数理解析研究所講究録
第 620 巻 1987 年 169-186

3次元境界付き多様体に対するHaken型の定理

早大教育　鈴木晋一 (Shin'ichi Suzuki)

まえがき　本稿では Piecewise Linear Category で考察する。

連結な3次元閉(=コンパクトで境界を持たない)多様体 M^3 は Heegaard分解(以下では略して H-分解) $(M^3; H_1, H_2; F)$ を持つことが知られている；すなわち，2つの同相なハンドル体 H_1, H_2 が存在して，

$$M^3 = H_1 \cup H_2, \quad H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2 = \partial H_1 = \partial H_2 = F$$

が成立する (Seifert-Threlfall [12] 等を参照)。Haken [3] は次の定理を証明した：

Hakenの定理　M^3 を向き付け可能で連結な3次元閉多様体とし，$(M^3; H_1, H_2; F)$ をその H-分解とする。もし M^3 が incompressible な2次元球面を含むならば，M^3 内に incompressible な2次元球面 Σ が存在して，$\Sigma \cap F$ は1本の単純閉曲線となる。□

3次元多様体 M^3 内の2次元球面 Σ が incompressible であ

るとは，ΣがM^3内で3次元球体を囲まない場合をいう。また，3次元多様体M^3が<u>irreducible</u>である[7]とは，M^3内のすべての2次元球面がcompressibleである場合をいう。

この定理は，Kneser[7]とMilnor[8]による「向き付けられた3次元閉多様体の素分解定理」等と関連して，3次元多様体論における有力な定理の一つとなり，現在では向き付け不可能な3次元閉多様体にも拡張されている(Ochiai[10])。しかしコンパクトで境界を持つ3次元多様体(以下では3次元<u>有界</u>多様体と呼ぶ)については，そのHeegaard分解(第2節参照)が閉多様体の場合のような対称性を持たないため，同種の定理を定式化し難い事情にある。

一方，1970年にDowning[1]は連結な3次元有界多様体にも，Heegaard分解に代る，ある種の強い対称性を持ったハンドル分解が存在することを示した。しかし有界多様体の研究に有力と思われるこの分解は，これ迄ほとんど活用されていない。

本稿では，3次元有界多様体に対する上記のDowningの分解定理を，Roeling[11]の観点から再検討して紹介し，この分解に関してHaken型の定理を定式化することである。尚，前半の§§1,2,3は筆者の論文[15]の要約であり，§4はその後の研究状況の報告であるが，残念ながら完成していない。

§1. Downingの分解定理

多様体 M について，$\mathring{M}$ と ∂M によってそれぞれ M の内部と境界を表す。また任意の部分集合 $A \subset M$ について，$\mathrm{Cl}(A)$ または $\mathrm{Cl}_M(A)$ によって A の M における閉包を表す。部分多面体 $A \subset M$ について，$N(A;M)$ によって A の M における導近傍を表す。多様体 M の部分多様体 A が M で固有(proper)であるとは，$A \cap \partial M = \partial A$（従って $A \cap \mathring{M} = \mathring{A}$）が成立する場合をいう。

3次元有界多様体 M^3 内の固有な円板 D が essential であるとは，D に沿って M^3 を切断したとき (i) 連結であるか，(ii) 2つの連結成分に分かれていずれの連結成分も3次元球体とはならない場合をいう。（これは Hempel [4] の "incompressible" の定義と同じであるが，Jaco [5, p.31] の "incompressible" の定義とは同じでない。）

種数 $g \geq 0$ のハンドル体(handlebody) H とは，$D^2 \times S^1$ と $D^2 \times_\tau S^1$（いわゆる solid Klein bottle）の g 個の境界連結和 (Gross [2], Swarup [13]) として得られる連結な3次元有界多様体をいう。g 個の $D^2 \times S^1$ の境界連結和の場合が向き付け可能で，1個でも $D^2 \times_\tau S^1$ が含まれる場合が向き付け不可能である。また3次元球体を種数0のハンドル体という。2つのハンドル体が同相であるための必要十分条件は，それらが同じ種数を

持ち，かつそれらの向き付け可能性が一致することである。また種数 g のハンドル体 H は，連結で irreducible な3次元有界多様体で，その基本群 $\pi_1(H)$ が階数 g の自由群となるものとしても特徴付けられる（Ochiai [9]）。

種数 $g \geqq 1$ のハンドル体 H 内の固有な円板 D^2 が H の経円板 (meridian-disk) であるとは，$Cl_H(H - N(D^2; H))$ が種数 $g-1$ のハンドル体となる場合をいう。さらに H の経円板の完全系 $\mathcal{D} = \{D_1^2, \cdots, D_g^2\}$ とは，H の互いに交わらない経円板 $D_1^2, \cdots, D_g^2$ の集合で，$Cl_H(H - \bigcup_{k=1}^{g} N(D_k^2; H))$ が3次元球体となる場合をいう。経円板の完全系の存在は，ハンドル体の定義から明らかである。

1.1 定理 (Downing [1]) 任意の連結な3次元有界多様体 M^3 に対して，2つの同相なハンドル体 H_1, H_2 が存在して次の条件を満す：

$$M^3 = H_1 \cup H_2 \ , \quad H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2 . \qquad \square$$

Remark：ハンドル体の境界となる閉曲面の Euler 標数はいつも偶数だから，連結な3次元有界多様体 M^3 の境界 ∂M^3 の中に Euler 標数が奇数の成分がある場合には，Downing [1] 自身の証明は通用しないことがわかる。尚，全く同じ理由で Downing [1] の Theorem 2 の証明も，曲面 S の成分の中にその Euler 標数が奇数のものが含まれる場合には通用しない。

ここから後は，向き付け可能な3次元有界多様体のみを考察する。連結な3次元有界多様体 M^3 について，境界 ∂M^3 が連結な場合に Roeling [11] が指摘しているように，実は上記定理の Downing [1] の証明をよくみると，M^3 を単に2つの同相なハンドル体に分解しているだけでなく，次の定理まで証明していることがわかる：

1.2 Downing の分解定理. 向き付け可能で連結な3次元有界多様体 M^3 に対し，2つの同じ種数の（必然的に向き付け可能な）ハンドル体 H_1, H_2 が存在し，次の条件を満す：

(0) $M^3 = H_1 \cup H_2$。種数 $g(H_1) = g(H_2) = g$ とする。

(i) $H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2 = F_0$ は連結な曲面である。

(ii) $\partial M^3 = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ （B_i は連結成分）とすると，

$$H_j \cap B_i = \partial H_j \cap B_i = F_{ji} \quad (j=1,2\ ;\ i=1,\cdots,m)$$

は planar な曲面（すなわち，円板から有限個の開円板を取り除いて得られる曲面）であり，F_{1i} と F_{2i} は同相である。

(iii) 包含写像から誘導される基本群の間の準同型写像

$$\iota : \pi_1(F_{ji}\,;\,x_i) \to \pi_1(H_j\,;\,x_i), \quad x_i \in \partial F_{ji}\ (j=1,2\,;\,i=1,\cdots,m)$$

は単射であり，像 $\iota\pi_1(F_{ji}\,;\,x_i)$ は階数 g の自由群 $\pi_1(H_j\,;\,x_i)$ の自由因子（free factor）となる。すなわち $\pi_1(H_j\,;\,x_i)$ の部分群 G_{ji} が存在して，次のように分解される；

$$\pi_1(H_j\,;\,x_i) = \iota\pi_1(F_{ji}\,;\,x_i) * G_{ji} \quad (*\text{ は自由積}).$$

(iv)　$m \geqq 2$ ならば，m 個の点 $x_1, \cdots, x_m$ を位数1の頂点として持つ tree T が F_0 に存在し，包含写像から誘導される基本群の間の準同型写像

$$\iota : \pi_1\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_{ji} \cup T ; x\right) \longrightarrow \pi_1(H_j ; x), \quad x \in T \ (j=1,2)$$

は単射で，像 $\iota\pi_1\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_{ji} \cup T ; x\right)$ は $\pi_1(H_j ; x)$ の自由因子となる。すなわち $\pi_1(H_j ; x)$ の部分群 G_j が存在して，

$$\pi_1(H_j ; x) = \iota\pi_1\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_{ji} \cup T ; x\right) * G_j ,$$

$$\iota\pi_1\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_{ji} \cup T ; x\right) \cong \iota\pi_1(F_{j1} ; x_1) * \cdots * \iota\pi_1(F_{jm} ; x)$$

となる。ここで $\cong$ は同型を示す。□

この定理の証明は，Downing [1] の Lemma 1 を，境界 ∂M^3 の成分の個数 $m \geqq 2$ なる場合にも使えるように少々一般化することによって，Downing [1] の方法で得られる。

向き付け可能で連結な3次元有界多様体 M^3 のハンドル体による分解 $M^3 = H_1 \cup H_2$ で，定理 1.2 の条件 (i)～(iv) を満すものを $(M^3 ; H_1 \cup H_2 ; F_0)$ で示し，M^3 の SD-分解と呼ぶ；Roeling [11]。特にハンドル体の種数 $g(H_1) = g(H_2)$ をこの SD-分解の種数という。M^3 の可能なすべての SD-分解の種数のうちの最小数を，M^3 の SD-種数と呼び，$SDG(M^3)$ で示す。

Downing の分解定理 1.2 の条件 (iii), (iv) は一見いかにも複

雑であるが，ハンドル体の経円板の完全系を用いて，次のように言い換えることができる。証明は Zieschang [14], Kaneto [6] によって与えられた経円板の完全系によるハンドル体の特徴付け定理による。

1.3 定理 $(M^3; H_1, H_2; F_0)$ を，向き付け可能で連結な3次元有界多様体 M^3 の SD-分解とすると，H_j $(j=1, 2)$ の経円板の完全系 $\mathcal{D}_j = \{D^2_{j1}, \cdots, D^2_{jg}\}$ が存在して，定理 1.2 の記号のもとで次の条件を満す：

(v) $D^2_{jk} \cap (F_{j1} \cup \cdots \cup F_{jm}) = \partial D^2_{jk} \cap (F_{j1} \cup \cdots \cup F_{jm})$ は高々1本の単純弧から成り，$\mathrm{Cl}_{F_{ji}}(F_{ji} - \bigcup_{k=1}^{g} N(\partial D^2_{jk}; \partial H_j))$ は1つの円板となる $(j=1, 2;\ i=1, 2, \cdots, m)$。

特に定理 1.2 の条件 (iii) と (iv) と，この条件 (v) は同値。 $\square$

§2. 3次元有界多様体の種数

連結な3次元有界多様体 M^3 は，あるハンドル体 H と指数 (index) 2 のハンドル $h^2(J_1), \cdots, h^2(J_n)$ を用いて

$$M^3 = H \cup h^2(J_1) \cup \cdots \cup h^2(J_n)$$

のように表される (Seifert-Threlfall [12] 等を参照)。ここで，$J_1, \cdots, J_n$ は ∂H 上の互いに交わらない (2-sided な) 単純閉曲線を表し，指数2のハンドル $h^2(J_k)$ $(k=1, \cdots, n)$ とは，直積 $D^2 \times [-1, 1]$ の形に表される3次元球体で，

$$(D^2\times[-1,1])\cap H=(\partial D^2\times[-1,1])\cap\partial H=\partial D^2\times[-1,1],$$
$$\partial D^2\times\{0\}=J_k$$

となるもので，$h^2(J_i)\cap h^2(J_k)=\emptyset$ $(i\neq k)$ を満す。M^3 の向き付けの可能性は，ハンドル体 H の向き付け可能性と一致する。このような分解 $H\cup h^2(J_1)\cup\cdots\cup h^2(J_n)$ を，M^3 の Heegaard 分解（略して H-分解）と呼び，ハンドル体 H の種数 $g(H)$ をこの H-分解の種数と呼ぶ。M^3 の可能なすべての H-分解の種数のうちの最小数を，M^3 の H-種数 と呼び $HG(M^3)$ で示す。

向き付け可能な 3 次元有界多様体の H-分解と SD-分解の間には，次が成立する：

2.1 定理（Roeling [11]）向き付け可能で連結な 3 次元有界多様体 M^3 が，種数 g の SD-分解を持つならば，種数 g の H-分解を持つ。 □

この定理は，∂M^3 が連結な場合に Roeling [11] が証明したものであるが，SD-分解の性質（定理 1.3(v)）を用いることによって ∂M^3 の成分が 2 つ以上の場合にも全く同様にして証明される。この結果，次が得られる：

2.2 系 向き付け可能で連結な 3 次元有界多様体 M^3 について，次が成立する：

(i) $HG(M^3)\leqq SDG(M^3)$,

(ii) $HG(M^3)=0 \iff SDG(M^3)=0$. □

しかし一般に $HG(M^3)=SDG(M^3)$ は成立しない。例は第4節で与える。

§3 有界多様体に対するHaken型の一定理

まえがきで述べた3次元閉多様体に対するHakenの定理は, H-分解の代わりにSD-分解を採用することによって，有界多様体に対しても次のように自然に定式化される：

3.1 定理 M^3 を向き付け可能で連結な3次元有界多様体とし，$(M^3; H_1, H_2; F_0)$ をそのSD-分解とする。もし M^3 がincompressibleな2次元球面を含むならば，$\mathring{M}^3$ にincompressibleな2次元球面 Σ が存在して，$\Sigma \cap F_0$ は1本の単純閉曲線となる。 □

証明は閉多様体の場合のJaco[5, II7～II9]の議論を少し変えて実行すればよい。(Ochiai[10]も参照されたい。)

コンパクトで連結で向き付けられた(oriented)3次元多様体の集合には"連結和"の演算が定義される(Milnor[8])。前節の定理1.2で $\partial M^3=\phi$，すなわち $m=0$ とすれば，SD-分解 $(M^3; H_1, H_2; F_0)$ はまえがきで述べた閉多様体のH-分解に外ならないので，閉多様体の場合はH-分解とSD-分解は同じものと解釈し，$HG(M^3)=SDG(M^3)$ とする。すると定理3.1より次が直ちに得られる：

3.2 系 コンパクトで連結で向きづけられた3次元多様体の連結和のSD-種数は，連結和の要素のSD-種数の和となる；すなわち，もし $M^3 = M_1^3 \# \cdots \# M_u^3$ ならば次が成立する：

$$SDG(M^3) = \sum_{i=1}^{u} SDG(M_i^3). \qquad \square$$

Hempel [4, 第3章] では，Milnor [8] の閉多様体の素分解定理を有界多様体まで含めて証明している。$\partial M^3 = \phi$ のとき，

$$SDG(M^3) = 0 \iff M^3 \text{ は3次元球面}$$

であり，$\partial M^3 \neq \phi$ のとき，∂M^3 の成分の個数を m とすれば，

$$SDG(M^3) = 0 \iff M^3 = D_1^3 \# \cdots \# D_m^3 \quad (D_i^3 \text{ は3次元球体})$$

であることに注意すれば，系3.2より次の存在定理も直ちに得られる：

3.3 系（素分解の存在定理：Hempel [4, Th. 3.15]）3次元球面 S^3 以外の任意のコンパクトと連結で向きづけられた3次元多様体 M^3 に対して，有限個の素な3次元多様体 $P_1, \cdots, P_u$ が存在して，M^3 は連結和 $P_1 \# \cdots \# P_u$ と同相になる。 $\square$

ここで"素"の定義も省略した。尚，素分解の存在定理が示されれば，その一意性の証明は，閉多様体の場合の Milnor [8] の証明と同じようにして得られる。

§4 有界多様体に対するもう一つの Haken 型定理

3次元の向きづけられた有界多様体に対しては，連結和の

ほかに，境界上の円板で貼り合わせる"境界連結和"が定義され，逆に固有でessentialな円板による分解が導入され，分解の存在や一意性などが論じられている；Gross[2], Swarup[13]。この観点からみれば，有界多様体に対するHaken型の定理としては，次の形の方が自然である：

4.1 予想 M^3を向き付け可能で連結な3次元有界多様体とし，$(M^3; H_1, H_2; F_0)$をその種数gのSD-分解とする。もしM^3がessentilな固有円板を含むならば，essentialな固有円板$\square \subset M^3$が存在して，$\square \cap F_0$は1本の単純弧となる。

今回の講演では，この予想を解決してお話しする予定であったが，残念ながら証明できなかったので，証明のApproachの一部分を示すことにする。

4.2 Proposition. 予想4.1の仮定のもとで，さらにM^3がincompressibleな2次元球面を含むならば，予想4.1は成り立つ。

<u>証明</u>. 仮定と定理3.1から，incompressibleな2次元球面Σが$^{\circ}M^3$に存在して，$\alpha = \Sigma \cap F_0$は1本の単純閉曲線となる。そこでαと∂F_0を結ぶ単純弧βをF_0上に選ぶ。$\partial N(\beta; M^3)$から∂M^3上の円板とΣによって切り取られる円板を除いて得られる円筒をAとするとき，$\square = (\Sigma - N(\beta; M^3)) \cup A$は$M^3$内の固有な円板で，$\square \cap F_0$は1本の単純弧となる。一般

にこのようにして得られる固有円板□は essential とは限らないが，β を適当に選ぶことによって，次に挙げる (i), (ii) 以外の場合は essential なものを得ることができる：

(i) $\partial M^3 = B_1 \cong S^2$ で，$°M^3$ の incompressible な2次元球面がすべて B_1 と平行な場合。この場合，B_1 に3次元球体を貼り合わせて M^3 から得られる多様体を $\hat{M}^3$ とすると，$\hat{M}^3$ は irreducible で，M^3 は essential な固有円板を含まない。

(ii) $\partial M^3 = B_1 \cup B_2$，$B_1 \cong S^2 \cong B_2$，で，$°M^3$ の incompressible な2次元球面がすべて B_1 とも B_2 とも平行な場合。このとき $M^3 \cong S^2 \times I$ が結論され，M^3 は essential な固有円板を含まない。 □

この結果，予想を解決するためには，有界多様体 M^3 が irreducible である場合を考察すればよいことになる。

4.3 Lemma 予想4.1の仮定のもとで，さらに M^3 が irreducible であるとすると，essential な固有円板 $\square \subset M^3$ と，H_j $(j=1,2)$ の経円板の完全系 $\mathcal{D}_j$ が存在し，次を満す：

(i) $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ は定理1.3の条件 (v) を満す，

(ii) $\square \cap \mathcal{D}_1 = \phi$，

(iii) $\square \cap H_j$ は有限個の固有円板から成り，それらは H_j で essential である。

証明. 定理1.2および定理1.3の記号・記法をそのまま使

うことにする。planarな曲面 $F_{1i}=\partial H_1\cap B_i$ の芯(spine) K_{1i} を次のように選ぶ($i=1,\cdots,m$): K_{1i} は1.2(iii)で選んだ基点 $x_i\in\partial F_{1i}$ を基点とする単純閉曲線から成り,

(iii)' 包含写像 $(K_{1i},x_i)\to(F_{1i},x_i)$ から誘導される基本群の準同型写像は同型写像で,

(iv)' 包含写像 $(\bigcup_{i=1}^{m}K_{1i}\cup T,x)\to(\bigcup_{i=1}^{m}F_{1i}\cup T,x)$ から誘導される基本群の準同型写像も同型写像である。ただし T は1.2(iv)のtreeで, $x\in T$ である。

このとき,定理1.3より,ハンドル体 H_1 の芯 K_1 を $K_{11},\cdots,K_{1m}$ を含み ∂H_1 上にあるように選ぶことができる;

$$K_1\subset\partial H_1,\quad K_1\cap F_{1i}=K_{1i}\quad(i=1,\cdots,m).$$

$\square\subset M^3$ をessentialな固有円板とする。$\square\cap K_1=\partial\square\cap K_1$ はtransversalに有限個の点で交わるとしてよい。K_1 は H_1 の芯だから,必要ならば $\square$ をイソトピーで変形することにより,$\square\cap H_1$ は右図のような有限個の円板から成ると仮定してよい。すなわち,$\square\cap H_1$ は,$\square$ 上で見て,斜線を施した部分で,×は $\partial\square\cap K_1$ を示す。(尚,このとき $\square\cap H_1$ が1枚の円板から成るならば,Lemma 4.3はもとより,予想4.1が成立していることになる。)

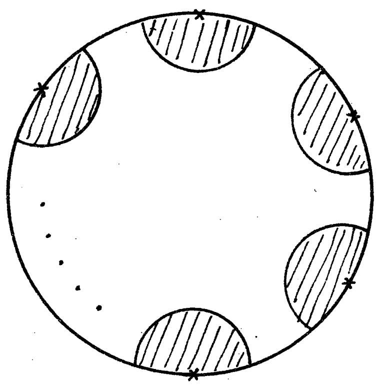

図1: $\square$

この□が条件(iii)を満すことは直ちに確かめられる。また，定理1.3 の条件 (v) を満す H_1, H_2 の経円板の完全系 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ を，$\square \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset$ となるように選べることも容易にわかる。□

この後，$\square \cap H_1$ の個数を減すことができればよいわけだが，一般的にはなかなかうまくいかない。うまくいく場合の典型的な例として，かなり特殊だが次を挙げておく：

4.4 Proposition. 予想4.1 の仮定のもとで，さらに M^3 が irreducible であるとする。境界 $\partial M^3 = B_1$ が連結で，$SDG(M^3) = genus(B_1) = g$ ならば，予想4.1 が成り立つ。

証明　仮定から Lemma 4.3 の条件を満す essential な固有円板 $\square \subset M^3$ と，H_1, H_2 の経円板の完全系 $\mathcal{D}_1 = \{D_{11}, \cdots, D_{1g}\}$，$\mathcal{D}_2 = \{D_{21}, \cdots, D_{2g}\}$ が存在する。$SDG(M^3) = genus(B_1)$ より，各 ∂D_{1i} $(i=1,\cdots,g)$ は $F_{11} = B_1 \cap \partial H_1$ と1本の固有単純弧で交わり，各 ∂D_{2i} $(i=1,\cdots,g)$ は $F_{21} = B_1 \cap \partial H_2$ と1本の固有単純弧で交わる。定理1.3 の条件 (v) より $D_{j1} \cup \cdots \cup D_{jg}$ で H_j を切断して得られる3次元球体 D^3_j $(j=1,2)$ の境界（表面）は

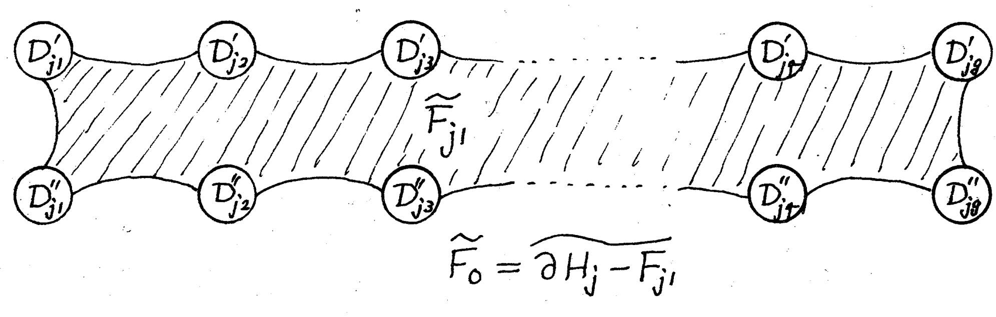

図2：∂D^3_j（を平面的に描いた図）

図2のようになっている。ここで D'_{ji} と D''_{ji} $(i=1,\cdots,g)$ は経円板 D_{ji} を切断した部分，$\widetilde{F}_{ji}$ は F_{ji} の部分，$\widetilde{F}_0$ は $\partial H_j - F_{j1}$ の部分を示し，D'_{ji} と D''_{ji} の添数 i は1例と考える。特に，$\widetilde{F}_{j1}$，$\widetilde{F}_0$ は円板で，$\widetilde{F}_{j1} \cup D'_{j1} \cup D''_{j1} \cup \cdots \cup D'_{jg} \cup D''_{jg}$ も円板であることに注意する。

さて Lemma 4.3 の条件 (ii), (iii) とその証明から，$\square \cap H_1 = \square \cap D^3_1$ は有限個の固有円板から成り，その任意の1つを σ とすると，$\partial\sigma \cap \widetilde{F}_{11} = \alpha$，$\partial\sigma \cap \widetilde{F}_0 = \beta$ はそれぞれ1本の単純弧で $\alpha \cup \beta = \partial\sigma$ となり，$\alpha \cup \beta$ は $\partial D^3_1 - \bigcup_{i=1}^{g}(D'_{1i} \cup D''_{1i})$ 上で可縮でない。一方 $\beta = \partial\sigma \cap \widetilde{F}_0$ を ∂D^3_2 上でみると，$\widetilde{F}_0$ 上の有限個の固有単純弧から成る；これらを $\gamma_1, \cdots, \gamma_\ell$ とおく。2ℓ 個の端点 $\partial\gamma_1 \cup \cdots \cup \partial\gamma_\ell$ のうち，丁度2つだけが $\partial\beta$ と一致して $\partial\widetilde{F}_0$ 上にあり，残りの $2\ell-2$ 個の点は $\partial D'_{2i}$ と $\partial D''_{2i}$ 上に対になって現われる（図3参照）。球面 ∂D^3_2 上の円板 $\widetilde{F}_{21} \cup$

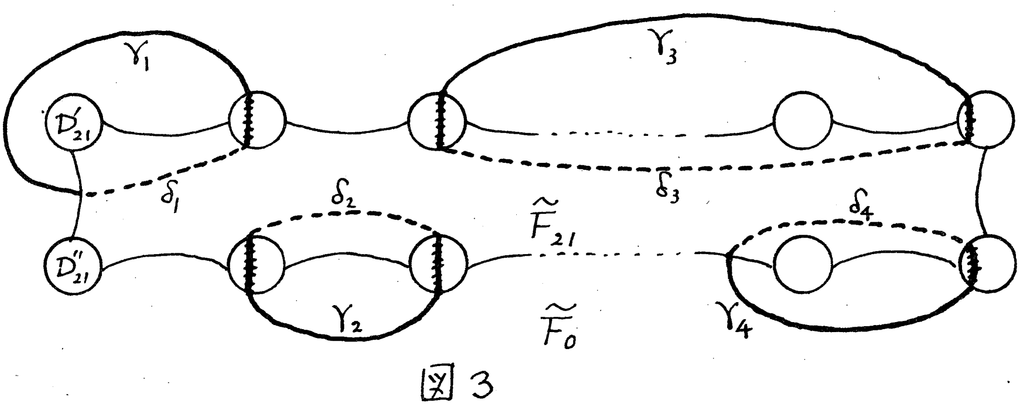

図3

$D'_{21} \cup D''_{21} \cup \cdots \cup D'_{2g} \cup D''_{2g}$ 上で，γ_k $(k=1,\cdots,\ell)$ の端点を結ぶ固有単純弧 δ_k を互いに交わらないように選ぶことができる。

単純閉曲線 $\gamma_k \cup \delta_k$ $(k=1,\cdots,l)$ は D_2^3 内で固有な円板を囲む；それを Δ_k とする。δ_k と $D'_{2i} \cup D''_{2i}$ の共通部分を図3のように調整することによって，$\tau = \bigcup_{k=1}^{l} \Delta_k$ が H_2 内の固有円板となるようにできる。$\partial\tau$ は β と F_{21} 上の1本の固有単純弧から成り，$\square' = \sigma \cup \tau$ は M^3 の固有円板で $\square' \cap F_0 = \beta$ である。作り方から $\square'$ が essential であることも容易に確かめられ，求める固有円板が得られたことになる。□

上の証明では，β を ∂D_2^3 上でながめたとき，有限個の単純弧 $\gamma_1,\cdots,\gamma_l$ となることを用いて円板 τ を構成した。この際，スタート時の円板 $\square$ は全く用いていない。一般の場合の解決には，essential な固有円板 $\square$ をいかに活用するかが鍵となるはずである。上の証明を活用すれば次が得られる：

4.5 Proposition. M^3 を向き付け可能で連結な3次元有界多様体とし，$\partial M^3 = B_1$ が連結であるとする。さらに M^3 が irreducible で，$SDG(M^3) = genus(B_1) = g$ ならば，M^3 は種数 g の（向き付け可能な）ハンドル体である。

証明　$(M^3; H_1, H_2; F_0)$ を M^3 の種数 g の SD-分解とし，定理1.3 の条件 (v) を満す H_1 の経円板の完全系 $\mathcal{D}_1 = \{D_{11},\cdots, D_{1g}\}$ を選ぶ。上の Proposition 4.4 の証明中の円板 σ の代わりに，$D_{11},\cdots,D_{1g}$ を用いるとよい。$g=0$ の場合に M^3 が3次元球体になることを用い，種数 g に関する帰納法により証

明は完了する。詳しくは読者に委ねる。□

この結果，$HG(M^3) \lneqq SDG(M^3)$ なる3次元有界多様体の例はいくらでも得られる。実際，非平凡型の結び目 $K \subset S^3$ の外部 $E(K) = S^3 - {}^\circ N(K; S^3)$ や，非平凡型のグラフ（1次元多面体）$P \subset S^3$ の外部 $E(P) = S^3 - {}^\circ N(P; S^3)$ （[16] 参照）などがわかり易い例である。

References

[1] J.S.Downing : Decomposing compact 3-manifolds into homeomorphic handle-bodies, Proc.Amer.Math.Soc., 24(1970), 241-244.

[2] J.L.Gross : A unique decomposition theorem for 3-manifolds with connected boundary, Trans.Amer.Math.Soc., 142(1969), 191-199.

[3] W.Haken : Some results on surfaces in 3-manifolds, In : Studies in Modern Topology, Math.Assoc.Amer.Studies in Math., 5(1968), 39-98.

[4] J.Hempel : 3-Manifolds, Ann.of Math.Studies #86, Princeton Univ.Pr., Princeton,N.J., 1976.

[5] W.Jaco : Lectures on Three-Manifold Topology, CBMS Regional Conference Series in Math. #43, Amer.Math.Soc., 1980.

[6] T.Kaneto : On simple loops on a solid torus of general genus, Proc. Amer.Math.Soc., 86(1982), 551-552.

[7] H.Kneser : Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, Jahresbericht der Deutschen Math.Verein., 38(1929), 248-260.

[8] J.Milnor : A unique decomposition theorem for 3-manifolds, Amer.J.Math., 84(1962), 1-7.

[9] M.Ochiai : Homeomorphisms on a three dimensional handle, J.Math.Soc. Japan, 30(1978), 697-702.

[10] M.Ochiai : On Haken's theorem and its extention, Osaka J.Math., 20 (1983), 461-468.

[11] L.G.Loeling : The genus of an orientable 3-manifold with connected boundary, Illinois J.Math., 17(1973), 558-562.

[12] H.Seifert and W.Threlfall : Lehrbuch der Topologie, Teubner, Leipzig, 1934. Reprint : Chelsea, New York, 1947.

[13] G.A.Swarup : Some properties of 3-manifolds with boundary, Quart.J. Math.Oxford(2), 21(1970), 1-23.

[14] H.Zieschang : On simple systems of paths on complete pretzels, Amer. Math.Soc.Transl.(2), 92(1970), 127-137.

[15] 鈴木晋一：境界を持つ3次元多様体に対するHaken型の一定理，早大教育学術研究 34(1985), 13-20.

[16] S.Suzuki : Alexander ideals of graphs in the 3-sphere, Tokyo J.Math., 7(1984), 233-247.