数理解析研究所講究録
第621巻 1987年 115-124

Regular and semi-regular points of Cohen-Macaulay partially ordered sets

名古屋大学・理学部　　日比 孝之
Department of Mathematics　　Takayuki Hibi
Faculty of Science
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464, Japan

序. Cohen-Macaulay poset が与えられた時，それが (i) integral ([H_1],[H-W_1],[Wat_2]), (ii) Gorenstein, (iii) weakly Gorenstein, (iv) numerically Gorenstein ([H_1],[Wat_1]), (v) level ([Sta_1],[H_3]), (vi) canonical ideal (cf. [H_4]) を持つかといったこと等々は，Cohen-Macaulay poset の分類とも関連した，基本的な問題である．例えば，L を distributive lattice とする時，L が何時 (i),(ii),(iii),(iv),(vi) の性質を持つかということは完全に決定できる．しかしながら，(v) については全然わからない．そこで，「どんな distributive lattice が level であるか？」という素朴な問題を解決したいというのが研究の動機である．

a) さて，V を vertex set と呼ばれる有限集合とし，Δ を V 上の simplicial complex とする．即ち，Δ は V

の subset の set であって，(i) 任意の $v \in V$ に対して $\{v\} \in \Delta$，(ii) $\sigma \in \Delta$，$\tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in \Delta$ を満たすものである．Δ の次元を $\dim \Delta := \max\{\#(\sigma);\sigma\in\Delta\} - 1$ $(= d-1$ と置く$)$ で定義し，$\#(\sigma) = i+1$ の時 σ を i-face と呼ぶ．そして $f_i = f_i(\Delta)$ で i-face の個数を表し，$f = f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ を Δ の f-vector と呼ぶ．$f_0(\Delta) = \#(V)$ である．また，

$$h_i = h_i(\Delta) = \sum_{j=0}^{i} \binom{d-j}{d-i} (-1)^{i-j} f_{j-1} \qquad (0 \le i \le d)$$

（但し，$f_{-1} = 1$ とする）と定義し，$h = h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ を Δ の h-vector と呼ぶ．$h_0 = 1$，$h_1 = \#(V) - d$ である．この時，$a = a(\Delta) := \max\{s; h_s \neq 0\} - d$ (≤ 0) を Δ の a-invariant (cf. [G-W]) と呼ぶ．

次に，k を体とし，$k[\Delta]$ で，Δ の Stanley-Reisner 環

$$k[\Delta] = k[X_v; v\in V]/(\prod_{v\in\tau} X_v; \tau\notin\Delta)$$

を表す．$\deg(X_v) = 1$ とし，$k[\Delta]$ を次数付環 $\oplus_{n\ge0}(k[\Delta])_n$ と考える．$k[\Delta]$ の k-algebra としての次元は $\dim\Delta + 1 = d$ である．また $k[\Delta]$ の Hilbert 関数 $H(k[\Delta],n)$ と Poincaré 級数 $P(k[\Delta],\theta)$ は

$$H(k[\Delta],n) := \dim_k(k[\Delta])_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n=0 \\ \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{n-1}{i} & \text{if } n>0 \end{cases}$$

$$P(k[\Delta],\theta) := \sum_{n=0}^{\infty} H(k[\Delta],n)\theta^n = \frac{h_0+h_1\theta+\ldots+h_d\theta^d}{(1-\theta)^d}$$

となる (cf. [Sta$_2$]) .

一般に, $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ を homogeneous k-algebra , 即ち, (i) $R_0 = k$, (ii) $R = k[R_1]$, (iii) $\dim_k R_1 < \infty$ を満たす次数付環で $\dim R = d$ とすると, その Hilbert 関数 $H(R,n) := \dim_k R_n$ は $n \gg 0$ で, n の d-1 次の多項式であり, Poincaré 級数は

$$P(R,\theta) := \sum_{n=0}^{\infty} H(R,n)\theta^n = \frac{h_0+h_1\theta+\ldots+h_s\theta^s}{(1-\theta)^d} \qquad (h_s \neq 0)$$

と表すことが可能である. ここで, $h(R) := (h_0, h_1, \ldots, h_s)$ を R の h-vector と呼ぶ. 特に, R が Cohen-Macaulay ならば

$$h_s = \dim_k[K_R]_{-a(R)} \overset{(*)}{\leq} \mu(K_R) = \mathrm{type}(R)$$

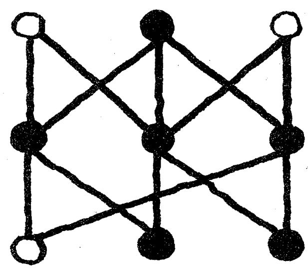
である. (*) で等号が成立する時, 即ち $h_s = \mathrm{type}(R)$ となる時, R を level 環 (cf. [Sta$_1$]) と呼ぶ. 換言すれば, level 環とは, canonical module の生成元の次数が等し

く選べる Cohen-Macaulay 環のことである.

例えば, $R=\oplus_{n\geq 0} R_n$ $(R_0=k)$ が poset Q $(\subset R_1)$ 上の ASL (algebra with straightening laws)整域で, $\dim R \leq 3$ ならば, R は level 環である. また, $\Delta_i := \{\sigma\in\Delta; \#(\sigma)\leq i+1\}$ (i-skelton) とすると, Δ が k 上 Cohen-Macaulay, 即ち $k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay 環, ならば, $i<d-1$ の時, $a(\Delta_i)=0$ で $k[\Delta_i]$ は level 環となる([H_3]).

b) 以下, 体 k を固定し, Δ を vertex set V 上の Cohen-Macaulay complex とする. この時, $v\in V$ が regular vertex (w.r.t. Δ) であるとは, $\Delta - v := \{\sigma\in\Delta; v\notin\sigma\}$ が $V-\{v\}$ 上の Cohen-Macaulay complex で $\dim\Delta = \dim(\Delta - v)$ である時を言う.

他方, poset Q が与えられた時, $\Delta(Q) = \{ Q$ の chains $\}$ と置くことによって, Q 上の simplicial complex と考える. この時は, regular vertex と言う代わりに, regular point と呼ぶことにする. 例えば, 次の poset



においては，○印が regular point で，●印は regular point ではない．

定理（$[H_5]$）． L を distributive lattice とする時，$\alpha \in L$ が regular point である為の必要十分条件は，(i) $L-\{\alpha\}$ が pure（即ち，maximal chain の長さがすべて等しい）であり，(ii) $\mathrm{rank}(L)$ $(:= \dim(\Delta(L))) = \mathrm{rank}(L-\{\alpha\})$ となることである．

証明には，[Bjö] による lexicographically shellable poset の概念を使う． $L-\{\alpha\}$ が pure ということは，容易に判定可能な combinatorial な性質だから， distributive lattice においては， $\alpha \in L$ が regular であるか否かはすぐにわかる．

一般に， regular vertex (w.r.t. Δ) 全体の集合を $\underline{R} = \underline{R}_k(\Delta)$ で表す．また， simplicial complex Δ の face σ に対して， $\mathrm{star}_\Delta(\sigma) := \{\tau \in \Delta; \sigma \cup \tau \in \Delta\}$ および $\mathrm{link}_\Delta(\sigma) := \{\tau \in \Delta; \sigma \cap \tau = \phi, \sigma \cup \tau \in \Delta\}$ を定義する．環論的には $k[\mathrm{star}_\Delta(\sigma)] = k[\mathrm{link}_\Delta(\sigma)][v; v \in \sigma]$ である．そして， Δ が Cohen-Macaulay であれば， $\mathrm{star}_\Delta(\sigma)$ も $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ も Cohen-Macaulay である (cf. [Hoc])．

定義. k を体, Δ を vertex set V 上の Cohen-Macaulay complex とする時, Δ の $\underline{A}$-invariant を

$$\underline{A} = \underline{A}_k(\Delta) = \max_{v \in \underline{R}}[a(\Delta)-a(\mathrm{link}_\Delta(\{v\}))]$$

で定義する. 但し, $\underline{R} = \underline{R}_k(\Delta) = \phi$ の時は $\underline{A} = \underline{A}_k(\Delta) = 0$ とする.

この時, $\underline{A}_k(\Delta) \geq 0$ であることが, f-vector および h-vector の計算で確認できる.

c) すると, $\underline{A}_k(\Delta) = 0$ となるのは何時か?ということが問題となる.

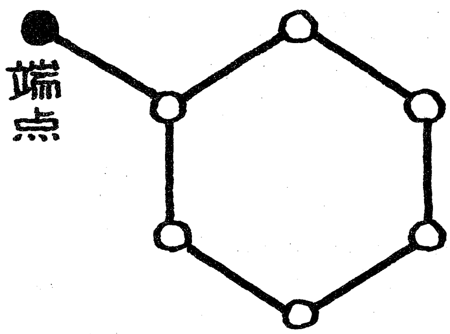
命題. Δ を k 上の Cohen-Macaulay complex とし, $k[\Delta]$ は level 環であると仮定せよ. この時, $\underline{A}_k(\Delta) = 0$ である.

この命題によって, $k[\Delta]$ が level 環となる為の combinatorial な必要条件が得られる.

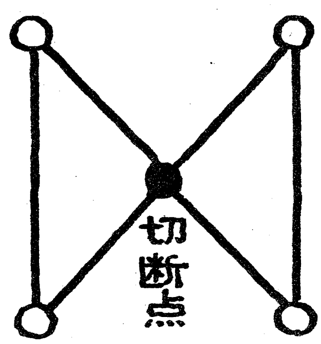
簡単な例として， $\dim \Delta = 1$ の時を考える．この時，Δ の geometric realization $|\Delta|$ は graph となり，Δ が Cohen-Macaulay，level，Gorenstein，そして，$\underline{A}_k(\Delta) = 0$ となる為の必要十分条件を graph 理論の言葉で記述すると

Cohen-Macaulay	level	Gorenstein	$\underline{A}_k(\Delta) = 0$
connected である．	切断点を持たないか，または tree である．	cycle または高々3個の頂点を持つ線分である．	端点を持たないかまたは tree である．

となる．



$\underline{A}_k(\Delta) = 1$



$\underline{A}_k(\Delta) = 0$

d) そこで，$\underline{A}_k(\Delta(L)) = 0$ となる distributive lattice L を探そう．

定理$([H_5])$. L を distributive lattice, X をその join-irreducible な元全体の成す subposet とする. この時, $\underline{A}_k(\Delta(L))=0$ となる為の必要十分条件は, 「$\alpha, \beta \in X$ が $\mathrm{depth}_X(\alpha)+\mathrm{height}_X(\beta) > \mathrm{rank}(X)$ を満たせば $\alpha \leq \beta$ となる」が成立することである.

更に, $\Delta(L)$ が Gorenstein となる為の必要十分条件は, X が clutter の ordinal sum であるという既知の事実を $\underline{A}$-invariant の言葉で書き表すと

系. L を distributive lattice, X をその join-irreducible な元全体の成す subposet とする. この時, $\Delta(L)$ が Gorenstein となる為の必要十分条件は, X が pure で, $\underline{A}_k(\Delta(L))=0$ となることである.

さて, $\underline{A}_k(\Delta(L))=0$ なる条件で, level の候補となる distributive lattice が選ばれたわけであるが, 特に, L が planer distributive lattice, 即ち, L の Hasse diagram の edge が交わらない様に平面上に描ける distributive lattice の時には, $\underline{A}_k(\Delta(L))=0$ となる L から level となるものを探し, 分類することが可能である (cf. $[H_5]$)

REFERENCES

[Bjö] A.Björner: Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets, Trans. Amer. Math. Soc. 260 (1980), 159-183.

[G-W] S.Goto and K.-i.Watanabe: On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179-213.

[H_1] T.Hibi: Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws, to appear.

[H_2] T.Hibi: Union and glueing of a family of Cohen-Macaulay partially ordered sets, to appear.

[H_3] T.Hibi: Level rings and algebras with straightening laws, submitted.

[H_4] T.Hibi: Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets, preprint.

[H_5] T.Hibi: Regular and semi-regular points of Cohen-Macaulay partially ordered sets, in preparation.

[H-W_1] T.Hibi and K.-i.Watanabe: Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains I, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 27-54.

[H-W_2] T.Hibi and K.-i.Watanabe: Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains II, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 321-340.

[Hoc] M.Hocster: Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, Ring Theory II, Proc. of the second Oklahoma Conf., Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No. 26 , Dekker, New York, 1977, 171-223.

[Sta_1] R.Stanley: Cohen-Macaulay complexes, Higher Combinatorics (M.Aigner, ed.), NATO Advanced Study Institute Series, Reidel, Dordrecht and Boston, 1977, 51-62.

[Sta_2] R.Stanley: "Combinatorics and Commutative Algebra", Progress in Math., Vol. 41 , Birkhäuser, Boston, 1983.

[Sta_3] R.Stanley: "Enumerative Combinatorics, Volume I", Wadsworth, Monterey, CA, 1986.

[Wat_1] K.-i.Watanabe: Study of algebras with straightening laws of dimension 2, Algebraic and Topological Theory — to the memory of Dr. Takehiko Miyata (M.Nagata et al., eds.), Kinokuniya, Tokyo, 1985, 622-639.

[Wat_2] K.-i.Watanabe: Study of four-dimensional Gorenstein ASL domains, I (Integral posets arising from triangulation of a 2-sphere), to appear.