) = \sqrt{t}(te_i - (1-e_i))$.

(5) と (4) を代ると,

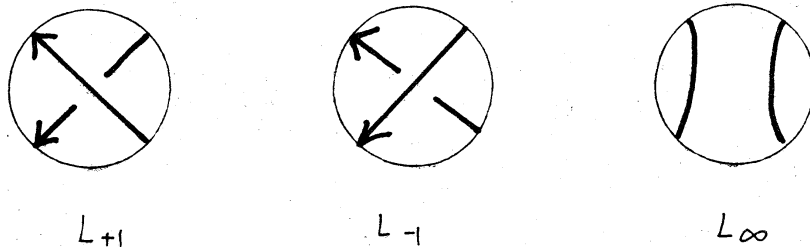
$$\begin{aligned} \overleftarrow{V}_{0 \dots 0} &= \frac{1}{\mu^k} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} (-1)^{m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} t^{-k+2m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} \delta^{n-1} t^{3\lambda - 3m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} \text{tr}(a g_1^{1-\varepsilon_1} \dots g_{2k-1}^{1-\varepsilon_{2k-1}}) \\ &= \frac{\delta^{n-1} t^{3\lambda}}{\mu^k} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} (-1)^{m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} t^{-k-m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} \text{tr}(a g_1^{1-\varepsilon_1} \dots g_{2k-1}^{1-\varepsilon_{2k-1}}) \\ &= \frac{\delta^{n-1} t^{3\lambda} (-1)^k t^{-2k}}{\mu^k} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} (-t)^{k-m_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}} \text{tr}(a g_1^{1-\varepsilon_1} \dots g_{2k-1}^{1-\varepsilon_{2k-1}}) \\ &= \frac{\delta^{n-1} t^{3\lambda} (-1)^k t^{-2k}}{\mu^k} \text{tr}(a(g_1^2 - t)(g_2^2 - t) \dots (g_{2k-1}^2 - t)), \end{aligned}$$

一方, (6) $g_i^2 - t = -t^2(-t+t^1)e_i = -t^2 \delta^\mu e_i$. 従って,

$$\begin{aligned} \overleftarrow{V}_{0 \dots 0} &= \frac{\delta^{n-1} t^{3\lambda} (-1)^k t^{-2k}}{\mu^k} \text{tr}(a (-t^2)^k \delta^{k\mu} e_1 e_2 \dots e_{2k-1}) \\ &= t^{3\lambda} \delta^{n+k-1} \text{tr}(\kappa_t(d) e_1 e_2 \dots e_{2k-1}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

この定理 1 を用いると, 次の V_{∞} -formula を得ることもできる:
 L_1, L_{-1}, L_{∞} を 1 点の近傍で次の図のよりにちたてると,

それ以外の部分は全く同じ diagram をもつような 3 つの link とする.



定理 2. $V_{+1}, V_{-1}, V_{\infty}$ はそれぞれ $L_{+1}, L_{-1}, L_{\infty}$ の Jones 多項式とすると,

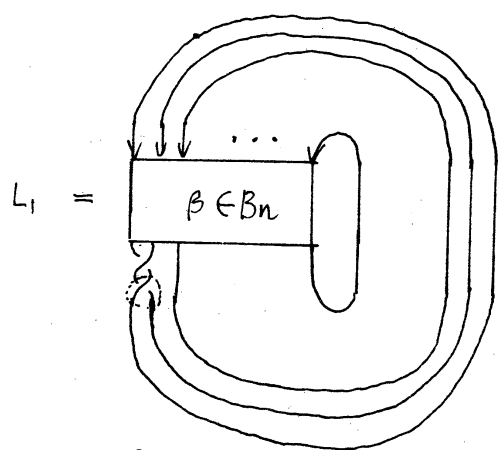
$$V_{+1} - tV_{-1} + t^{3/2}(t-1)V_{\infty} = 0,$$

$$\text{但し, } \varphi = \begin{cases} \lambda(K_0^2) \text{ (Case (a))}, & \lambda(K_0^2) - \lambda(K_{\infty}^2) = \lambda(K_0^1) \text{ (Case (a)')}, \\ \lambda(K_{-1}^1) + \frac{1}{2} = \lambda(K_1^1) - \frac{1}{2} \text{ (Case (b))}, & \lambda(K_{-1}^1) + \frac{1}{2} - \lambda(K_{\infty}^2) \text{ (Case (b)')}, \end{cases}$$

$K \in L$ の sublink とするとき, $\lambda(K) = \text{lk}(K, L-K)$.

| | L_{+1} | L_{-1} | L_0 | L_{∞} | L_{∞} |
|----|----------|----------|-------|--------------|--------------|
| a) | | | | | |
| b) | | | | | |
| | | | | Case (a) | Case (a)' |
| | | | | Case (b) | Case (b)' |

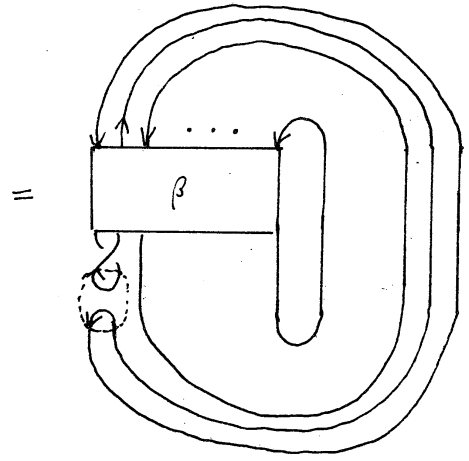
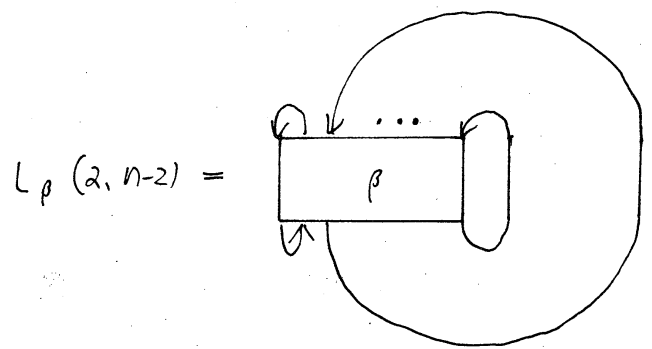
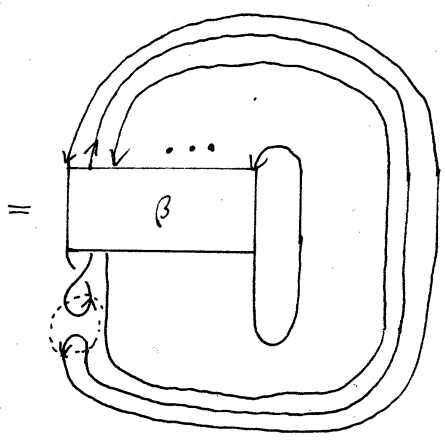
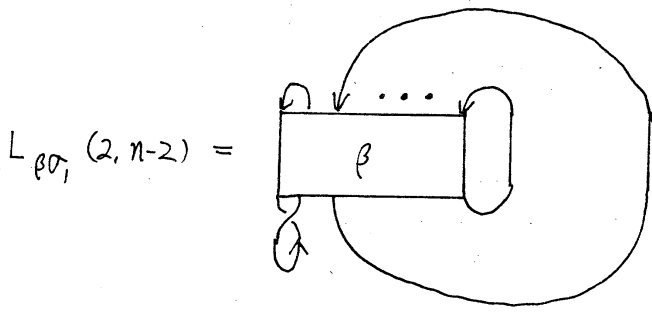
証明. Cases (a), (b) は Jones' reversing result により,
 それぞれ (a), (b) から導かれる. L_1 は closed braid とし 2 下の
 図のように表わせる. $L_1, L_0 \in \text{closed braid}$ と有り,
 $L_\infty = L_{\beta\sigma_1}(2, n-2)$ (a), $L_\beta(2, n-2)$ (b) と有り.



$$L_1 = \widehat{\beta\sigma_1\sigma_1^{-1}} = \widehat{\beta}$$

$$L_0 = \widehat{\beta\sigma_1}$$

$$= \widehat{\beta\sigma_1^2}$$



定理 1 により

$$V_\infty = \begin{cases} t^{3\lambda} \delta^n \operatorname{tr}(r_\pm(\beta \sigma_1) e_1) & \text{Case (a),} \\ t^{3\lambda} \delta^n \operatorname{tr}(r_\pm(\beta) e_1) & \text{Case (b),} \end{cases}$$

$$\text{ここで } \lambda = \begin{cases} \operatorname{lk}(\vec{k}, \vec{L}_{\beta \sigma_1}(0, n) - \vec{k}) & \text{Case (a)} \\ \operatorname{lk}(\vec{k}, \vec{L}_\beta(0, n) - \vec{k}) & \text{Case (b)} \end{cases}$$

\vec{k} は上向き orientation $\varepsilon \varepsilon$ の sublink. (b) について計算すると,

$$\begin{aligned} V_\infty &= -t^{3\lambda-2} \mu^{-1} \delta^{n-1} \operatorname{tr}(r_\pm(\beta)(g_1^2 - t)) \quad (\because (6)) \\ &= -t^{3\lambda-2} \mu^{-1} \left\{ \delta^{n-1} \operatorname{tr}(r_\pm(\beta \sigma_1^2)) - t \delta^{n-1} \operatorname{tr}(r_\pm(\beta)) \right\} \\ &= -t^{3\lambda-2} \mu^{-1} (V_1 - tV_{-1}) \quad (\because (11)) \end{aligned}$$

よって, $V_1 - tV_{-1} + t^{-3(\lambda-\frac{1}{2})} (t-1) V_\infty = 0$

(a) については, $g_1 e_1 = t^{\frac{3}{2}} e_1$ に注意して,

$$V_1 - tV_{-1} + t^{-3\lambda} (t-1) V_\infty = 0$$

を得る. また, $\lambda = \begin{cases} -\lambda(k_0^2) & \text{Case (a)} \\ -\lambda(k_1^1) & \text{Case (b)} \end{cases}$ もすぐには確かめられず. ■

系 2.1. L_1 を knot とするとき, L_{-1}, L_∞ も knot である

$$V_1 - tV_{-1} + t^{3\lambda(L_0)} (t-1) V_\infty = 0$$

が成り立つ, ここで $\lambda(L_0)$ は L_0 の 2 つの component の linking number.

証明. 定理 2 の Case (a) or (a)' を適用する. ■