

3次元多様体の基本群の表示

筑波大学 数学系 高橋 元男 (Motoo TAKAHASHI)

1. 最初に、次の様な link (3-chain link と呼ぶ) を考え、この3つの component に、それぞれ、 $\frac{p_1}{r_1}$, $\frac{p_2}{r_2}$, $\frac{p_3}{r_3}$ surgery して得られる closed 3-manifold を $M_1(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3})$ で表わす。但し、 $(p_i, r_i) = 1$ ($i=1, 2, 3$) である。

この 3-manifold の基本群の表示を、次の様にして求めてみる。

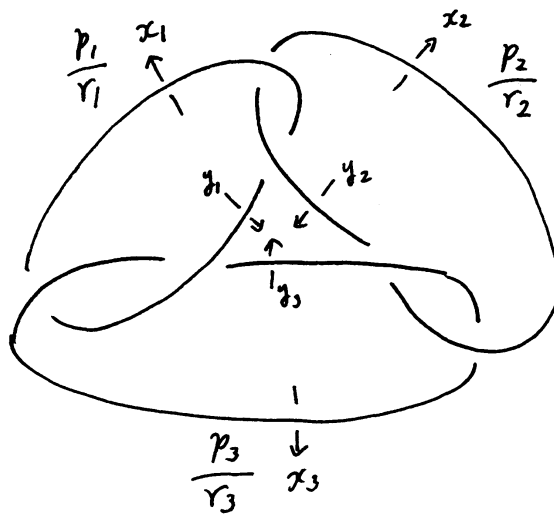


図 1

先ず、link group の表示を求める。図1で、例えば $\rightarrow x_1$ は、この紙の上方にある基点から $\rightarrow x_1$ をくくって元に戻る loop (の表わす基本群の元) を表わす。

Wirtinger 表示は

$$\langle x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \mid y_2 x_1 = x_1 x_2, y_3 x_2 = x_2 x_3, y_1 x_3 = x_3 x_1, x_1 y_2 = y_2 y_1, x_2 y_3 = y_3 y_2, x_3 y_1 = y_1 y_3 \rangle \quad (1)$$

となる。各 component の meridian m_i と longitude l_i は次の様になっている。

$$m_1 = x_1, \quad l_1 = y_2 \overset{x_3}{y_3}, \quad [m_1, l_1] = 1$$

$$m_2 = x_2, \quad l_2 = y_3 x_1, \quad [m_2, l_2] = 1$$

$$m_3 = x_3, \quad l_3 = y_1 x_2, \quad [m_3, l_3] = 1.$$

そこで、指定された様に Dehn surgery を行えば relator $m_i^{p_i} l_i^{r_i} = 1$ ($i=1, 2, 3$) が付く加わる。

ところで、 $(p_i, r_i) = 1$ であるから $r_i s_i - p_i t_i = 1$ となる整数 s_i, t_i が定まる。 $a_i = m_i^{s_i} l_i^{t_i}$

とおける。

$$x_i = m_i = a_i^{r_i}, \quad l_i = a_i^{-p_i}$$

となる。また、

$$y_1 = l_3 x_2^{-1} = a_3^{-p_3} a_2^{-r_2}$$

$$y_2 = l_1 x_3^{-1} = a_1^{-p_1} a_3^{-r_3}$$

$$y_3 = l_2 x_1^{-1} = a_2^{-p_2} a_1^{-r_1}$$

となる。これを表示 (1) の relator に代入すると

$$a_1^{p_1+r_1} a_2^{r_2} a_1^{-r_1} a_3^{r_3} = 1$$

$$a_2^{p_2+r_2} a_3^{r_3} a_2^{-r_2} a_1^{r_1} = 1$$

$$a_3^{p_3+r_3} a_1^{r_1} a_3^{-r_3} a_2^{r_2} = 1$$

を得る。故に

$$\pi_1(M_1(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3})) \cong \langle a_1, a_2, a_3 \mid$$

$$a_1^{p_1+r_1} a_2^{r_2} a_1^{-r_1} a_3^{r_3} = a_2^{p_2+r_2} a_3^{r_3} a_2^{-r_2} a_1^{r_1} = a_3^{p_3+r_3} a_1^{r_1} a_3^{-r_3} a_2^{r_2} = 1 \rangle$$

となる。

[注意] この表示は genus 3 の Heegaard diagram に対応する表示であり、RR-system は次の様になる。

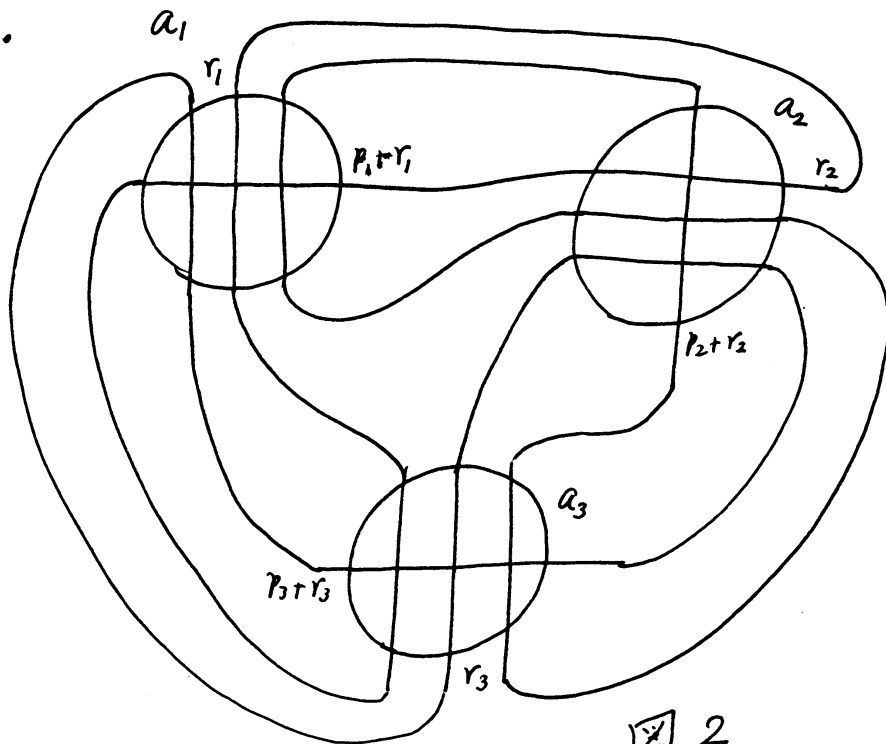


図 2

更に、この表示の generator a_3 を消去出来る。即ち、
式1式から

$$a_3^{r_3} = a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-p_1-r_1} \quad (2) \quad (\text{消})$$

となり、これを式2式に代入すると

$$a_2^{p_2+r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-p_1-r_1} a_2^{-r_2} a_1^{r_1} = 1 \quad (3)$$

更に、式3式と(2)より

$$a_3^{p_3+r_3} = a_2^{-r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+2r_1)} \quad (4)$$

が出る。ところが(3)を仮定すれば

$$[a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-p_1-r_1}, a_2^{-r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+2r_1)}] = 1$$

となるので(2)と(4)より a_3 が消去出来て

((p_3+r_3, r_3)=1 に注意)

$$(a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-p_1-r_1})^{p_3+r_3} = (a_2^{-r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+2r_1)})^{r_3}$$

を得る。この式をもっと簡単にするため、左から $a_1^{-r_1}$ 、
右から $a_1^{r_1}$ をかけると

$$(a_2^{-r_2} a_1^{-p_1})^{p_3+r_3} = \underbrace{(a_1^{-r_1} a_2^{-r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+r_1)})}_{(5)}^{r_3} \quad (5)$$

となる。(3)より

$$a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+r_1)} = a_2^{-(p_2+r_2)} a_1^{-r_1} a_2^{r_2}$$

であるから、これを(5)の下線部分に代入すると

$$(a_2^{-r_2} a_1^{-p_1})^{p_3+r_3} = (a_1^{-r_1} a_2^{-(p_2+2r_2)} a_1^{-r_1} a_2^{r_2})^{r_3}$$

pp 5.

$$(a_1^{p_1} a_2^{r_2})^{-(p_3+r_3)} = (a_1^{-r_1} a_2^{-(p_2+2r_2)} a_1^{-r_1} a_2^{r_2})^{r_3}$$

となる。ここで

$$a_1^{-r_1} a_2^{-(p_2+2r_2)} a_1^{-r_1} a_2^{r_2} = (a_1^{-r_1} a_2^{-(p_2+2r_2)} a_1^{-(p_1+r_1)}) (a_1^{p_1} a_2^{r_2})$$

であり、かつ (3) より

$$[a_1^{p_1} a_2^{r_2}, a_1^{-r_1} a_2^{-(p_2+2r_2)} a_1^{-(p_1+r_1)}] = 1$$

であるから

$$(a_1^{-r_1} a_2^{-(p_2+2r_2)} a_1^{-r_1} a_2^{r_2})^{r_3} = (a_1^{-r_1} a_2^{-(p_2+2r_2)} a_1^{-(p_1+r_1)})^{r_3} (a_1^{p_1} a_2^{r_2})^{r_3}$$

となり、ゆえに

$$(a_1^{p_1} a_2^{r_2})^{-(p_3+r_3)} = (a_1^{-r_1} a_2^{-(p_2+2r_2)} a_1^{-(p_1+r_1)})^{r_3}$$

逆元をとると

$$(a_1^{p_1} a_2^{r_2})^{p_3+r_3} = (a_1^{p_1+r_1} a_2^{p_2+2r_2} a_1^{r_1})^{r_3}$$

となる。ゆえに

$$\pi_1 \left(M_1 \left(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3} \right) \right)$$

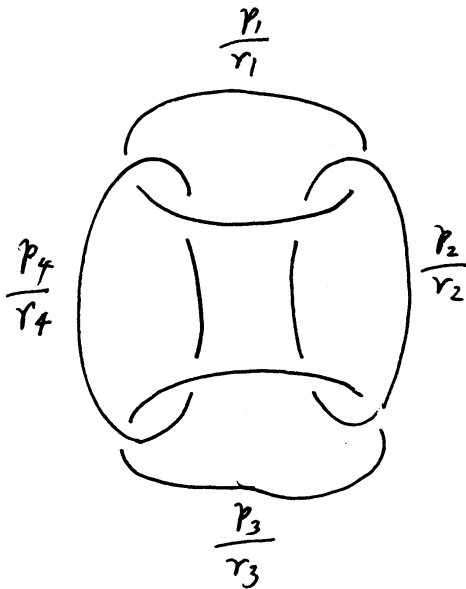
$$\cong \langle a_1, a_2 \mid a_2^{p_2+r_2} a_1^{r_1} a_2^{-r_2} a_1^{-(p_1+r_1)} a_2^{-r_2} a_1^{r_1} = 1, \rangle$$

$$(a_1^{p_1} a_2^{r_2})^{p_3+r_3} = (a_1^{p_1+r_1} a_2^{p_2+2r_2} a_1^{r_1})^{r_3} = 1 \rangle$$

となる。この表示は genus 2 の Heegaard diagram に対えするものである。

同様の事を他の link でも行ってみる。(結果のみを記す)

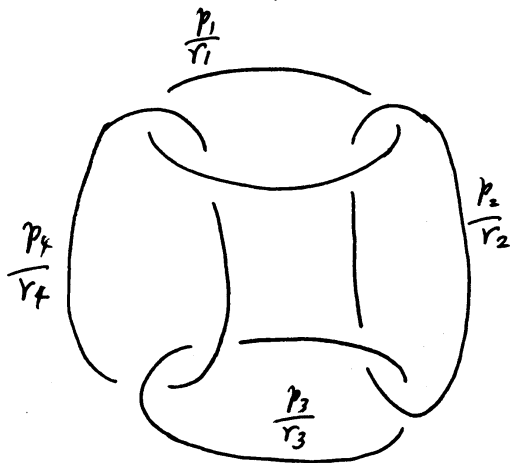
2.



$$\pi_1(M_2(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}, \frac{p_4}{r_4}))$$

$$\cong \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid \begin{aligned} a_1^{p_1} a_2^{-r_2} a_4^{r_4} &= 1, \\ a_2^{p_2} a_1^{-r_1} a_3^{r_3} &= 1, \\ a_3^{p_3} a_4^{-r_4} a_2^{r_2} &= 1, \\ a_4^{p_4} a_3^{-r_3} a_1^{r_1} &= 1 \end{aligned} \rangle$$

3.

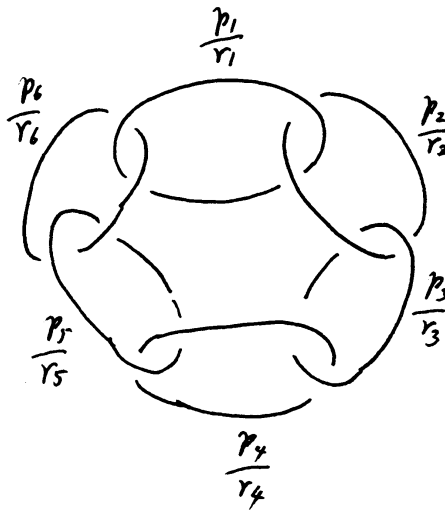


$$\pi_1(M_3(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}, \frac{p_4}{r_4}))$$

$$\cong \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid \begin{aligned} a_2^{-r_2} a_1^{-p_1} a_4^{r_4} &= 1 \\ a_3^{-r_3} a_1^{r_1} a_4^{-p_4} &= 1 \\ a_2^{p_2+r_2} a_1^{r_1} a_4^{-(p_4+r_4)} a_1^{p_1+r_1} &= 1 \\ a_3^{p_3+r_3} a_4^{p_4+r_4} a_1^{-(p_1+r_1)} a_2^{r_2} &= 1 \end{aligned} \rangle$$

$$\cong \langle a_1, a_4 \mid \begin{aligned} (a_1^{-p_1} a_4^{r_4})^{p_2+r_2} (a_1^{r_1} a_4^{-(p_4+r_4)} a_1^{p_1+r_1})^{r_2} &= 1, \\ (a_1^{r_1} a_4^{-p_4})^{p_3+r_3} (a_4^{p_4+r_4} a_1^{-(p_1+r_1)} a_4^{r_4})^{r_3} &= 1, \\ [a_1^{-p_1} a_4^{r_4}, a_1^{r_1} a_4^{-(p_4+r_4)} a_1^{p_1+r_1}] &= 1 \end{aligned} \rangle$$

4.



$$\pi_1(M_4(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}, \frac{p_4}{r_4}, \frac{p_5}{r_5}, \frac{p_6}{r_6}))$$

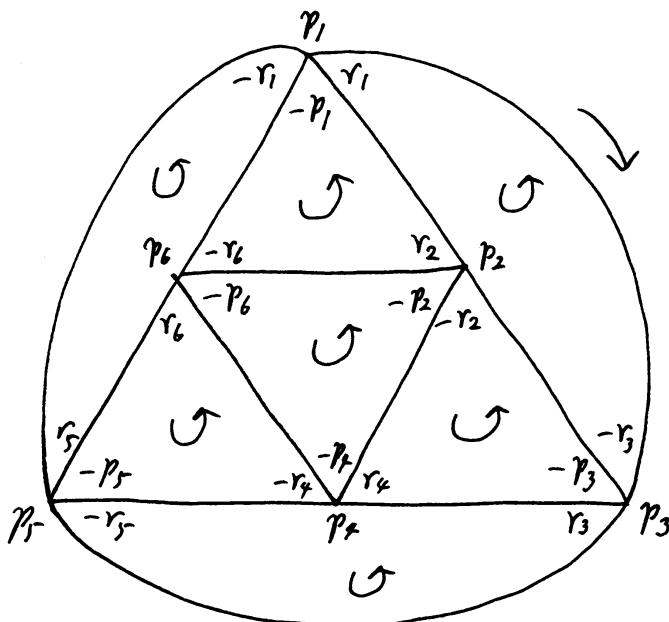
$$\cong \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid \begin{aligned} a_1^{r_1} a_2^{p_2} a_3^{-r_3} &= 1, \\ a_2^{r_2} a_3^{p_3} a_4^{-r_4} &= 1, \end{aligned} \rangle$$

$$\begin{aligned}
 a_3^{r_3} a_4^{p_4} a_5^{-r_5} &= 1 \\
 a_4^{r_4} a_5^{p_5} a_6^{-r_6} &= 1 \\
 a_5^{r_5} a_6^{p_6} a_1^{-r_1} &= 1 \\
 a_6^{r_6} a_1^{p_1} a_2^{-r_2} &= 1 >
 \end{aligned}$$

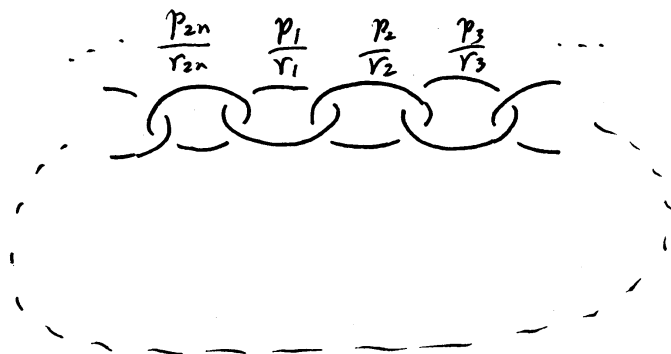
この群において帰結として

$$a_2^{p_2} a_4^{p_4} a_6^{p_6} = 1 \quad a_1^{p_1} a_3^{p_3} a_5^{p_5} = 1$$

が成り立つ。この基本群の表示は次の様な
ラベル付き 4-regular 平面グラフとして表わされる。



5.

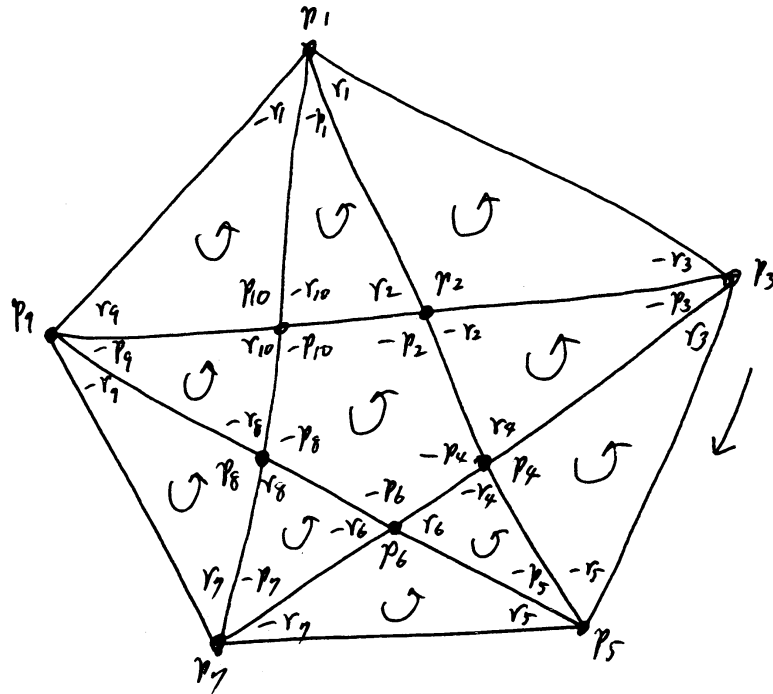


$$\pi_1(M_5(\frac{p_1}{r_1}, \frac{p_2}{r_2}, \frac{p_3}{r_3}, \dots, \frac{p_{2n}}{r_{2n}}))$$

$$\cong \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n} \mid a_i^{r_i} a_{i+1}^{p_{i+1}} a_{i+2}^{-r_{i+2}} = 1$$

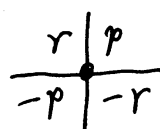
$$(i=1, \dots, 2n) \pmod{2n} \rangle$$

例えは $n=5$ の時、この基本群は次の様なラベル付き 4-regular 平面グラフで表わされる。



以上の事は更に一般化出来る。

G を任意の 4-regular 連結平面グラフとし、各頂点に次の様なラベルがついてゐるものとある。

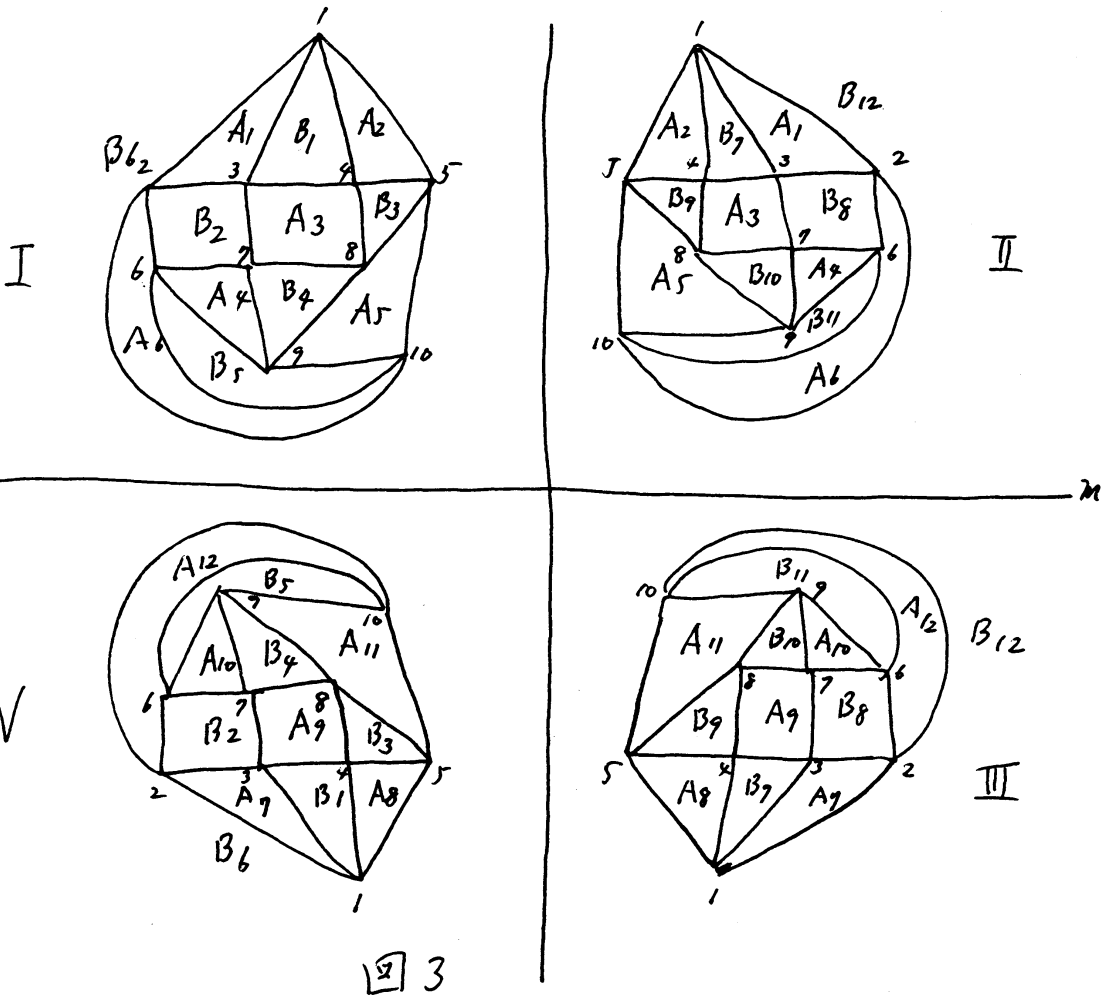


但し、 p, r は互いに素な整数である。この様なグラフを M -graph と呼ぶ事にする。

G の面は 2 色 (A, B とする) で色分け出来る。

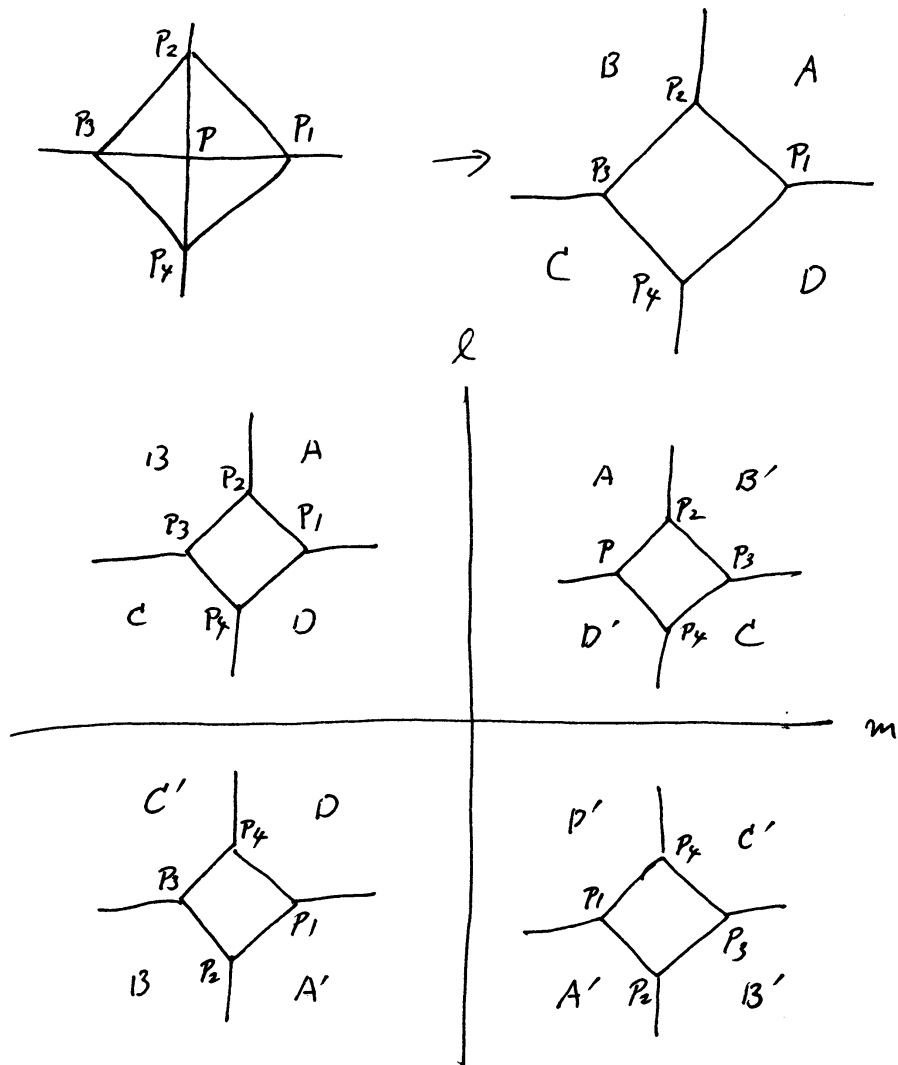
このグラフを 3-disk の表面に描く。この様な 3-disk の copy を 4 つ用意する。但し 2 つは他の 2 つの鏡像になっているものとする。これらの disk の表面をはり合せる。以下実例により説明する。

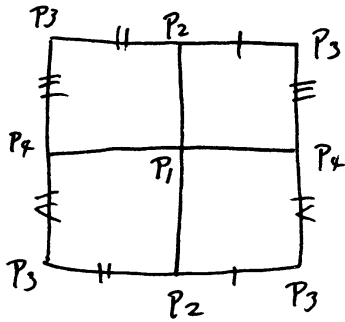
②



(図)は直線 l, m に関して対称になっている。

4つの3-diskの2 π -を同様の様にはり合せ、頂点のregular neighborhoodを除くと、頂点の個数だけのtoriをboundaryとする3-manifoldが出来る。頂点の近傍での次の様な状況になっている。

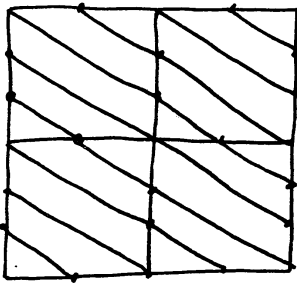




boundary of torus

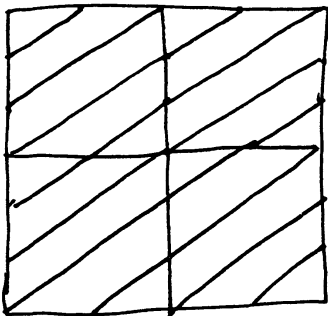
ここで 例えの ラベルが $\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline -3 & -2 \end{array}$ なる

次の様な loop に沿って Dehn surgery する。



もし ラベルが $\begin{array}{c|c} -2 & 3 \\ \hline -3 & 2 \end{array}$ なら 次の様な loop に沿って

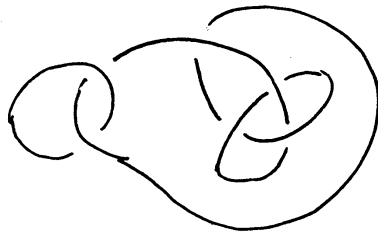
Dehn surgery する



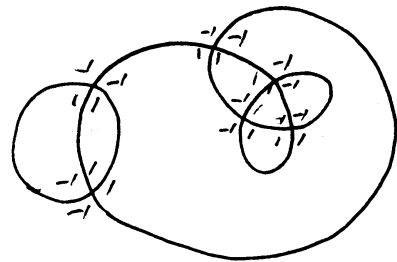
最初に与えられたラベル付きグラフ G はこの様にして得られる 3-manifold を表すと考える。これはつき次の定理が成り立つ。

定理 M は closed orientable connected 3-manifold とする。 M が M -graph で表現されるための必要十分条件は、 M が S^3 の 2-fold branched covering space と同相とあることである。
 [証明のアウトライン]。 M が M -graph で表現されることを示す。 図 3 に I と II, II と IV の対応点を同一視すると S^3 が生れる。 M は S^3 の 2-fold branched covering space と同相である。

逆に M は S^3 の 2-fold branched covering space とする。 L は branch set (link) とし、 L の平面への projection P を考える。 例として P が



を M -graph とし



E と \mathcal{M} は \mathcal{M} の \mathcal{M} -graph 表現と存在。(証明終)