

Branched covering space と Jones Polynomial

東大・理・数学 重原正明 (Masaaki Shigehara)

(3, 1)-knot の Jones polynomial について考える。

knot の Alexander polynomial は, infinite cyclic cover とその covering transformation を用いて定義することができる。ところが, 同様に Conway calculus を用いて定義される, 1変数および2変数の Jones polynomial は, knot の場合に限っても, その covering space や branched covering space との関係は, それほどわかっているのではない。

2つの oriented knot が mutant ([2]参照) であれば, その2つの knot は (1変数および2変数の) Jones polynomial も double cyclic branched covering space も等しくなる。このことから, 2つの knot の double cyclic branched covering space が等しいとき, その2つの knot の Jones polynomial は等しいのではないかという予想が成立する。ところが knot が prime でない場合には, 例えば granny knot と

square knot のように、1変数 Jones polynomial の係数が、0次を中心として対称になつていない knot を、向きを組み合わせを変えて2つ connected sum したものの組を考えれば、すぐに反例があることがわかる。そこで、prime knot に限定したらどうなるかが問題となる。

予想 2つの prime knot の double cyclic branched covering space が等しいとき、その2つの knot の1変数 Jones polynomial は等しい。

ここでは、いくつかの反例を示して上の予想を否定的に解く。さらにいくつかの double branched covering space が等しい knot の組についても、その Jones polynomial 等を示す。なお、Alexander polynomial ではすでに反例 (double branched covering space が同じで polynomial が異なる。) がある ([5]) ので、2変数 Jones polynomial についても、上の予想は否定的に解かれている。

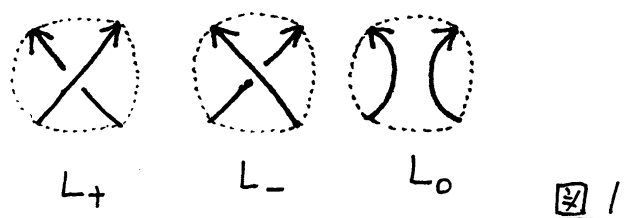
1変数および2変数の Jones polynomial V および P の定義については、[3]のものに従う。つまり、

$$(1) V_{\text{trivial knot}} = 1 \quad (1)' P_{\text{trivial knot}} = 1$$

$$(2) t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-} = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{L_0} \quad (2)' l^{-1}P_{L_+} - lP_{L_-} = mP_{L_0}$$

(ただし L_+ , L_- , L_0 はある球の内部では図1の通りで、その外では同一の3つの oriented link)

によって、 $V_L(t)$, $P_L(l, m)$ (L はoriented link) を定義する。



1. 高橋の例について

図2の2つのknotは、[5]で示された double cyclic branched coverが同じ2つのknotで、 $n=2$ とおいたものである。([5]ではこの2つのknotのAlexander polynomialを計算することで別のknotであることを示している。) この2つのknotの1変数Jones polynomialを計算する。図2に示した交点でcrossing changeをするとどちらも trivial knot になり、一方smoothingをすると、 K_{Ta} の

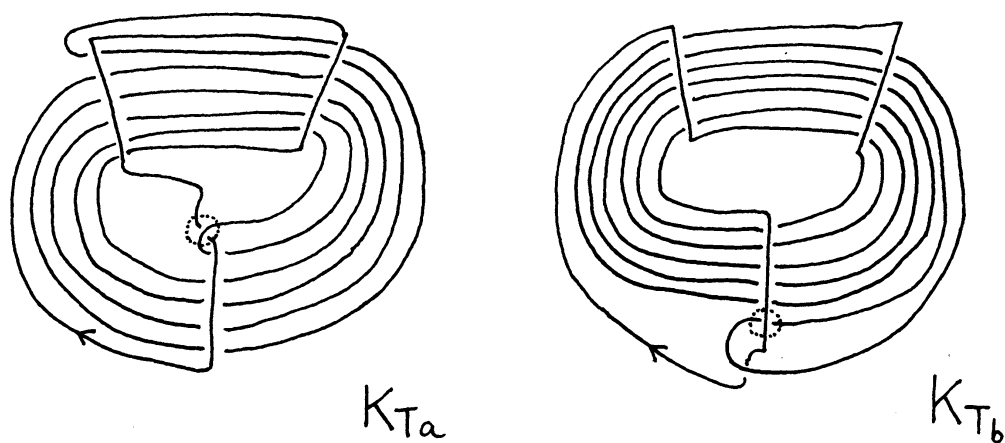


図2

方は L_T (図3) に、 K_{T_b} の方は L_T の mirror image になる。
よって、

$$V_{K_{T_a}}(t) = t \left\{ \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_T}(t) + 1 \cdot t \right\}$$

$$V_{K_{T_b}}(t) = t \left\{ \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_T}(t^{-1}) + 1 \cdot t \right\}$$

計算により、

$$V_{L_T}(t) = \sqrt{t} (-t^6 - t^4 - t^{-1} + t^{-2})$$

であるから、

$$V_{K_{T_a}}(t) = -t^8 + t^7 - t^6 + t^5 + t^2 - t + 2 - t^{-1}$$

$$V_{K_{T_b}}(t) = t^3 - t^2 + t - t^{-3} + t^{-4} - t^{-5} + t^{-6}$$

となり、 $V_{K_{T_a}} \neq V_{K_{T_b}}$ となる。また以下 \widehat{K} で knot K の double cyclic branched covering space を表わすことにすると、 $\widehat{K_{T_a}}$ の Heegaard splitting を考えることによつて、

$$H_1(\widehat{K_{T_a}}) = H_1(\widehat{K_{T_b}}) = 1 \quad (\mathbb{Z} \text{ 係数})$$

つまり $\widehat{K_{T_a}}$ も $\widehat{K_{T_b}}$ も Homology sphere であることがわかる。

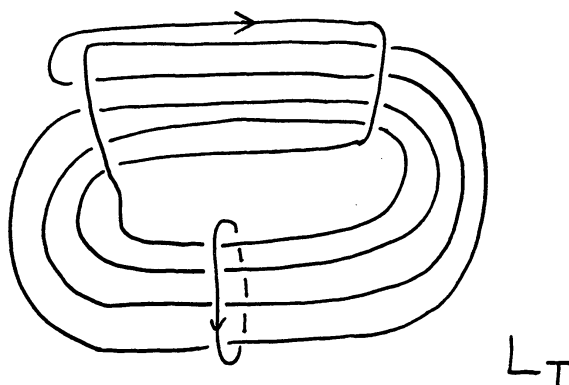


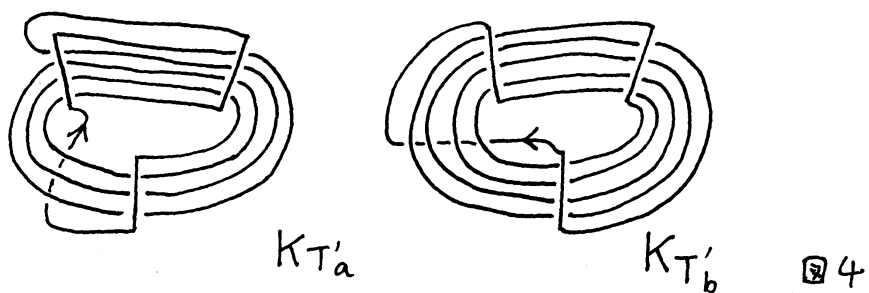
図3

ちなみに[5]の $n=1$ の例(図4)について計算機で計算した結果は次の通りである。この場合も double branched covering space は homology sphere となる。

$$V_{K_{T'_a}} = t^{-5} + t^{-7} - t^{-11} + t^{-12} - t^{-13}$$

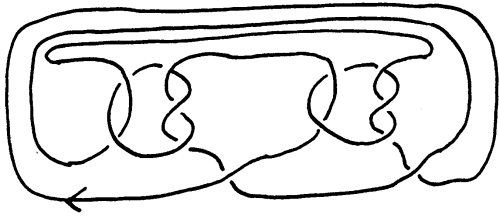
$$V_{K_{T'_b}} = -t^{14} + t^8 + t^6$$

$K_{T_a}, K_{T_b}, K_{T'_a}, K_{T'_b}$ が prime かどうか筆者には不明である。

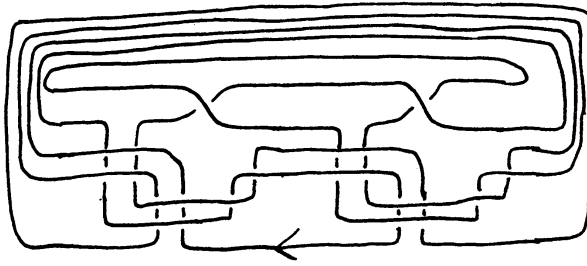


2. 中西・作間の例

[4]および[6]で示された n -fold cyclic branched covering space が等しい knot の例の、 $n=2$ の場合(図5, 6, 7)について、その(1変数および2変数) Jones polynomial を計算機で計算した。この例の各組の knot は、 $K_{N_{3b}}$ 以外はいずれも[4]で prime であることが示されている。計算時間は1つの knot について最大でも数時間であった。その結果を、double cyclic branched covering space の1次元 \mathbb{Z} 係数 homology 群(元の knot の Seifert surface から考える。)と一緒に示す。

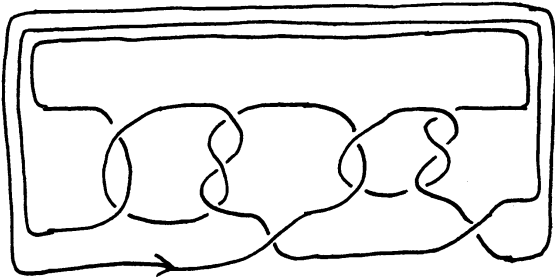


K_{N1a}

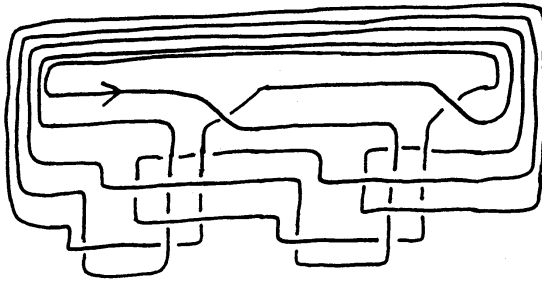


K_{N1b}

图 5

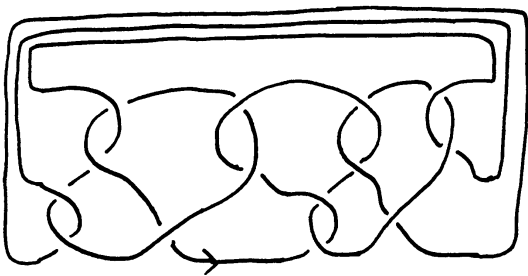


K_{N2a}

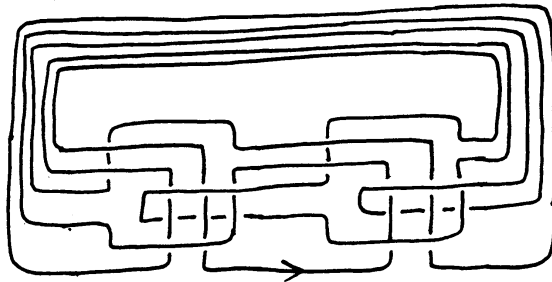


K_{N2b}

图 6



K_{N3a}



K_{N3b}

图 7

$$\begin{aligned}
P_{KN1a} &= l^4(m^4 + 2m^2 + 1) \\
&\quad - l^2(m^6 + 5m^4 + 9m^2 + 5) \\
&\quad + (m^6 + 7m^4 + 13m^2 + 8) \\
&\quad - l^{-2}(m^4 + 4m^2 + 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{KN1b} &= l^2 \\
&\quad - 2m^2 \\
&\quad - l^{-2}(2m^2 + 1) \\
&\quad + l^{-4}(m^6 + 6m^4 + 9m^2 + 5) \\
&\quad - l^{-6}(m^6 + 7m^4 + 15m^2 + 8) \\
&\quad + l^{-8}(m^4 + 4m^2 + 4)
\end{aligned}$$

$$V_{KN1a} = t^6 - 3t^5 + 4t^4 - 5t^3 + 5t^2 - 4t + 4 - t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$

$$\begin{aligned}
V_{KN1b} &= t^2 - 2t + 4 - 3t^{-1} + 3t^{-2} - 3t^{-3} + 2t^{-4} - 2t^{-5} + t^{-6} \\
&\quad - t^{-7} + t^{-8} - t^{-9} + t^{-10}
\end{aligned}$$

$$H_1(\widetilde{KN1a}) \cong H_1(\widetilde{KN1b}) \cong \mathbb{Z}/25$$

$$\begin{aligned}
P_{KN2a} &= (m^4 + 4m^2 + 4) \\
&\quad - l^{-2}(m^6 + 7m^4 + 13m^2 + 7) \\
&\quad + l^{-4}(m^6 + 5m^4 + 9m^2 + 5) \\
&\quad - l^{-6}(m^4 + 2m^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{KN2b} &= -l^{10}(m^4 + 4m^2 + 4) \\
&\quad + l^8(m^6 + 7m^4 + 15m^2 + 8)
\end{aligned}$$

$$-l^6(m^6 + 6m^4 + 9m^2 + 5)$$

$$+ l^4(2m^2 + 1)$$

$$+ l^2(2m^2 + 1)$$

$$V_{KN_{2a}} = t^2 - t + 1 + t^{-1} - 3t^{-2} + 4t^{-3} - 5t^{-4} + 5t^{-5} - 4t^{-6} \\ + 3t^{-7} - t^{-8}$$

$$V_{KN_{2b}} = -t^{12} + t^{11} - t^{10} + t^9 - t^8 + 2t^7 - 2t^6 + 3t^5 - 3t^4 \\ + 3t^3 - 3t^2 + 2t$$

$$H_1(\widetilde{KN_{2a}}) \cong H_1(\widetilde{KN_{2b}}) \cong \mathbb{Z}/23$$

$$P_{KN_{3a}} = l^4(m^4 + 2m^2 + 2) \\ - l^2(m^6 + 5m^4 + 10m^2 + 6) \\ + (m^6 + 7m^4 + 12m^2 + 7) \\ - l^{-2}(m^4 + 4m^2 + 2)$$

$$P_{KN_{3b}} = l^2 \cdot 2 \\ - (3m^2 + 1) \\ - l^{-2}(3m^2 + 2) \\ + l^{-4}(m^6 + 6m^4 + 9m^2 + 6) \\ - l^{-6}(m^6 + 7m^4 + 15m^2 + 8) \\ + l^{-8}(m^4 + 4m^2 + 4)$$

$$V_{KN_{3a}} = t^6 - 3t^5 + 5t^4 - 6t^3 + 6t^2 - 6t + 5 - 2t^{-1} + t^{-2} \\ + t^{-3} - t^{-4}$$

$$V_{K_{N3b}} = 2t^2 - 3t + 5 - 5t^{-1} + 4t^{-2} - 4t^{-3} + 3t^{-4} - 2t^{-5} + t^{-6} - t^{-7} + t^{-8} - t^{-9} + t^{-10}$$

$$H_1(\widetilde{K_{N3a}}) \cong H_1(\widetilde{K_{N3b}}) \cong \mathbb{Z}/33$$

この例を見てわかる通り、1変数Jones polynomialそのものだけでなく、そのrelative degree (最高次の項と最低次の項の次数の差) や、さらにそれを2で割った剰余も double cyclic branched covering spaceからは決まらないことがわかる。

これらの例から1変数Jones polynomialとdouble cyclic branched covering spaceとの関係を予測することは今のところできていない。

なお、1変数Jones polynomialが等しくてdouble cyclic branched covering spaceが異なるknotとしては、[1]にある図8のknotがその例となっている。([1] Section 6 参照)

n: even

n: odd

ただし

$$\overline{n} = \begin{cases} \text{n-half twists} & n > 0 \\ \text{---} & n = 0 \\ \text{|n|-half twists} & n < 0 \end{cases}$$

※ $(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{smallmatrix}) \cdots (\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} s & q \\ r & p \end{smallmatrix})$ とし、 $p \neq \pm 1$ が等しく、 q が異なるような2つのknotをとる。 図8

[参考文献]

- [1] T. Kanenobu: Examples on Polynomial Invariants of Knots and Links, *Math. Ann.* 275, 555-572 (1986)
- [2] W. B. R. Lickorish, A. S. Lipson : Polynomials of 2-cable-like links, preprint
- [3] 村上 育: リンク理論における多項式不変量, 報告集「低次元多様体の幾何学的諸相」14-32
- [4] Y. Nakanishi: Primeness of Links, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 9, 415-440 (1981)
- [5] 高橋元男: 8の字結び目のsurgery で出来る homology spheres, 「多様体に於ける低次元トポロジーの問題」京大数理研講究録 309
- [6] M. Sakuma: Periods of Composite Links, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 9, 445-452 (1981)