数理解析研究所講究録
第 624 巻 1987 年 122-136

Decomposableなalgebraic 3-knotの存在

東大理　佐伯 修（Osamu Saeki）

§1. Introduction

fを$\mathbb{C}^{n+1}$の原点$\vec{0}$の近傍で定義された正則関数で、次の性質(＊1)～(＊3)を満たすものとする。

(＊1)　$f(\vec{0})=0$

(＊2)　fは$\vec{0}$をisolated critical pointに持つ

(＊3)　$n=1$の時は、fは$\vec{0}$でlocally irreducible

この時、$K_f := f^{-1}(0)\cap S_\varepsilon^{2n+1}$は$S_\varepsilon^{2n+1}$のsmooth closed connected $(2n-1)$-submanifoldになる([11])。ここで、$S_\varepsilon^{2n+1}=\{z\in\mathbb{C}^{n+1}; \|z\|=\varepsilon\}$であり、$\varepsilon>0$は十分小さいものとする。この時、$K_f$の$S^{2n+1}$でのisotopy classを$f$に付随した<u>algebraic knot</u>という。特にK_fの次元を明記したい時には、algebraic $(2n-1)$-knotと呼ぶ。

一般に、S^{2n+1}のsmooth closed connected $(2n-1)$-submanifoldのisotopy classを$(2n-1)$-knotと呼ぶ。knotが<u>decomposable</u>(分解可能)とは、2つのnon-trivial knotsの

connected sum に isotopic の時をいう。ここで trivial knot とは、S^{2n+1} に standard に embed された S^{2n-1} の isotopy class のこととする。また、decomposable でない knot のことを prime という。

S^3 内の knot の場合（すなわち $n=1$ の時）は、algebraic knot は常に prime であることが古くから知られている。そこで次のような問題が考えられる。

問題（[3],[4]）　algebraic knot は prime か？

この問題に対する答は、$n \geqq 3$ の時は No であることがわかっている。実際、次が成り立つ。

定理 1（[10]）　g を $\mathbb{C}^2$ の $\vec{0}$ の近傍で定義された正則関数で、(*1)～(*3) を満たし、かつ $g=0$ の Puiseux 展開は特性対を2つ以上持つものとする。さらに h を $\mathbb{C}^{n-1}$ の $\vec{0}$ の近傍で定義された、(*1), (*2) を満たす正則関数とする。この時 $n \geqq 3$ ならば、$f(z_1, \cdots, z_{n+1}) = g(z_1, z_2) + h(z_3, \cdots, z_{n+1})$ によって定義される正則関数 f に付随した algebraic $(2n-1)$-knot は decomposable である。

（Puiseux 展開については、たとえば [1] 参照。）

例1　　$g_0(x,y)=y^4-2x^3y^2-4x^5y+x^6-x^7$ とする。$g_0=0$ を Puiseux 展開すると、$y=x^{3/2}+x^{7/4}$ となり、その特性対の数は2となる。よって g_0 は定理1の仮定を満たし、実際に decomposable な algebraic $(2n-1)$-knot $(n\geq 3)$ が存在することがわかる。

今回の我々の結果は、$n=2$ の時にも同様のことが成り立つことを主張するものである。

定理2　　g を定理1の仮定を満たす正則関数とし、$f(x,y,z)=g(x,y)+z^r$（r は2以上の整数）で正則関数 f を定義する。この時もし、f に付随した algebraic 3-knot (S^5,K_f) において、K_f が $\mathbb{Z}$-homology 3-sphere ならば、(S^5,K_f) は decomposable である。

例2　　例1における g_0 を考えると、$g.c.d.(r,78)=1$ ならば、K_f が homology 3-sphere となることがわかる。したがって、実際に decomposable algebraic 3-knot が存在することがわかる。

(注)　$n=2$ の時は、Neumann [13] により、3-manifold K_f が irreducible なことが知られている。

定理2の証明は、本質的には $n \geqq 3$ の時と同様の手法で行なわれる。一般に algebraic knot は Milnor [11] により、simple fibered knot ([14]) と呼ばれるものになるが、$n \geqq 3$ の時はそれらは Seifert matrix (定義は §2 参照) で完全に分類される。そしてその分類結果を使うことにより、decomposable な algebraic knot の存在が示せる。ところが $n=2$ の時はこの分類は成立しない ([14])。しかし、(必ずしも fibered とは限らない) simple 3-knots を考えると、埋め込まれた3次元多様体が homology 3-sphere の時は、Seifert matrix による分類が可能になる。§2 ではその分類定理を述べ、§3 でその分類定理を使って定理2を証明する。§4 では、algebraic 3-knot の fibered knot への分解を考える。

§2. Simple な homology 3-sphere knot の分類

Σ を ($\mathbb{Z}$-)homology 3-sphere とする。3-knot (S^5, K) で $K \cong \Sigma$ なるもののことを Σ-knot と呼ぶことにする。Σ-knot (S^5, K) が <u>simple</u> とは、$\pi_1(S^5 - K) \cong \mathbb{Z}$ の時をいう。simple Σ-knot は次のように特徴づけられる。

命題3（[8]）　Σ-knot (S^5, K) が simple
$\Leftrightarrow$ K は Seifert surface (i.e. S^5 の oriented 4-submanifold で、K を bound するもの）として 1-connected なものを持つ。

F^4 を Σ-knot (S^5, K) の Seifert surface とする。この時 bilinear map $\Gamma : H_2(F;\mathbb{Z}) \times H_2(F;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $\Gamma(\alpha, \beta) = lk(\alpha, i_*\beta)$ で定義する。ここで lk は S^5 における linking number を表わし、$i : F \to S^5 - F$ は positive normal 方向への平行移動である。この Γ のことを <u>Seifert form</u> と呼ぶ。また、Γ を matrix で表わしたものを <u>Seifert matrix</u> と呼ぶ。

次に、L, L' を integral square matrices とする。ある integral unimodular matrix P があって $L' = PL{}^tP$ となる時、L と L' は <u>congruent</u> であるという。また、

$$L_1 = \left(\begin{array}{c|cc} L & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad L_2 = \left(\begin{array}{c|cc} L & b & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} a \text{ は横ベクトル} \\ b \text{ は縦ベクトル} \end{pmatrix}$$

なる形の matrix を L の <u>elementary enlargement</u> といい、逆に L は L_1, L_2 の <u>elementary reduction</u> という。そして、congruence, elementary enlargement, elementary reduction によって生成される、integral square matrices の間の同値関係を <u>S-equivalence</u> と呼ぶ。

以上の定義のもとで、simple Σ-knots は次のように分類される。

<u>定理</u> 4 ([15]) 任意の homology 3-sphere Σ に対し、各 Σ-knot に Seifert matrix を対応させる写像

$$\Phi_\Sigma : \left\{\begin{array}{l} \text{simple } \Sigma\text{-knots} \\ \text{in } S^5 \text{ の} \\ \text{isotopy classes} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \text{integral square matrix } L \quad \text{s.t.} \\ \det(L + {}^tL) = \pm 1 \\ \operatorname{sign}(L + {}^tL) \equiv 8\mu(\Sigma) \pmod{16} \\ \text{の } S\text{-equivalence classes} \end{array}\right\}$$

は well-defined で bijective。ここで $\mu(\Sigma) \in \{0, 1\}$ は Σ の Rohlin invariant を表わす。

(証明の outline)

① well-defined なこと [9, §§3-9] とまったく同様に証明できる。

② surjectivity L を integral square matrix で、$\det(L + {}^tL) = \pm 1$, $\operatorname{sign}(L + {}^tL) \equiv 8\mu(\Sigma) \pmod{16}$ なるものとする。[5] より、Σ はある compact smooth 1-connected spin 4-manifold M を bound する。必要なら M に K3 surface (またはその orientation を逆にしたもの) を connected sum することにより、$\operatorname{sign}(L + {}^tL) = \operatorname{sign}(M)$ とできる。次に L を S-equivalence の範囲で変え、M に $S^2 \times S^2$ を connected sumして、Mの intersection matrix が $L+{}^tL$ となるようにできる。しかもMとして、special handle 分解（i.e. 1つの 0-handle にいくつかの 2-handles を同時に attach してできる handle 分解）を持つものがとれる。すると、Kervaire の議論 [6, pp255-257] で、

$$\exists \varphi : M \to S^5 \quad \text{embedding}$$
$$\text{s.t. } \varphi(M) \text{ の Seifert matrix} = L$$

なるものが作れる。$(S^5, \varphi(\partial M))$ が求めるものである。

③ injectivity　　(S^5, K_1), (S^5, K_2) を、それらの Seifert matrix L_1, L_2 が congruent または片方がもう一方の elementary enlargement である simple Σ-knots とする。F_i $(i=1,2)$ を (S^5, K_i) の 1-connected な Seifert surface とする（cf. 命題3）。$\mathrm{sign}(F_i) = \mathrm{sign}(L_i + {}^tL_i)$ だから、$\mathrm{sign}(F_1) = \mathrm{sign}(F_2)$。よって [14, §4] より、$F_1 \# k_1(S^2 \times S^2) \cong F_2 \# k_2(S^2 \times S^2)$ (k_1, k_2 は十分大)。しかもこれらは special handle 分解を持つとして良い。Seifert surface に $S^2 \times S^2$ を connected sum することは S^5 内で実現できるので、初めから $F_1 \cong F_2$ として良い。しかも、うまく connected sum することにより、新らしい Seifert matrices L_1', L_2' は congruent にできる（cf. [9, §13]）。この時、[18] より

$^{\exists}\psi : F_1 \to F_2$ diffeomorphism s.t.

(☆) $L_1'(\alpha, \beta) = L_2'(\psi_*\alpha, \psi_*\beta)$ $(^{\forall}\alpha, ^{\forall}\beta \in H_2(F;\mathbb{Z}))$

がある。さて、F_i は special handle 分解を持っていた。(handle 分解は ψ と compatible にとる。) そこで次に F_2 を handle ごとに F_1 に isotopy で動かしてゆくが、この時の algebraic obstruction は (☆) により消えている。あとは Whitney の trick などを使って実際に isotopy で動かせることがわかる (cf. [9, §20])。 //

§3. Algebraic 3-knot の decomposability の判定

この節では algebraic 3-knot (S^5, K_f) で、K_f が homology 3-sphere のもののみを考える。[11] より、(S^5, K_f) は simple になる。しかも、algebraic knot は fibered knot になるが、この時 Seifert surface として 1 つの fiber をとると、それから作った Seifert matrix は unimodular になる。以後、algebraic knot の Seifert matrix としては、この unimodular な matrix のみを考える。

<u>命題 5</u> (S^5, K_f) を algebraic 3-knot で、K_f が homology 3-sphere であるものとする。また、その Seifert matrix を L とする。この時次が成り立つ。

(1) $\mu(K_f)=0 \Rightarrow (S^5, K_f)$ は decomposable

(2) $\mu(K_f) \neq 0$ の時、L が $L_1 \oplus L_2$ の形の matrix に congruent ならば、(S^5, K_f) は decomposable。

(証明)

(1) $\det(L + {}^tL) = \pm 1$, $\mathrm{sign}(L + {}^tL) \equiv 0 \pmod{16}$ だから、定理4より Seifert matrix として L (と S-equivalent なもの) を持つ simple S^3-knot (S^5, K_1) が存在する。f が $\vec{0}$ を critical point に持つことから、L が zero matrix と S-equivalent でないことがわかる。したがって、(S^5, K_1) は non-trivial である。一方、zero matrix と S-equivalent な matrix を Seifert matrix として持つ Σ-knot (S^5, K_2) あり ($\Sigma \cong K_f$)。[12] より、$\Sigma \neq S^3$ なので、(S^5, K_2) も non-trivial になる。定理4より $(S^5, K_f) = (S^5, K_1) \# (S^5, K_2)$ となるから、(S^5, K_f) は decomposable である。

(2) Seifert matrix として L_1, L_2 (と S-equivalent なもの) を持つ knots を考えれば、(1) と同様に示せる。//

(定理2の証明)

g に付随した algebraic knot を (S^3, K_g) とする。g

は Puiseux 特性対を2つ以上持つので、(torus knot ではなく)本当の cable knot になる([1])。したがって (S^5, K_g) の Seifert matrix L_g は、 $L_g = L_g' \oplus L_g''$ のように直和の形となる([10]、[17])。一方 $f(x,y,z) = g(x,y) + z^r$ だったから、(S^5, K_f) の Seifert matrix を L とおくと、[16] より、

$$L = L_g \otimes A = (L_g' \otimes A) \oplus (L_g'' \otimes A)$$

(A はある $(r-1) \times (r-1)$ matrix)

となる。したがって命題5より、(S^5, K_f) は decomposable となる。 //

§4. Fibered knot への分解

一般に、simple fibered Σ-knot が、(knot として) decomposable であっても、2つの fibered knots の connected sum に分解するとは限らない。実際にそのような例がある。

<u>例</u> 3　　$f(x,y,z) = x^2 + y^7 + z^{13}$ とおく。この時 K_f は Brieskorn manifold $\Sigma(2,7,13)$ であり、これは homology 3-sphere になる。[7, §4] より、$\Sigma(2,7,13)$ は intersection form が E_{16} と同型な 1-connected compact 4-manifold (これも E_{16} と書くことにする。)を

bound する。特に $\mu(K_f)=0$ 。よって命題5より、(S^5, K_f) は decomposable である。

一方、(S^5, K_f) の Alexander polynomial $\Delta(t)$ は、円分多項式 $\phi_{182}(t)$ で、これは特に irreducible 。(S^5, K_f) の Seifert matrix を L とおくと、$\Delta(t)=\det(tL+{}^tL)$ だから、L は2つの matrix の直和になれないことがわかる。したがって、もし $(S^5, K_f)=(S^5, K_1)\#(S^5, K_2)$ ((S^5, K_i) は non-trivial) とすると、(S^5, K_1) は zero matrix と S-equivalent な Seifert matrix を持つとして良い。$K_f \cong \Sigma(2,7,13)$ は irreducible だから、$K_1 \cong \Sigma(2,7,13)$ でなければならない。

そこで、もし (S^5, K_1) が fibered とすると、その Seifert matrix は zero matrix だから、fiber M は compact contractible 4-manifold になる。すると、boundary を同一視してできる smooth closed 4-manifold $V=E_{16}\cup M$ は 1-connected で、その intersection form は negative definite だが standard form ではない。これは Donaldson の定理（[2]）に反する。したがって、(S^5, K_f) は fibered knots の connected sum には分解しない。

例3のように、decomposable な algebraic 3-knot は fibered knots の connected sum に分解するとは限らない。しかし、fibered knots の connected sum に分解する algebraic 3-knot も存在する。

<u>定理</u>6 ([14]) $g_0(x,y)=y^4-2x^3y^2-4x^5y+x^6-x^7$, $f_r(x,y,z)=g_0(x,y)+z^r$ とおく。この時もし $r\equiv 5 \pmod{78}$ $(r\geqq 2)$ ならば、f_r に付随した algebraic 3-knot は、2つの non-trivial fibered knots の connected sum に、(knot として)分解する。

証明は長くなるので省略する。くわしくは [14] 参照。

(注) ① $n\geqq 3$ の時は、S^{2n+1} 内の simple fibered knot が decomposable ならば、その各 factor knot は必然的に fibered knot になる。

② 上の定理6の例では、2つの fibered knots の connected sum に knot として分解するけれども、fibering structure まで込めて分解するかどうかはわからない。

References

[1] N. A'Campo, Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, Invent. Math. 20 (1973), 147-169.

[2] S. Donaldson, An application of gauge theory to 4-dimensional topology, J. Diff. Geom. 18 (1983), 279-315.

[3] A. Durfee, Knot invariants of singularities, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, 1975, 441-448.

[4] ———, The low dimensional topology of singularities, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 40-Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1983, 321-326.

[5] S. Kaplan, Constructing framed 4-manifolds with given almost framed boundaries, Trans. Amer. Math. Soc. 254 (1979), 237-263.

[6] M. Kervaire, Les nœuds de dimension supérieures, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 225-271.

[7] R. Kirby, A calculus for framed links in S^3, Invent. Math. 45 (1978), 35-56.

[8] J. Levine, Unknotting spheres in codimension two,

Topology 4 (1965), 9-16.

[9] ——, An algebraic classification of some knots of codimension two, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 185-198.

[10] F. Michel and C. Weber, Noeuds algébriques décomposables, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 294 (1982), 493-496.

[11] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Stud. No. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1968.

[12] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. I.H.E.S. 9 (1961), 5-22.

[13] W. Neumann, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, Trans. Amer. Math. Soc. 268 (1981), 299-344.

[14] O. Saeki, On simple fibered knots in S^5 and the existence of decomposable algebraic 3-knots, to appear in Comment. Math. Helv. .

[15] ——, Knotted homology 3-spheres in S^5, preprint.

[16] K. Sakamoto, The Seifert matrices of Milnor

fiberings defined by holomorphic functions, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 714-721.

[17] Y. Shinohara, On the signature of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 273-285.

[18] C.T.C. Wall, Diffeomorphisms of 4-manifolds, J. London Math. Soc. 39 (1964), 131-140.