数理解析研究所講究録
第623巻 1987年 54-66


# セパレート推測と情報量

統計数理研究所　久保木久孝 (Hisataka KUBOKI)

## 1．序

$X=(X_1,\cdots,X_N)$ は同時分布 $P_\theta$ からのサンプルとする。ここで $P_\theta$ は $\mathcal{P}^X=\{P_\theta:\theta\in\Theta\}$ に属し、$\theta={}^t(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ は $R^n$ のある区間 $\Theta$ の元であるとする。問題は X から $P_\theta$ のある特性に関する情報を引き出すことである。ここでは、そのような特性は $\theta^{(1)}={}^t(\theta_1,\cdots,\theta_m)$, $m<n$ であると考え、$\theta^{(2)}={}^t(\theta_{m+1},\cdots,\theta_n)$ は撹乱母数と見なす。以後モデル $\mathcal{P}^X$ は $\sigma$-有限測度 $\mu$ に関し密度 $p_\theta$, $\theta\in\Theta$ を持つとする。

セパレート推測とは、$\theta^{(1)}$ の推測を行なうにあたり、先ず次のいずれかの方法で $\theta^{(2)}$ をモデルから削除することから始める：(i) 周辺化法 — その周辺分布の族（周辺サブモデル）が $\theta^{(1)}$ のみに依存するような統計量を選び、それを利用する；(ii) 条件付け法 — それを与えたときの X の条件付き分布の族（条件付きサブモデル）が $\theta^{(1)}$ のみに依存するような統計量を選び、それを利用する。そのとき、それらサブモデルは、何等かの意味で、オリジナルモデル $\mathcal{P}^X$ に含まれる $\theta^{(1)}$ に関する利用可能な適当な情報を全て保存しているようなもので

ある必要がある。このことを調べるには、そのような情報を計量する測度が必要である。これまで、基本的には二つの考え方が提案されている（Godambe (1980) および Liang (1983) 参照）。本稿は、そのような測度の解析に対する一般的かつ統一的なアプローチのための基礎を与えることをめざしている。この目的のために重要な概念は、smoothness, sensitivity および efficacy の諸概念である。

## 2. SENSITIVITY と SMOOTHNESS

推測問題の本質は、可能な分布の族の中から本当のものを選び出すという問題であるから、その分布族を調べること、その族の要素がお互いにどれだけ異なっているのかを考察することは重要である。ここでは、$\mathcal{P}^X$ の二つの分布 $P_\tau$ と $P_\theta$ の違いを Hellinger の距離 $\rho^X(\tau, \theta)$ で計る；

$$\rho^X(\tau, \theta)^2 = \int (\sqrt{p_\tau} - \sqrt{p_\theta})^2 \, d\mu.$$

今 $\tau$ と $\theta$ が近いとき、この量がどのように動くかを調べる。$R^n$ のベクトル $l={}^t(l_1, \cdots, l_n)$ に対し、

$$s^X(\theta; l)^2 = 4 \liminf_{v \to 0} \rho^X(\theta + vl, \theta)^2 / v^2$$

とおき、これをモデル $\mathcal{P}^X$ の（$\theta$ における方向 $l$ の）sensitivity と呼ぶことにする。

さて $p_\theta$ は、ほとんどすべての $x$ に対し、各 $\theta_i$ に関して偏微分可能であるとし、それら微係数のベクトルを $p'_\theta = {}^t(p'_{1\theta}, \cdots, p'_{n\theta})$ で表わす。このとき、行列 $I^X(\theta) = [I^X_{ij}(\theta)]$ を $I^X_{ij}(\theta) =$

$E_\theta\{p'_{i\theta}p'_{j\theta}/p_\theta^2\}$ で定義する。通常、これは Fisher 情報量行列と呼ばれるものである。一般に、任意の $\theta$ および $l$ に対し、$s^X(\theta;l)^2 \geqq {}^t l I^X(\theta) l$ であるが、$I^X(\theta)$ が統計的に意味を持つのは、$s^X(\theta;l)^2 = {}^t l I^X(\theta) l < \infty$ の場合であることが指摘されている。このとき、モデル $\mathcal{P}^X$ は <u>semi-smooth</u> であると言い、$I^X(\theta)$ を sensitivity 行列と呼ぶ。実際問題として重要なのは次のような場合である。

<u>定義</u> (Pitman, 1979). $\mathcal{P}^X$ は semi-smooth であるとする。もし任意の $\theta$ および $l$ に対し、$\lim_{v\to 0} \rho^X(\theta+vl, \theta)^2/v^2$ が存在するなら、$\mathcal{P}^X$ は <u>smooth</u> であると言う。

この概念に関する興味のある議論は、Pitman (1979) によって展開されている。ここでは、次の事実を指摘しておく：もし $\mathcal{P}^X$ が smooth なら

$$\lim_{v\to 0} \int |(p_{\theta+vl} - p_\theta)/v - \langle l, p'_\theta\rangle|\, d\mu = 0;$$

ここで、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積を表わす記号とする。

さて或る統計量（$\mathcal{X}$ から或る空間 $\mathcal{T}$ への可測写像）T を考える。セパレート推測を行なうにあたっては、周辺サブモデル $\mathcal{P}^T$ および条件付きサブモデル $\mathcal{P}^{X|T}$ の性質を調べることは重要な意味を持つ。ここでは特に、これらサブモデルの smoothness について議論する。そのために二、三の準備をおこなう。

今、$\mathcal{T}$ 上の $\sigma$-有限測度 $\nu$ で $\mu T^{-1} \ll \nu$ なるものを選び固定する。このような $\nu$ は必ず存在する。f は $\mathcal{X}$ 上の実数値関数で、その $\mu$-積分が存在するものとする。そのとき、次の式で $\mathcal{T}$ 上の実数値関数 g

を定義する：

$$\int_{T^{-1}A} f\, d\mu = \int_A g\, d\nu;$$

ここで、A は $\mathcal{T}$ の任意の可測部分集合である。このような関数を $g=T^*f$ と書く。特に、$q_\theta=T^*p_\theta$ は T の $\nu$ に関する周辺密度関数を表わしている。この写像 $T^*$ の諸性質については、Pitman (1979) および Kuboki (1984, 1987) を参照いただきたい。もちろん、この写像は条件付き期待値とも密接に関連している。今、

$$h_\theta = p_\theta/q_\theta(T) \qquad x\in T^{-1}C(q_\theta),$$
$$= 0 \qquad \text{その他}$$

とおく；ここで、C(f) は集合 $\{\cdot: f(\cdot)\neq 0\}$ を表わすものとする。これは、T を与えたときの X の条件付き密度関数の一つの決め方である。事実、S を平均を持つ実統計量としたとき、次を満たすバージョン

$$E_\theta\{S|T\} = T^*(S^+h_\theta) - T^*(S^-h_\theta) \qquad \text{a.e. } \nu$$

の存在が示される。

さて以上の準備の下、周辺サブモデル $\mathcal{P}^T$ および条件付きサブモデル $\mathcal{P}^{X|T}$ にそれらの sensitivity を

$$s^T(\theta;l)^2 = 4 \liminf_{v\to 0} \rho^T(\theta+vl,\theta)^2/v^2$$

および

$$s^{X|T}(\theta;l) = 4 \liminf_{v\to 0} \int q_\theta(T)\rho^T(\theta+vl,\theta)^2\, d\nu/v^2$$

で導入する；ここで、

$$\rho^T(\tau,\theta)^2 = \int(\sqrt{q_\tau}-\sqrt{q_\theta})^2\, d\nu,$$
$$\rho^{X|T}(\tau,\theta)^2 = T^*(\sqrt{h_\tau}-\sqrt{h_\theta})^2.$$

先ず、周辺サブモデルに関しては次のことが成り立つ。

定理 2.1 (Pitman 1979). オリジナルモデル $\mathcal{P}^X$ が smooth なら、任意の周辺サブモデル $\mathcal{P}^T$ も smooth である。

詳しくは次が成り立つ。

(i) ベクトル関数 $q'_\theta = {}^t(q'_{1\theta}, \cdots, q'_{n\theta})$ が存在し、

$$\lim_{v\to 0} \int |(q_{\theta+vl} - q_\theta)/v - \langle l, q'_\theta\rangle| \, d\nu = 0$$

が成り立つ；ここで、その関数は $q'_{i\theta} = T^* p'_{i\theta}$ で与えられる。

(ii) $$4 \lim_{v\to 0} \rho^T(\theta+vl, \theta)^2/v^2 = {}^t l I^T(\theta) l < \infty;$$

ここで、行列 $I^T(\theta) = [I^T_{ij}(\theta)]$ は $I^T_{ij}(\theta) = E_\theta\{q'_{i\theta} q'_{j\theta}/q_\theta^2\}$ で定義される。

条件付きサブモデルについて述べる前に、形式的に次のような量を定義しておく。先ずベクトル $h'_\theta = {}^t(h'_{1\theta}, \cdots, h'_{n\theta})$ を

$$h'_{i\theta} = \begin{cases} \{p'_{i\theta} \cdot q_\theta(T) - p_\theta \cdot q'_{i\theta}(T)\}/q_\theta(T)^2 & x \in T^{-1}C(q_\theta), \\ = 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義し、行列 $I^{X|T}(\theta) = [I^{X|T}_{ij}(\theta)]$ を $I^{X|T}_{ij}(\theta) = E_\theta\{h'_{i\theta} h'_{j\theta}/h_\theta^2\}$ で定義する；ここで、$q'_{i\theta}$ は $T^* p'_{i\theta}$（これが定義できるとして）をさす。もしオリジナルモデル $\mathcal{P}^X$ が smooth なら、これらは実際に定義でき、更に、次が成り立つ。

定理 2.2 (Kuboki, 1984, 1987). オリジナルモデル $\mathcal{P}^X$ が smooth なら、任意の条件付きサブモデル $\mathcal{P}^{X|T}$ も smooth である。

詳しくは、次が成り立つ。

(i) $$\lim_{v\to 0} \int q_\theta(T) |(h_{\theta+vl} - h_\theta)/v - \langle l, h'_\theta\rangle| \, d\mu = 0.$$

(ii) $$\lim_{v\to 0} 4 \int q_\theta(T) \rho^{X|T}(\theta+vl, \theta)^2 d\nu / v^2 = {}^t l I^{X|T}(\theta) l < \infty.$$

雑な言い方をすれば、オリジナルモデルの smoothness は、周辺化および条件付けという操作においても保存される。もちろん、そのとき

$$I^X(\theta) = I^T(\theta) + I^{X|T}(\theta)$$

が成り立つ。

## 3. EFFICACY と SMOOTHNESS

実数値統計量 S を考える。上で述べたように、$\mathcal{P}^S$ の sensitivity は S の分布相互の識別可能性を見るひとつの指標であるが、これ以外にももう一つ指標が考えられる。それは、S の平均値の変動を表わす量を用いて定義されるものである。以下では、それを述べるとともに、その量の性質を議論する。

今、$S_c = S\cdot\chi_{\{x:|S|<c\}}$ とおく；ここで、c は正の実数。このとき、$E_\theta(S_c)$ が次の性質を満たすなら、S は正則であると言うことにする：任意の $\theta$ および l に対して、

(3.1) $$\lim_{c\to\infty} \lim_{v\to 0} \{E_{\theta+vl}(S_c) - E_\theta(S_c)\}/v = \langle l, {}^t(\kappa^S{}_1(\theta), \cdots, \kappa^S{}_n(\theta))\rangle;$$

ここで、

$$\kappa^S{}_i(\theta) = \int S p'_{i\theta}\, d\mu.$$

このとき、行列 $J^S(\theta) = [J^S{}_{ij}(\theta)]$ を

$$J^S{}_{ij}(\theta) = \kappa^S{}_i(\theta)\kappa^S{}_j(\theta)/V_\theta(S)$$

で定義する；ただし、0/0＝0 と約束する。これを、S の分布（または、単に S）の efficacy 行列と言う。これもまた、$\theta$ の変化に対する S の分布の変化率を示すものである。次の結果は、この量と sensitivity および smoothness との関連を述べたものである（これは、Pitman (1979) からの直接の結果である）。

定理 3.1. オリジナルモデル $\mathcal{P}^X$ は smooth であるとする。そのとき、有限分散を持つ任意の統計量 S は正則である。この事実から、

$$I^X(\theta) - J^S(\theta) \quad \text{は非負定値}$$

となり、更にもし S が T の関数であるなら、

$$I^T(\theta) - J^S(\theta) \quad \text{は非負定値}$$

となる。

次に、T を与えたときの S の条件付き分布の efficacy を考えよう。まず、正則性の概念を拡張して、もし $E_\theta\{S_c|T\}$ が次の性質を満たすなら、S は条件付き正則であると言うことにする：任意の $\theta$ および 1 に対して、

$$(3.2)\quad \ell\text{-}\lim_{c\to\infty}\ \ell\text{-}\lim_{v\to 0}\ [E_{\theta+vl}\{S_c|T\}-E_\theta\{S_c|T\}]/v = \langle 1, {}^t(\kappa^{S|T}{}_1(\theta), \cdots, \kappa^{S|T}{}_n(\theta))\rangle \quad \text{on } C(q_\theta);$$

ここで、

$$\kappa^{S|T}{}_i(\theta) = T^*\{q_\theta(T)Sh'_{i\theta}\}/q_\theta \quad \text{on } C(q_\theta),$$
$$= 0 \quad \text{その他.}$$

なお、ある空間上の実数値可測関数列 $\{f_n\}$ に対し、もし $\{f_n\}$ のどの部分列も、f にほとんど総ての点で収束する部分列を含むとき、これを

$\ell\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$ と表わす。このとき、行列 $J^{S|T}(\theta)=[J^{S|T}{}_{ij}(\theta)]$ を次で定義し、T を与えたときの S の 条件付き分布の efficacy 行列（または、単に条件付き efficacy 行列）と呼ぶ：

$$J^{S|T}{}_{ij}(\theta) = \kappa^{S|T}{}_i(\theta)\,\kappa^{S|T}{}_j(\theta)/V_\theta\{S|T\};$$

ただし、0/0＝0 と約束する。この量と sensitivity および smoothness との関係は次で与えられる。

<u>定理 3.2</u>. オリジナルモデル $\mathcal{P}^X$ は smooth であるとする。そのとき、有限分散を持つ任意の統計量 S は条件付き正則である。したがってこの事実から、

$$I^X(\theta) - E_\theta J^{S|T}(\theta) \quad \text{は非負定値}$$

となる。

## 4. $\theta^{(1)}$ に関する情報量

以下では、記号 % で X, T および X|T の何れか一つを表わすものとする。例えば、$\mathcal{P}^{\%}$ はモデル $\mathcal{P}^X, \mathcal{P}^T$ および $\mathcal{P}^{X|T}$ のうちのどれか一つをさす。

### 4.1. Sensitivity 概念に基づく情報量

モデル $\mathcal{P}^{\%}$ を使って $\theta^{(1)}$ に関する推測を行なうとき、$\theta^{(2)}$ の値のいかんによらず、$\mathcal{P}^{\%}$ の成分が互いにどの程度弁別可能かを知ることは重要である。そのための測度を次のように定義することは自然であろう：

$$s^{\%}(\theta;\theta^{(1)},r)^2 = \inf_{l\in L_r} s^{\%}(\theta;l)^2;$$

ここで、各 $r={}^t(r_1,\cdots,r_m)\in R^m$ に対し、$L_r$ は

$$L_r = \{l:\ {}^t l=({}^t r, l_{m+1},\cdots,l_n)\}$$

で定義する。この量を（サブ）モデル $\mathcal{P}^{\chi}$ の $\theta^{(1)}$ に関する partial sensitivity と呼ぶことにする。

形式的に、行列 $I^{\chi}(\theta)$ が存在するとして、それを

$$I^{\chi}(\theta) = \begin{bmatrix} I^{\chi}{}_1(\theta) & I^{\chi}{}_2(\theta) \\ {}^t I^{\chi}{}_2(\theta) & I^{\chi}{}_3(\theta) \end{bmatrix}$$

と分割する；ここで、$I^{\chi}{}_1(\theta)$ は $m\times m$ の行列である。更に、

$$I^{\chi}(\theta;\theta^{(1)}) = I^{\chi}{}_1(\theta) - I^{\chi}{}_2(\theta)\{I^{\chi}{}_3(\theta)\}^{+}\,{}^t I^{\chi}{}_2(\theta)$$

とおく；ここで、$M^+$ は行列 M の Moore-Penrose の逆行列を表わす。ここで、オリジナルモデル $\mathcal{P}^X$ は smooth であるとしよう。そのとき、定理 3.1 および 3.2 を考慮に入れると、

$$s^{\chi}(\theta;\theta^{(1)},r)^2 = {}^t r I^{\chi}(\theta;\theta^{(1)})r$$

となることがわかる。よって、オリジナルモデル $\mathcal{P}^X$ が smooth であるなら、（サブ）モデル $\mathcal{P}^{\chi}$ に含まれる $\theta^{(1)}$ に関する情報量を $I^{\chi}(\theta;\theta^{(1)})$ で定義することは意味を持つ。なぜなら、それは $\mathcal{P}^{\chi}$ の $\theta^{(1)}$ に関する partial sensitivity と解釈できるからである。

行列 $I^{\chi}(\theta;\theta^{(1)})$ は $\theta^{(1)}$ の不偏推定の誤差限界と密接な関連があることはよく知られている。Liang (1983) は、この事実に基づき、形式的にその行列を $\mathcal{P}^{\chi}$ に含まれる $\theta^{(1)}$ に関する情報量と考えた。しかしながら、2 および 3 節で議論してきたように、行列 $I^{\chi}(\theta)$ 従っ

て $I^{x}(\theta;\theta^{(1)})$ が統計的意味を持つのは、オリジナルモデル $\mathcal{P}^{x}$ が smooth である場合に限るということを強調しておく。

### 4.2. Efficacy 概念に基づく情報量

$\theta^{(1)}$ の点推定は、一般的に、推定方程式 $g_{\theta^{(1)}}(x)=0$ を解くことによって得られる。ここで、$g$, $={}^t(g_{1\theta^{(1)}}(x),\cdots,g_{m\theta^{(1)}}(x))$, は $\theta^{(1)}$ と x を成分に持つベクトル関数で、すべての $\theta$ および $i=1,\cdots,m$ に対して、

(4.1) $$E_{\theta}\{g_{i\theta^{(1)}}\} = 0$$

または

(4.2) $$E_{\theta}\{g_{i\theta^{(1)}}|T\} = 0 \qquad \text{a.e.}\ P_{\theta}T^{-1}$$

を満たすものとする。このような関数を不偏（(4.1) の場合）または条件付き不偏（(4.2) の場合）推定関数という。任意に固定した $\theta$ に対し、各 $g_{i\theta^{(1)}}$ を統計量とみなす。そのとき、もしそれらが $\theta$ で (3.1) を満たすなら、g は正則であると言い、もし (3.2) を満たすなら、g は条件付き正則であると言う。情報量を定義するもう一つのアイディアは、そのような推定関数の efficacy に基づくものである。

さて、オリジナルモデル $\mathcal{P}^{x}$ は smooth であるとする。そのとき、3 節で示したように、$i=1,\cdots,m$ に対して、

(4.3) $$V_{\theta}\{g_{i\theta^{(1)}}\} < \infty$$

を満たす g は正則および条件付き正則である。そのような g に対し、$m\times m$ の行列 $M^{g}(\theta)=[M^{g}_{ij}(\theta)]$ と $M^{g|T}(\theta)=[M^{g|T}_{ij}(\theta)]$ を

$$M^{g}_{ij}(\theta) = \mathrm{Cov}_{\theta}\{g_{i\theta^{(1)}},g_{j\theta^{(1)}}\}$$

（g が不偏のとき）および

$$M^{g|T}{}_{ij}(\theta) = \mathrm{Cov}_\theta\{g_{i\,\theta(1)}, g_{j\,\theta(1)}|T\}$$

（g が条件付き不偏のとき）で定義する。更に、n×m の行列 $K^g(\theta) = [K^g{}_{ij}(\theta)]$ と $K^{g|T}(\theta) = [K^{g|T}{}_{ij}(\theta)]$ を

$$K^g{}_{ij}(\theta) = \kappa_i^{g_{j\,\theta(1)}}$$

（g が不偏のとき）および

$$K^{g|T}{}_{ij}(\theta) = \kappa_i^{g_{j\,\theta(1)}|T}$$

（g が条件付き不偏のとき）で定義する。ただし、$i = m+1, \cdots, n$; $j = 1, \cdots, m$ に対して、

(4.4) $$K^g{}_{ij}(\theta) = 0$$

および

(4.5) $$K^{g|T}{}_{ij}(\theta) = 0 \quad \text{a.e. } \nu$$

が成り立つものと仮定する。そして、$K^g(\theta)$ および $K^{g|T}(\theta)$ の最初の m×m 行列を、それぞれ $K^g{}_1(\theta)$ および $K^{g|T}{}_1(\theta)$ とおく。

記号を簡単にするため、g や g|T の代わりに変わりに g# と書く。任意に固定した $\theta$ に対し、$\langle u, g\rangle$ $(u \in R^m)$ を実統計量とみなし、その（条件付き）efficacy $J^{\langle u, g\rangle \#}(\theta)$ を調べよう。今、$r \in R^m$ に対し、u を $u = \{M^{g\#}(\theta)\}^{+t}K^{g\#}{}_1(\theta)r$ と選ぶ。そのとき、各 $l \in L_r$ に対し、

$$^t l\{J^{\langle u, g\rangle \#}(\theta)\}l = {}^t r\,\mathcal{J}^{g\#}(\theta)r,$$

ここで

$$\mathcal{J}^{g\#}(\theta) = K^{g\#}{}_1(\theta)\{M^{g\#}(\theta)\}^{+t}K^{g\#}{}_1(\theta),$$

を得る。この行列には次のような意味がある：もし $M^{g\#}(\theta)$ が正定値

なら、すべての $l \in L_r$ に対して、

$$\sup_{u \in R^m} {}^t l \{J^{\langle u,g \rangle \#}(\theta)\} l = {}^t r \mathscr{J}^{g\#}(\theta) r,$$

すなわち、それは、$\langle u, g \rangle$ の $u$ に関する最大の efficacy である。

さて、集合 $G^X$, $G^T$ および $G^{X|T}$ を

$G^X = \{g: (4.1), (4.3)$ および $(4.4)$ を満たす$\}$,

$G^T = \{g: g \in G^X$ かつ $T$ を通して $x$ に依存$\}$,

$G^{X|T} = \{g: g \in G^X$ かつ $(4.2)$ および $(4.5)$ を満たす$\}$

と定義する。そのとき、$\mathscr{P}^{\%}$ に含まれる $\theta^{(1)}$ に関する情報量 $\mathscr{I}^{\%}(\theta, r; \theta^{(1)})$ （これは、一般に方向ベクトル $r$ に依存）を

$$\mathscr{I}^{\%}(\theta, r; \theta^{(1)}) = \sup_{g \in G^{\%}} {}^t r \mathscr{J}^{g}(\theta) r$$

（% が X または T を表わすとき）および

$$\mathscr{I}^{X|T}(\theta, r; \theta^{(1)}) = \sup_{g \in G^{X|T}} {}^t r E_{\theta} \{\mathscr{J}^{g|T}(\theta)\} r$$

で定義する。残念ながらこれは、$m=1$ の場合を除き、必ずしも

$$\mathscr{I}^{\%}(\theta, r; \theta^{(1)}) = {}^t r \mathscr{I}^{\%}(\theta; \theta^{(1)}) r$$

のように表現可能ではない。定理 3.1 および 3.2 を 4.1 節の議論と結びつけることにより、それと partial sensitivity との間に

$$\mathscr{I}^{\%}(\theta, r; \theta^{(1)}) \leqq {}^t r I^{\%}(\theta; \theta^{(1)}) r$$

という関係のあることがわかる。

Godambe's (1980) の定義は、上の定義の特別な場合である。彼は $m=1$ and $n=2$ の場合に、或る条件の下で $J^{g\#}(\theta)$ に一致する量を推定関数 $g=g_{\theta_1}(x)$ に含まれる情報量することを提案し、議論を展開している。しかしながら、上の議論を通して、その量は推定関数の

efficacy であること、すなわち、推定関数の分布の変化率であることが明らかになった。この視点から、推定関数に基づく情報量の定義の意味が説明される。ところで、この節の議論においても、オリジナルモデル $\mathscr{P}^x$ の smoothness が重要な意味を持っていたことを改めて強調しておく。

## 参考文献


GODAMBE, V. P. (1980). On sufficiency and ancillarity in the presence of a nuisance parameter. Biometrika 67, 155-162.

KUBOKI, H. (1984). A generalization of the relative conditional expectation — Further properties of Pitman's T* and their applications to statistics. Ann. Inst. Statist. Math. 36, 181-197.

KUBOKI, H. (1987). Analysis of marginal and conditional density functions for separate inference. Ann. Inst. Statist. Math. 39 (to appear).

LIANG, K. Y. (1983). On information and ancillarity in the presence of a nuisance parameter. Biometrika 70, 607-612.

PITMAN, E. J. G. (1979). Some Basic Theory for Statistical Inference. London: Chapman and Hall.