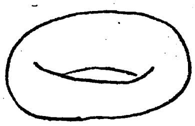
数理解析研究所講究録
第622巻 1987年 1-22

非可換トーラス入門

大阪教育大学 綿谷安男 (Yasuo Watatani)

§0. はじめに

位相的な2次元トーラス  ($\mathbb{T}^2$とかく) はその上にいろんな構造を入れて各種の立場から考察できる。例えば向きづけ可能な実2次元コンパクト微分可能多様体の構造が入いる. その de Rham cohomology $H^p(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ は$\mathbb{T}^2$上の微分形式のつくる空間(の同値類)で, 次のように計算される.

$H^0(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ (生成元は恒等的に1の関数)

$H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$ (生成元は $d\theta_1$ と $d\theta_2$)

$H^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ (生成元は $d\theta_1 \wedge d\theta_2$)

他にも複素多様体の構造を入れ閉リーマン面とみたり, 代数多様体とみると楕円曲線になる。またリーマン計量を使って微分幾何学的考察をしたりできる しかしこれらはすべて, 可換な幾何学の中の種々の階層の違いからくる立場の違いである。それは, その上の(適切な)関数のつくる環の違い

に反映してくるが，その環は可換である：

可換の世界			非可換の世界
(研究分野)	(幾何的空間M)	(M上の関数のつくる環)	非可換環
測度論	測度空間	可測関数 $L^\infty(M)$	von Neumann環
位相幾何	位相空間	連続関数 $C(M)$	C^*-環
微分位相幾何	微分可能多様体	微分可能関数 $C^\infty(M)$	?
代数幾何	代数多様体	多項式関数 $P(M)$	?

非可換トーラスの住んでいる世界は，左側の可換の世界，つまり通常の（種々の）幾何，，ではなく，右側の特に C^*-環の世界なのである。非可換トーラスは，$\theta \in [0,1)$ をパラメータにもつ C^*-環の family A_θ，およびその中の dence な subalgebras A_θ^∞ 達のことをいう。そして $\theta \to 0$ とした時 $A_\theta \longrightarrow A_0 = C(\mathbb{T}^2)$ とトーラス $\mathbb{T}^2$ 上の連続関数環になるように "deform" されたものと思えばよい。これは "q-アナログ" の理論で $q \to 1$ とした時に一般化される前の量が回復されているのと類比的である。"q-アナログ" の理論では，，2項定理の q-アナログを一般化してRamanujan の恒等式を得，それを特殊化するとテータ関数の積表示が出る，というおもしろい手品のような話がある。しかし非可換トーラスの場合には，そんなおもしろいことがあるかしら？とつい思ってしまうことは慎しみましょう。

このノートは非可換トーラスの話を全く知らない非専門化向けの入門的解説です。それ故作用素環を研究している人たちは，私のこのノート以外の所へすぐにお進みください。

さて非専門化の人達のために極く初歩的な所から始めます。非可換化するとは，量子化しなさい，ということで，この場合は，ヒルベルト空間上の作用素のことばを使って定式化しなさい，となります。

$\boxed{\text{Def}}$ ヒルベルト空間H上の有界作用素全体のつくる環をB(H)とする。B(H)の*部分環でノルムからくる位相によって閉じているものを<u>C^*-環</u>という。もちろん抽象的にも定義できる：C^*-環とはBanach*環で $\|x^*x\|=\|x\|^2$ という条件をみたすものである。■

なぜ非可換の環の中で特にC^*-環を選ぶのか？というと，次のよく知られた定理により，C^*-環とは非可換な(局所)コンパクト空間と思うことができるからです。

$\boxed{\text{定理 1}}$ (Gelfand-Naimark) 可換なC^*-環Aは局所コンパクトT_2-空間M上の無限遠で0になる関数全体のつくる環$C_0(M)$と同型である：$A\cong C_0(M)$。特にAが単位元をもつことと，Mがコンパクトであることは同値である。■

このように幾何学的空間Mのことばを使わずに環とその上のmodule等のことばだけで全ての幾何が構成できる

はずであるという思いこみのことを≪pointless geometry≫といいます。この立場で，例えば非可換トーラス A_θ 上で微分幾何を，展開しようというのが目的です。

§1、非可換トーラス A_θ の定義

非可換トーラスは別名「無理数回転環」とよばれる．その定義の仕方はざっと数えても次にあげる位，色々ある

①生成元とその交換関係

② $\mathbb{Z}^2$ の射影表現のつくる C^* 環

③接合積 $C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z}$

④リー群 $\mathbb{T}^2$ からの ergodic action をもつ C^* 環

⑤ Kronecker foliation からつくる C^* 環

⑥ある種の群（例えば Heisenberg 群）G の $C^*(G)$ の primitive quotient

⋮

①生成元とその交換関係

$\mathbb{T}^2 \Leftrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ として $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ は $x, y \in \mathbb{R} \pmod 1$ と思う

トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の連続関数環 $C(\mathbb{T}^2)$ の生成元は次の絶対値1の値をとる関数 u と $v \in C(\mathbb{T}^2)$ である：

生成元	交換関係
$\begin{cases} u(x,y) \underset{\text{def}}{=} e^{2\pi i x} \\ v(x,y) \underset{\text{def}}{=} e^{2\pi i y} \end{cases}$	①（ユニタリ） $u^*u = uu^* = 1$ ②（ユニタリ） $v^*v = vv^* = 1$ ）（絶対値1ということ） ③（可換） $uv = vu$

以下では簡単のため，特に断わらない限り，$\theta \in [0,1]$ は無理数とする．

$\boxed{\text{Def}}$ 非可換トーラス ≡ 無理数回転環 A_θ とは2つの unitary u と v (ie $u^*u = uu^* = 1$, $v^*v = vv^* = 1$) から生成された C^*-環 A_θ で交換関係 $uv = e^{2\pi i\theta} vu$ をもつもの ■

■ A_θ の簡単な性質

㋐《 $A_\theta = C^*(u, v)$ の元は Fourier 展開できる》

$\forall a \in A_\theta \qquad a = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} a_{n,m} u^n v^m$ と一意にかける．

(ただし収束は L^2 の意味であることに注意)

㋑《 $A_\theta = C^*(u, v)$ は生成元のとり方によらず一意的に定まる》

他に u', v' という unitary で $u'v' = e^{2\pi i}v'u'$ をみたすものをもってきても $\exists\, \varphi : C^*(u, v) \longrightarrow C^*(u', v')$; * 同型で $\varphi(u) = u'$, $\varphi(v) = \varphi(v')$ となる．

㋒《 A_θ は simple だ》

もし ideal $J \subsetneq A_\theta$ があったとして $J = 0$ をいえばよい．

quotient map $\pi : A_\theta \longrightarrow A_\theta / J$ を考える．

$uv = e^{2\pi i\theta} vu \implies \pi(u)\pi(v) = e^{2\pi i\theta}\pi(v)\pi(u)$

ここで㋑を適用して π は同型となり，$J = \ker \pi = 0$

㋓《 A_θ 上には trace $\tau : A_\theta \to \mathbb{C}$ が一意的に存在する》

ここで τ が trace とは正規化された ($\tau(1) = 1$)，正な ($\forall a \in A_\theta \ \ a \geq 0 \Rightarrow \tau(a) \geq 0$) functional で $\tau(xy) = \tau(yx)$ となるもの．

(存在) $a=\sum_{n,m} a_{n,m} u^n v^m \in A_\theta$ と Fourier 展開しておくと

$\boxed{\tau(a)=a_{0,0}}$ と定数項 $a_{0,0}$ をとればよい

可換の時はちょうど $f\in C(\mathbb{T}^2)$ に対する積分 $\int f(x,y)dxdy$ に当たる

(一意性) 他に trace $\tau':A_\theta\to\mathbb{C}$ があったとしよう。

$\tau'(a)=a_{0,0}$ を示せばよい。$n\neq 0$ か $m\neq 0$ なら $\tau(u^n v^m)=0$ を示せばよい。例えば $m\neq 0$ としよう.

$u(u^n v^m)u^*=u^n(uv^m)u^*=u^n(e^{2\pi i m\theta}v^m u)u^*=e^{2\pi i m\theta}u^n v^m$

よって $\tau'(uu^nv^mu^*)=e^{2\pi i m\theta}\tau'(u^nv^m)$ 。一方 τ' が trace であることより $\tau'(uu^nv^mu^*)=\tau'(u^nv^mu^*u)=\tau'(u^nv^m)$

この2式より $(e^{2\pi i m\theta}-1)\tau'(u^nv^m)=0$. θ が無理数なので $e^{2\pi i m\theta}\neq 1$ より $\tau'(u^nv^m)=0$

■ $A_\theta=C^*(u,v)$ の1つの具体的構成例

Hilbert 空間 $H=L^2(\mathbb{T})$ 上に2つの unitary u と v をつくる:

$$\begin{cases}(u\xi)(x)=e^{2\pi i x}\xi(x), & (e^{2\pi i x}\text{のかけ算作用素})\\ (v\xi)(x)=\xi(x-\theta), & (\theta\text{のずらし})\end{cases}$$

ここで $\xi\in L^2(\mathbb{T})$ で $x,\theta\in\mathbb{R}$ を mod 1 で $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の元とみる

すると $(uv\xi)(x)=e^{2\pi i x}(v\xi)(x)=e^{2\pi i x}\xi(x-\theta)$

$(vu\xi)(x)=(u\xi)(x-\theta)=e^{2\pi i(x-\theta)}\xi(x-\theta)$

よって $uv=e^{2\pi i\theta}vu$ という交換関係が示せた.

u と v は明らかに unitary なので $C^*(u,v)\cong A_\theta$.

Heisenberg の交換関係の discrete 版となっている.

- 市原氏は，A_θは実は1コの non-normal operator から生成されることを示していて興味深い。
- 《高次元化》2コのunitariesの代わりにnコのunitaries $u_1, u_2, \cdots, u_n$とその間の交換関係$u_i u_j = e^{2\pi i \theta_{ij}} u_j u_i$を与えて$C^*$-環$C^*(u_1, \cdots, u_n)$をつくる

② $\mathbb{Z}^2$の射影表現のつくるC^*-環

Def Gを局所コンパクト可換群とする．Hilbert空間H上のunitary作用素全体を$\mathcal{U}(H)$とかく。写像$W: G \longrightarrow \mathcal{U}(H)$が<u>unitary表現</u>とは$W_g W_h = W_{gh}$　$(g, h \in G)$となることであった。<u>射影表現</u>とは，それが群の準同型より絶体値1のスカラー$\mathbb{T}$の分だけ違ってもよいことを許したものをいう

$$\boxed{W_g W_h = b(g, h)\, W_{gh} \quad (g, h \in G)}$$

ここで$b(g, h) \in \mathbb{T}$．するとbは2-cycle $Z^2(G, \mathbb{T})$の元となる:

$$b(g, h)\, b(gh, k) = b(g, hk)\, b(h, k)$$

bのことをG上の<u>multiplier</u>ともいう．

例 $A_\theta = C^*(u, v)$としておく

$G = \mathbb{Z}^2 \ni g = (n, m)$とかき

$$\boxed{W_g = W_{(n,m)} = u^n v^m}\text{ とおく.}$$

この時Wは$b(g_1, g_2) = b((n_1, m_1), (n_2, m_2)) = e^{-2\pi i \theta m_1 n_2}$をmultiplierにもつ射影表現になっており$A_\theta = C^*(u, v)$は$\{W(g) \mid g \in G = \mathbb{Z}^2\}$で生成されている．実際

$$
\begin{aligned}
W_{g_1}W_{g_2} &= W_{(n_1,m_1)}W_{(n_2,m_2)} \\
&= u^{n_1}v^{m_1}u^{n_2}v^{m_2} \\
&= e^{-2\pi i\theta m_1 n_2}u^{n_1}u^{n_2}v^{m_1}v^{m_2} \\
&= e^{-2\pi i\theta m_1 n_2}u^{n_1+n_2}v^{m_1+m_2} \\
&= b(g_1,g_2)W_{g_1+g_2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

さて $W_{g_1}W_{g_2} = b(g_1,g_2)W_{g_1+g_2}$

$W_{g_2}W_{g_1} = b(g_2,g_1)W_{g_2+g_1} = b(g_2,g_1)W_{g_1+g_2}$

より交換関係 $W_{g_1}W_{g_2} = b(g_1,g_2)\overline{b(g_2,g_1)}W_{g_2}W_{g_1}$ が出る

そこで $\beta(g_1,g_2) \underset{\text{put}}{=} b(g_1,g_2)\overline{b(g_2,g_1)}$ とおくと $\beta : G\times G\to\mathbb{T}$

は anti-symmetric bicharacter に成る。

$\boxed{例}$ $G=\mathbb{Z}^2$ の時

$$\beta(g_1,g_2)=\beta((n_1,m_1),(n_2,m_2)) = e^{2\pi i\theta(n_1m_2-m_1n_2)} = e^{2\pi i\theta\, g_1\wedge g_2}$$

$\boxed{定理2}$ (Slawny) $W: G\longrightarrow \mathcal{U}(H)$：射影表現とし、それより導かれる anti-symmetric bicharacter β が non-generate と仮定する

(i.e. $(\forall g\in G\ \ \beta(g,h)=1) \Rightarrow h=1$)

$\Longrightarrow$ $\{W_g \mid g\in G\}$ より生成された C^* 環は一意的に定まる。$\blacksquare$

$\boxed{例}$ $G=\mathbb{Z}^2$ の時

θ が無理数 $\Longrightarrow$ β: non-degenerate

これより A_θ が生成元のとり方に依らないことが分かる

≪一般化≫ (Elliot) G を tortion free discrete abelian group, β を non-degenerate antisymmetric bicharacter として A_β を考えよ

③ 接合積 $C(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \cong A_\theta$

$\alpha \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{T})$ を角度 θ だけの回転とする

$$\alpha(x) = x - \theta \pmod 1$$

θ が無理数だと α は ergodic な action でその orbit space $\mathbb{T}/\alpha$ は smooth にならない。そこで $C(\mathbb{T}/\alpha)$ を考える代わりに接合積 $C(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ を考えて、その代用品とする。$\alpha : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}\, C(\mathbb{T})$ とみる。

$\boxed{\text{Def}}$ <u>接合積</u> $C(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ とは C^* 環 $B = C(\mathbb{T})$ を係数にもつ群 $G = \mathbb{Z}$ の群環 $B[G]$ のノルムによる完備化したもので action α により、ひねった積が入っている：

$$\begin{cases} B \rtimes_\alpha G = \overline{B[G]} \supset B[G] \ni b = \sum_{g \in G} b_g \lambda_g \\ \text{共変関係 } \boxed{\lambda_g b \lambda_g^{-1} = \alpha_g(b)} \text{ が成立するように積を入れる：} \\ (b\lambda_g)(c\lambda_h) \left(= b\lambda_g c \lambda_g^{-1} \lambda_g \lambda_h\right) \underset{def}{=} b\,\alpha_g(c)\,\lambda_{gh} \end{cases}$$ ■

今は特に $G = \mathbb{Z}$ なので

$$C(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \ni f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n u^n, \qquad f_n \in C(\mathbb{T})$$

と展開できる。この時

- trace では $\tau(f) = \tau\left(\sum_n f_n u^n\right) = \int_{\mathbb{T}} f_0(x)\,dx$ で入る
- $C(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ は実は非可換トーラス A_θ と同型になる

$$\left(\begin{array}{l} v(x) = e^{2\pi i x} \text{ とおくと } v \in C(\mathbb{T}) \text{ は } C(\mathbb{T}) \text{ の生成元} \\ \text{共変関係} \quad u v u^{-1} = \alpha(v) = e^{2\pi i \theta} v \text{ より} \\ \quad u v = e^{2\pi i \theta} v u \end{array} \right)$$

- $A_\theta \cong C(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ が simple であることは action α が minimal (各 orbit が dense) であることからも示せる。

④ リー群 $\mathbb{T}^2$ からの ergodic action をもつ C^*環は A_θ

非可換トーラス A_θ 上へのリー群 $\mathbb{T}^2$ からの action $\gamma : \mathbb{T}^2 \to \mathrm{Aut}\, A_\theta$ で $\gamma_{(e^{2\pi i\alpha},\, e^{2\pi i\beta})}(u^n v^m) = e^{2\pi i n\alpha} e^{2\pi i m\beta} u^n v^m$ となるものがある. Fourier 展開してみるとすぐわかるようにこの actionは ergodic である (i.e. fixed point algebra $A_\theta^\gamma = \mathbb{C}$). さらに Olsen-Pedersen-Takesaki により, この逆も成立することがわかる:
リー群 $\mathbb{T}^2$ からの ergodic action をもつ C^*環は A_θ に限る.
宋・片山によってこれは co action の場合にまで一般化されている.

- A_θ 上の trace τは $\boxed{\tau(a) = \int_{\mathbb{T}^2} \gamma_t(a)\,dt}$ $a \in A_\theta$ で与えられる
- リー群 $\mathbb{T}^2$ から 2つの canonical な derivation δ_1, δ_2 が導かれる

$$\begin{cases} \delta_1(u^n v^m) = (2\pi i n)\, u^n v^m \\ \delta_2(u^n v^m) = (2\pi i m)\, u^n v^m \end{cases}$$

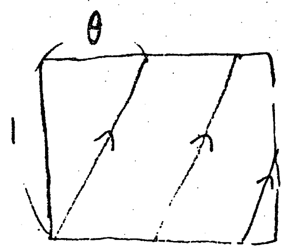
A_θ 上の微分構造として δ_1とδ_2を与えることとみなす(後述)

⑤ Kronecker foliation $\mathcal{F}_\theta$ からつくられた C^*環 $\underset{\text{stable}}{\cong} A_\theta$

$$\begin{tikzcd} \text{discrete な } \mathbb{Z}\text{-力学系} \arrow[d, shift right, "\text{suspension}"'] \\ \text{continuous な } \mathbb{R}\text{-力学系} \arrow[u, shift right, "\text{transversal}"'] \end{tikzcd}$$

$\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$: θ回転

$\phi_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$: Kronecker flow



2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上に
$dx = \theta\, dy$
で Kronecker foliation $\mathcal{F}_\theta$ が入る

一般に $\alpha : X \longrightarrow X$: homeomorphism の suspension $\phi_t : M \to M$ は:

- $M = (X \times \mathbb{R})/\sim$

  ここで $(\alpha^n(x), t) \sim (x, n+t)$ $(n \in \mathbb{Z},\ x \in X)$

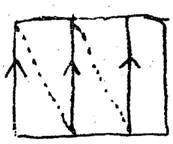
- flow ϕ_t は $\phi_t[(x,s)] = [(x, t+s)]$ で入れる

特に $\alpha : X = \mathbb{T} \longrightarrow X = \mathbb{T}$: θ-回転

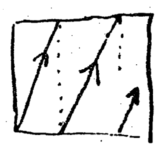
$\Longrightarrow M = (\mathbb{T} \times \mathbb{R})/\sim \ \cong \mathbb{T}^2$

$(x+\theta, t) \sim (x, t+1)$ より

ϕ_t は kronecker flow と同視できる



を



とみなおす

この時

$$\begin{array}{ccc} C(\mathbb{T}) \rtimes \mathbb{Z} & \underset{\text{stable}}{\cong} & C(\mathbb{T}^2) \rtimes \mathbb{R} \\ \wr\!\wr & & \wr\!\wr \\ A_\theta & & C^*(\mathbb{T}^2, \mathcal{F}_\theta) \end{array}$$

$\leftarrow$ foliation $\mathcal{F}_\theta$ からつくられた C^*環

(ここで stable 同型とは compacts K を除いて同型ということ)

- foliation からつくられた C^*環についてもっとくわしいことはこの講究録の高井さんの解説をごらんください.

⑥ 群 C^*-環の primitive quotient $\cong A_\theta$

これは梶原さんに教えてもらったこと: D. Poguntke という人が, 例えば connected Lie 群 2-step nilpotent 群の, 群 C^*-環の primitive quotient に simple な非可換トーラスが compacts K を除いて現れるということを調べている. ここで primitive quotient というのは群 G のある既約表現 π に対し $C^*(G)/\ker\pi$ つまり既約表現の Image のつくる C^*環のこと。詳しいことは梶原さん

に御教示を願うことにして，ここでは最も典型的な例を1つだけあげておく．

例 Discrete Heisenberg group H

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&h_1&h_3\\0&1&h_2\\0&0&1\end{pmatrix}\ \middle|\ h_i\in\mathbb{Z}\right\}$$ を discrete Heisenberg group という

$$a=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad c\underset{\text{put}}{=}aba^{-1}b^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$H=\langle\langle a,b\mid ac=ca,\ bc=cb\rangle\rangle$ と表示できる

c は H の center の元であり，H は a と b の2元で生成される

さて π を H の既約表現とせよ．$\pi(c)$ は $\pi(C^*(H))$ の center に入いるが $\pi(C^*(H))$ は primitive なのでその center は $\mathbb{C}$．そこで $\pi(c)=\lambda\cdot 1=e^{2\pi i\theta}\in\mathbb{T}$ とおく

$c=aba^{-1}b^{-1}$ より

$\pi(c)=\pi(a)\pi(b)\pi(a)^{-1}\pi(b)^{-1}$

そこで $u=\pi(a)$，$v=\pi(b)$ とおくと u と v は unitary で

$$uvu^{-1}v^{-1}=e^{2\pi i\theta}\quad\text{つまり}\quad uv=e^{2\pi i\theta}vu$$

よって primitive quotient $C^*(H)/\ker\pi\cong\pi(C^*(H))\cong A_\theta$ ■

⑦ A_θ が物理にあらわれる

discrete Mathieu model や量子 Hall 効果の所に非可換トーラス A_θ は現われるのだが，それらは一切 Belissard に任せてここでは省略する

⑧ Rieffel による非可換トーラスの一般化 (市原さんが詳しい)

M を局所コンパクト可換群

$G = M \times \hat{M} \ni x = (m, s),\quad y = (n, t)$

β : Heisenberg cocycle on G :

$$\beta((m, s), (n, t)) \underset{df}{=} \langle m, t \rangle \qquad \begin{matrix} m, n \in M \\ s, t \in \hat{M} \end{matrix}$$

ここで $\langle m, t \rangle$ は M と $\hat{M}$ の duality を示す

β から自然に定まる anti-symmetric bi-character を ρ とする:

$\rho(x, y) = \beta(x, y)\overline{\beta(y, x)} = \langle m, t \rangle \overline{\langle n, s \rangle}$

$D \subset G$: lattice をとる (D: discrete で G/D : compact)

$D^{\perp} = \{ y \in G \mid \forall x \in D \quad \rho(x, y) = 1 \} \subset G$: lattice となる

この時

$$C^*(D, \beta) \underset{\text{morita eq}}{\approx} C^*(D^{\perp}, \bar{\beta})$$

でその imprimitive bimodule として M 上の Schwartz space

$S(M)$ の completion V がとれる

例) $M = \mathbb{R}$

$G = \mathbb{R} \times \hat{\mathbb{R}}$
$$\begin{cases} \beta((m, s), (n, t)) = e^{imt} \\ \rho((m, s), (n, t)) = e^{i(mt - ns)} \end{cases}$$

$D = \mathbb{Z} \times 2\pi\theta\mathbb{Z}$

$D^{\perp} = (\theta^{-1}\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z})$ (?) (2πの重みはこれで確かしら?)
各自で check してください

$C^*(D, \beta) \cong A_{\theta}$

$C^*(D^{\perp}, \bar{\beta}) \cong A_{\theta^{-1}}$

§2、非可換微分幾何.

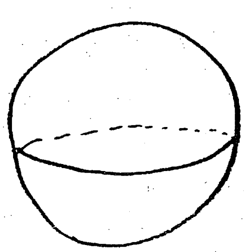
Yang-Mills理論をはじめとして非可換微分幾何のことはこの講究録では中神さんの解説に詳しいので，ここでは簡単な所のみとりあげます.

微分幾何ですばらしい定理の1つとしてあげられるのはGauss-Bonnetである。これは多様体上で微分幾何学的に定義されるものが，実は位相幾何学的に定まる量のEuler標数に一致するというものである.

$\boxed{\text{定理3}}$ (Gauss-Bonnet) Mを向きづけ可能なコンパクトな2次元リーマン多様体とし，Kをそのガウス曲率とし，$\chi(M)$をEuler標数とする。dAをvolume elementとする

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_M K\,dA = \chi(M) \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{例}}$ ① 球(半径r)

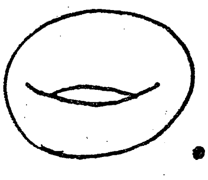


・ガウス曲率 $K = \frac{1}{r^2} > 0$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,dA = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = 2$$

・一方 $\chi(M) = 2$

② 2次元トーラス



・ガウス曲率Kは外側では正で内側では負

よってそれが打ち消されて $\frac{1}{2\pi}\int_M K\,dA = 0$

・一方 $\chi(M) = 0$

ここでさらに注意すべきことは，左辺のさしあたり実数値をとる量がこのGauss-Bonnetの定理よりEuler標数という整数値に限定されることがみてとれることである。

以上のことを典型例として非可換微分幾何においてもよく似たことをやってみることにしよう。

smoothな非可換トーラスA_θの元全体をA_θ^∞とかく．$\mathcal{E}^\infty$をA_θ^∞上の有限生成射影加群とする（これはsmoothなvector bundleの代わり）．§1の⊕にあるようにリー群T^2のactionはそのリー環$\mathbb{R}^2$からのaction（もしくは2つのderivation δ_1とδ_2）を導く．それを使ってconnection ∇を定義する．このconnectionのcurvature Θ_∇のtrace $\tau_\mathcal{E}$による値をガウス曲率の積分の代わりだと思おう

$$c_1(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi i}\tau_\mathcal{E}(\Theta_\nabla)$$

今$\mathcal{E}^\infty = eA^\infty$と$A^\infty$のprojection eを使ってかけているとする

この時次が成立する

$$\boxed{c_1(e) = \frac{1}{2\pi i}\tau\left(e(\delta_1(e)\delta_2(e) - \delta_2(e)\delta_1(e))\right)}$$

右辺はちょうどcyclic cohomologyとK_0とのpairingとみれる。この値が整数値になることを以下でみてみよう。(これは量子Hall効果を説明する).

まず、通常の(＝可換の)微分幾何と非可換微分幾何を比較対照してみよう。

通常の微分幾何	非可換微分幾何
多様体Mの位相構造	C^*-環 A
多様体Mの微分構造	$A^\infty \subset A$: dense *-環 (リー群Gもしくはリー環Lからの action)
(連続な) vector bundle	A上の有限生成射影加群 $\mathcal{E}$
(smoothな) vector bundle	A^∞上の有限生成射影加群 $\mathcal{E}^\infty$
$K^0(M)$	$K_0(A)$
Hermit計量	Hilbert A(もしくはA^∞)-module $\mathcal{E}$ 上のA値(もしくはA^∞)値内積 $\langle\ \|\ \rangle$
connection	$\nabla: \mathcal{E}^\infty \longrightarrow \mathcal{E}^\infty \otimes L^*$: linear で $\nabla_X(\xi \cdot a) = (\nabla_X \xi)a + \xi \cdot \delta_X(a)$ (ここで $\delta: L \longrightarrow \mathrm{Der}(A^\infty)$: Lie環のaction $X \in L,\ \xi \in \mathcal{E}^\infty,\ a \in A^\infty$)
connectionがcompatible	$\delta_X(\langle\xi\|\eta\rangle) = \langle\nabla_X \xi\|\eta\rangle + \langle\xi\|\nabla_X \eta\rangle$
connectionのcurvature	$\Theta_\nabla : L \times L \longrightarrow \mathrm{End}_A(\mathcal{E}^\infty)$ $\Theta_\nabla(X,Y) \underset{\text{def}}{=} \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$
De Rham homology	cyclic cohomology $H^*_\lambda(A^\infty)$
Chern character	$K_0(A)$と$H^{even}_\lambda(A^\infty)$とのpairing
⋮	⋮ ⋮ ⋮

■微分構造

C^*-環 A 上に微分構造を入れるとはどういうことかについて現在固まった考え方はまだない。ここではリー群 G からの action $\gamma: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,A$ の無限小生成元をつくることにより G の Lie 環 L からの action $\delta: L \longrightarrow \mathrm{Der}(A^\infty)$ によって微分構造を与えるものと一応しておく。ここで $A^\infty = \{a \in A \mid G \ni t \longmapsto \gamma_t(a) \in A^\infty \text{ が } C^\infty\}$ は C^∞-ベクトル全体のつくる A の稠密な部分環である。この時

$$\delta_X(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma_{\exp(tX)}(a) - a}{t} \qquad \begin{pmatrix} a \in A^\infty \\ X \in L \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{例}}$ $A = A_\theta$: 非可換トーラスとする　$A_\theta = C^*\{u, v\}$

$G = \mathbb{T}^2$, $L = \mathrm{Lie\,alg}(G) = \mathbb{R}^2$ の base e_1, e_2 とする

$\gamma: \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathrm{Aut}\,A_\theta$ は §1 の④で決めたもの：

$$\gamma_{(e^{2\pi i\alpha}, e^{2\pi i\beta})}(u^n v^m) = e^{2\pi i n\alpha} e^{2\pi i m\beta} u^n v^m$$

この時　$A_\theta^\infty = \{ a = \sum a_{n,m} u^n v^m \in A_\theta \mid \forall k, k' \ |n^k m^{k'} a_{m,n}| \to 0 \ (n, m \to \infty) \}$

と Fourier 展開した時の係数 $(a_{n,m})_{n,m}$ が急減少なもの達からなる。

また $\delta: L = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathrm{Der}(A^\infty)$ の生成元 $\delta_1 = \delta_{e_1}$, $\delta_2 = \delta_{e_2}$ は

$$\begin{cases} \delta_1(u^n v^m) = 2\pi i n\, u^n v^m \\ \delta_2(u^n v^m) = 2\pi i m\, u^n v^m \end{cases}$$

特に　$\begin{cases} \delta_1(u) = 2\pi i & \delta_1(v) = 0 \\ \delta_2(u) = 0 & \delta_2(v) = 2\pi i \end{cases}$

さて非可換トーラス上にはどれだけ異なった微分構造が入いるのだろうか？これにはSakaiの問題を高井さんが解いた後，Bratteli，Elliot，Jorgensen，Goodman …等の研究があり，どんなLie群が非可換トーラス上に作用できるかできないか，いろいろ調べられているが，ここでは省略する

■ 有限生成射影加群をすべて求める

Connection ∇ をつくるために，それが作用する空間である A_θ^∞ 上の有限生成射影加群 $\mathcal{E}^\infty$ をすべて求めることから始めよう。それは次の2段階で行なう

① $K_0(A_\theta^\infty) = K_0(A_\theta)$ を計算する

② cancellation theorem を証明して stable 同型な有限生成射影加群が実は本当に同型をいう

■ K-群を求める

C^*-環 A 上の有限生成射影加群 $\mathcal{E}$ は $A \otimes M_n$ のある projection e と $\boxed{\mathcal{E} = eA^n}$ という関係で1:1に対応しているので今後どちらも適当に使うことにする.

$$\mathcal{E}_1 \underset{\text{stable}}{\cong} \mathcal{E}_2 \overset{\text{def}}{\iff} \exists k \quad \mathcal{E}_1 \oplus A^k \cong \mathcal{E}_2 \oplus A^k$$

有限生成射影加群の stable 同型クラス全体 $\{[\mathcal{E}]\}$ が直和でつくる semigroup を Grotendieck 化したものが $K_0(A)$ であった。もちろん $\{[\mathcal{E}]\}$ の代わりに $\bigcup_n (A \otimes M_n$ の projection 達$)$ に von Neuman equivalence (か unitary equivalence) を入れたものをとってもよい.

定理4 (Pimsner-Voiculescu-Rieffel)

$$\begin{cases} K_0(A_\theta) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \\ \hat{\tau}(A_\theta) = \mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z} \end{cases}$$

(ここで $\tau: A_\theta \to \mathbb{C}$ は trace)

証明: P-V の6項完全図式を使う

$A_\theta = C(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ と接合積にかけるので

$$\begin{tikzcd} K_0(C(\mathbb{T})) \arrow[r, "1-\alpha_*"] & K_0(C(\mathbb{T})) \arrow[r, "i_*"] & K_0(C(\mathbb{T})\rtimes\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ K_1(C(\mathbb{T})\rtimes_\alpha\mathbb{Z}) \arrow[u] & K_1(C(\mathbb{T})) \arrow[l, "i_*"'] & K_1(C(\mathbb{T})) \arrow[l, "1-\alpha_*"'] \end{tikzcd}$$

: exact

これを計算して

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & K_0(A_\theta) \arrow[d] \\ K_1(A_\theta) \arrow[u] & \mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l, "0"'] \end{tikzcd}$$

また $\tau(e)=\theta$ となる projection は具体的に求められる

$e \in A_\theta = C(\mathbb{T})\rtimes\mathbb{Z}$ で

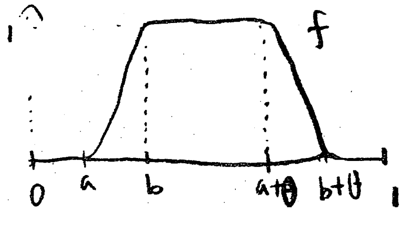
$$\boxed{e = v^* g + f + g v} \qquad (f, g \in C(\mathbb{T}))$$

という形をしたものをさがす。

e が projection $\Longleftrightarrow \begin{cases} e = e^* \\ e^2 = e \end{cases}$ より f と g に関する関数等式

を得る. f, g を実数値関数の中でさがすとそれは次となる:

$$\begin{cases} f = f^2 + g^2 + \alpha^{-1}(g^2) \\ g\,\alpha(g) = 0 \\ (f + \alpha(f) - 1)\,g = 0 \end{cases}$$



例えば右図のような f をとってから g を解け.

- cancellation theorem は A_θ で成立する

Rieffel は A_θ の Bass stable rank が 2 以下であることなどを使ってこれを Warfield の algebraic K-theory における cancellation theorem を適用することで示した。

- 有限生成射影加群の標準的モデル

以下では簡単のため $\tau(e)=\theta$ となる projection に対応する A_θ^∞ 上の有限生成射影加群 $\mathcal{E}^\infty = eA_\theta^\infty$ を構成する

$$\mathcal{E}^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \equiv \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall p \forall k \ \lim_{|x|\to\infty} |x^k| D^p f(x) = 0 \}$$

というシュワルツ空間をとればよい。

$\mathcal{E}^\infty$ への A_θ^∞ の右からの action は次で与える:

A_θ^∞ の生成元 u と v $(uv = e^{2\pi i\theta} vu)$ の action をきめよう

$$\begin{cases} (f\cdot u)(x) = e^{2\pi i x} f(x) \\ (f\cdot v)(x) = f(x-\theta) \end{cases}$$

$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\quad f\cdot uv = e^{2\pi i\theta} f vu$ が check できて

A_θ^∞ からの action にあげられる

$\mathcal{E}^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上に Hermit 計量 (A_θ^∞ 値内積 $\langle\ |\ \rangle$) を次の式で入れる. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し

$\langle f \mid g \rangle = \sum a_m u^m \in A_\theta$ と展開しておくと

$$a_m(r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f(r-n)}\, g(r-n+m\theta),$$

ここで $a_m \in C(\mathbb{T})$, $\quad r \in \mathbb{T}$.

compacts $K(\mathcal{E}) \simeq A_{\theta^{-1}} \ni 1$ より $\mathcal{E}$ や $\mathcal{E}^\infty$ が有限生成射影加群

■ $\mathcal{E}^\infty$ 上に connection ∇ を構成する

$\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes L^*$ の代わりに $L = \mathbb{R}^2$ に対応して

2つの linear map ∇_1 と $\nabla_2 : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ で $\forall a \in A_\theta^\infty$ に対し

$$(*) \quad \boxed{\nabla_i (f \cdot a) = \nabla_i (f) \cdot a + f \cdot (\delta_i(a))} \quad i = 1, 2$$

をみたすものをつくればよい

$\boxed{\text{Def}}$

$$\begin{cases} (\nabla_1 f)(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) \\ (\nabla_2 f)(x) = \dfrac{2\pi i x}{\theta} f(x) \end{cases}$$

これらが(*)をみたすことを示そう．例えば ∇_1 について調べよう

$\forall a \in A_\theta^\infty$ の代わりにその生成元である $a = u$ や $a = v$ の場合

にのみ調べれば十分。ここでは $a = u$ の時をやってみよう

• $\nabla_1 (f \cdot u)(x)$

$$= \frac{d(f \cdot u)(x)}{dx} = \frac{d\left(e^{2\pi i x} f(x)\right)}{dx}$$

$$= 2\pi i\, e^{2\pi i x} f(x) + e^{2\pi i x} f'(x)$$

• $(\nabla_1 (f) \cdot u + f \cdot (\delta_1(u)))(x)$

$$= (f' \cdot u)(x) + \left(f \cdot (2\pi i u)\right)(x)$$

$$= e^{2\pi i x} f'(x) + 2\pi i \cdot e^{2\pi i x} f(x)$$

よって $\nabla_1 (f \cdot u) = \nabla_1 (f) \cdot u + f(\delta_1(u))$

他も同様 ……

■

- Curvature $\Theta_\nabla : L \times L \to \mathrm{End}_{A_\theta^\infty}(\mathcal{E}^\infty)$ の計算

$X, Y \in L = \mathbb{R}^2$ に対して

$\boxed{\text{Def}}$ Curvature $\Theta_\nabla(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$

さて リー環 $\mathbb{R}^2$ は abelian なので $[X, Y] = 0$. よって

$$\Theta_\nabla(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$$

Θ_∇ は交代2次形式なので $L = \mathbb{R}^2$ の base $\{e_1, e_2\}$ 上でのみ調べればよい

$$\Theta_\nabla(e_i, e_i) = 0 \qquad i = 1, 2$$

$$\Theta_\nabla(e_1, e_2) = \nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1 \in \mathrm{End}_{A_\theta^\infty}(\mathcal{E}^\infty) \text{ を計算しよう}$$

$f \in \mathcal{E}^\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ をとってくる

$$(\nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1) f(x)$$

$$= \frac{d(\nabla_2 f)(x)}{dx} - \frac{2\pi i x (\nabla_1 f)(x)}{\theta}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{2\pi i x f(x)}{\theta}\right) - \frac{2\pi i x f'(x)}{\theta}$$

$$= \frac{2\pi i f(x)}{\theta} + \frac{2\pi i x f'(x)}{\theta} - \frac{2\pi i x f'(x)}{\theta}$$

$$= \frac{2\pi i}{\theta} \cdot f(x)$$

従って $\Theta_\nabla(e_1, e_2) = \dfrac{2\pi i}{\theta}$ （つまり ∇ は constant curvature をもつ）

- $c_1(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E}^\infty)$ は整数値

$$c_1(\mathcal{E}^\infty) \underset{\text{Def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \tau_{\mathcal{E}}(\Theta_\nabla(e_1, e_2)) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{\theta} \tau_{\mathcal{E}}(1)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{\theta} \cdot \tau(e) = \frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi i}{\theta} \cdot \theta = 1 \text{ （整数!）}$$

（ここで $\tau_{\mathcal{E}}$ は $\tau_{\mathcal{E}}(1) = \tau(e)$ と正規化された $\mathrm{End}_{A_\theta}(\mathcal{E})$ 上の trace） ■