数理解析研究所講究録
第624巻 1987年 157-169



# Ribbon 2-knotの分解について

神戸大学(教育) 安田 智之

任意の自然数$n$に対し$\mathbb{K}_n$を$n$-knot type $[K^n \subset S^{n+2}]$全体の集合とする。$n \neq 2$なる任意の元$[K^n \subset S^{n+2}]$に対し、$K^n$をprime decomposition $[K^n \subset S^{n+2}] = [K_1^n \subset S^{n+2}] \# \cdots\cdots \# [K_n^n \subset S^{n+2}]$と分解するとし、特に$n=1$の時decompositionがuniqueであること、がわかっている。([S, P.347])

$n=2$についても同様の問題が考えられるが、まだ未解決である。ここには少なくとも二つの困難がある。まず2-knotについては、二つのunknotでないknotのcompositionがunknotでないとは言い切れない。従ってdecompositionが有限回の操作でおわるかどうかがわからない。また2-knot $K^2$について、$\pi_1(K^2) = \mathbb{Z}$であっても$K^2$がunknotとは限らない。依ってprimenessの判定が難しい。

ここでは2-knotを考える上で対象をribbon 2-knotに限定し、本来のdecomposition([So, P.140])よりきつい条件で定

義した⊕−decompositionなる概念を導入し、分解問題を考える。

<u>定義1</u>　$\mu \geq 1$に対し$\mu$-component のtrivial 2-link ($O_1^2 \cup \cdots \cup O_\mu^2 \subset S^4$) から適当なembeddings $B_1^+, \cdots, B_{\mu-1}^+ : I \times D^2 \longrightarrow S^4$ に沿ったfusionによって得られる2-knotを<u>ribbon 2-knot</u>という。（$D^2$は2-disk）

Ribbon 2-knotに対しては次の様な特徴づけが知られている。
<u>定理2</u>（[Y1, P.453]）$K^2$がribbon 2-knotである為の必要十分条件は、$K^2$のあるSeifert 3-manifold $W^3$が存在して、$W^3$が次の①或いは②の条件を満たす事である。

① $W^3 \cong D^3$　（$D^3$は3-disk）

② $W^3 \cong S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 \# \cdots \# S^2 \times S^1 - \mathring{\Delta}^3$ （$\Delta^3$は3-simplex）で、かつ$W^3$はtrivial system of 2-spheres をもつ。

ここに$W^3$が<u>trivial system of 2-spheres</u>をもつ、とは$W^3$の中の互いにdisjointな2-spheresのcollection $\{S_1^2, S_2^2, \cdots\cdots, S_{2r-1}^2, S_{2r}^2\}$があって次の(1)〜(3)を満たす事を言う。

(1) $S_1^2 \cup S_2^2 \cup \cdots \cup S_{2r-1}^2 \cup S_{2r}^2$は$S^4$のtrivial 2-link

(2) $S_i^2 \cup S_{i+r}^2$は$W^3$で$N_i \cong S^2 \times I$をboundし，$N_i \cap N_j = \emptyset$ $(i \neq j)$

(3) $Cl(W^3 - N_1 - \cdots - N_r) \cong S^3 - (2r+1$コのopen 3-disks$)$

従って以下の一連の概念がきっちり定義される。

定義3　Ribbon 2-knot $K^2$ の ribbon genus $g(K^2)$ を次で定義する。$K^2$ の Seifert manifold を $W^3$ とする時 $W^3$ を可能な限りはりかえた時の rank $H_1(W^3)$ の最小値を $K^2$ の ribbon genus と定める。また $g(K^2)$ を attain する $W^3$ を $K^2$ の minimal Seifert manifold という。

定義4　Ribbon 2-knot $K^2$ の $\boxplus$-decomposition を次で定義する。$K^2$ に対しある $(S^3 \subset S^4)$ とある $K^2$ の minimal Seifert manifold $(W^3 \subset S^4)$ とがあって次の①, ②, ③を満たすとする。

① $S^3 \cap K^2 = k$ は $S^3$ で unknotted

② $S^3 \cap W^3 = d^2$ は 2-disk

③ $d^2 \cap$ ( $W^3$ の trivial system of 2-spheres) $= \emptyset$

この時、$K^2 - d^2 = K_1^{2\prime} \cup K_2^{2\prime}$ $(K_1^{2\prime} \cap K_2^{2\prime} = \emptyset)$, $K_1^2 = K_1^{2\prime} \cup d^2$, $K_2^2 = K_2^{2\prime} \cup d^2$ とおく。$K_1^2$ と $K_2^2$ が各々 trivial knot でないならば

$$(K^2 \subset S^4) = (K_1^2 \subset S^4) \boxplus (K_2^2 \subset S^4)$$

とあらわし、$K^2$ は２つの 2-knot $K_1^2, K_2^2$ に $\boxplus$-decomposition されると言う。また $K_1^2$ と $K_2^2$ を $K^2$ の $\boxplus$-factor と呼ぶ。そしてこの様に $\boxplus$-factor に分解できない ribbon 2-knot は $\boxplus$-prime であるという。

依って次の二つの命題を示す事により分解問題を考える事が

できる様になる。

<u>命題5</u>　Ribbon 2-knot $K^2$ の $\oplus$-factors $K_1^2$, $K_2^2$ はまた ribbon 2-knot である。

《証明》 $W^3 \cong \#_{i=1}^{n}(S^2 \times S^1)_i - \mathring{\Delta}^3$ とする。定義4の①,②より $W^3 = W_1^3 \cup_d W_2^3$ と書け，(i) $W_1^3 \cong \#_j(S^2 \times S^1)_j - \mathring{\Delta}_1^3$, $\partial W_1^3 = K_1^2 \cong \partial \Delta_1^3$，(ii) $W_2^3 \cong \#_k (S^2 \times S^1)_k - \mathring{\Delta}_2^3$, $\partial W_2^3 = K_2^2 \cong \partial \Delta_2^3$，となる。ここで $j = 1, 2, \cdots l$，$k = l+1, l+2, \cdots, n$ としてよい。更に定義4の③から $W_1^3$, $W_2^3$ は各々(i)，(ii)に対応する 2-sphere の trivial system をもつ。　　（命題5証了）

<u>命題6</u>　$K^2 = K_1^2 \oplus K_2^2$ とすると $g(K^2) = g(K_1^2) + g(K_2^2)$ が成立する。

《証明》 $K^2$ の minimal Seifert manifold を $W^3 = W_1^3 \cup_d W_2^3$ とおく。この時，

$$
\begin{aligned}
g(K^2) &= \min_{W^3} \operatorname{rank} H_1(W^3) \\
&= \operatorname{rank} H_1(W_1^3) + \operatorname{rank} H_1(W_2^3) \\
&\geq g(K_1^2) + g(K_2^2) \\
&= \operatorname{rank} H_1(W_1^{3*}) + \operatorname{rank} H_1(W_2^{3*})
\end{aligned}
$$

（$W_i^{3*}$ は $K_i^2$ の genus を attain する Seifert 3-manifold）

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{rank} H_1(W_1^{3*} \cup W_2^{3*}) \\
&\geq g(K^2)
\end{aligned}
$$

（$\because W_1^{3*} \cup W_2^{3*}$ は $K^2$ の一つの Seifert 3-manifold）　（命題6証了）

系7　$g(K^2)=1$ の時

系8　各2-knot について⊕-factor 数は有限である。

ところで分解問題を考える前に次の命題を示す。

命題9　任意の非負整数$n$に対し、ribbon genus $n$ の ribbon 2-knot が存在する。

この命題を証明する為に以下準備を行なう。

注意10　任意の自然数$n$に対しAlexander polynomial として$n$次式を持つ様なribbon 2-knot $K^2$ で $g(K^2)=n$ なるものを見つける。そうすれば次の補題11により命題9は証明された事になる。

補題11　Ribbon genus $g$ の ribbon 2-knot $K^2$ に対して次の不等式が成立する。

$$(\Delta_{K^2}(t) \text{ の degree}) \leq g$$

補題11は下の定理12，13，14から直ちに示される。

[Y1, P.458] より、ribbon 2-knot $K^2$ の standard representative として$\mathbb{R}^3_0$に対して対称なものをとれる。以後、ribbon 2-knot の standard representative としていつもこれを考え、その equatorial cross section $K^2 \cap \mathbb{R}^3_0$ を$K^2$の<u>equatorial 1-knot</u>と言う。

<u>定理12</u> [Y2, P.100] Ribbon genus $g$ の ribbon 2-knot $K^2$ には genus $g$ 以下の equatorial 1-knot $k^1$ が存在する。

<u>定理13</u> [Ro, P.208] 1-knot $k$ に対して $g(k)=g$ とすると、次の不等式が成立する。 $\deg \Delta_k(t) \leq 2g$

<u>定理14</u> [Yo, P.35] (1) 任意の ribbon 2-knot は principal first elementary ideal をもつ。(2) ribbon 2-knot ($K^2 \subset \mathbb{R}^4$) の equatorial cross section を ($k \subset \mathbb{R}^3_0$) とする時、次の式が成立する。"$\doteq$" は mod $\pm t^\lambda$ で両辺が等しい事を示す。

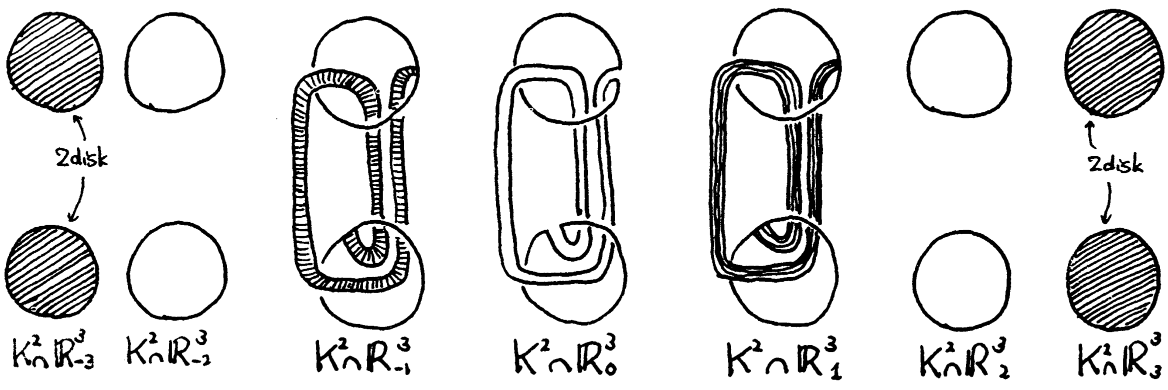
$$\Delta_k(t) \doteq \Delta_{K^2}(t) \times \Delta_{K^2}(t^{-1})$$

(補題11証了)

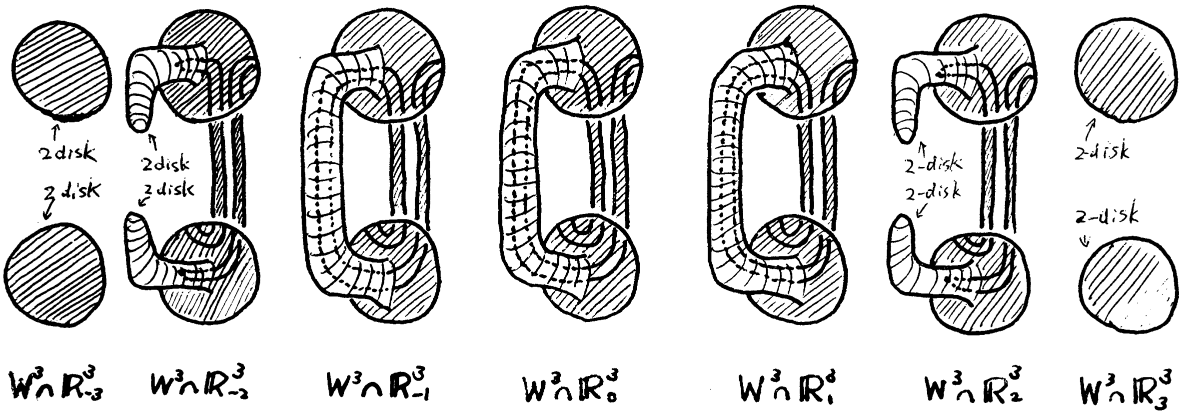
《命題9の証明》

($n=0$ の場合) unknotted な ribbon 2-knot $O^2$ は 3-disk を bound するので ribbon genus の定義により $g(O^2)=0$ である。

($n=1$ の場合) 次の ribbon 2-knot $K^2$ を考える。

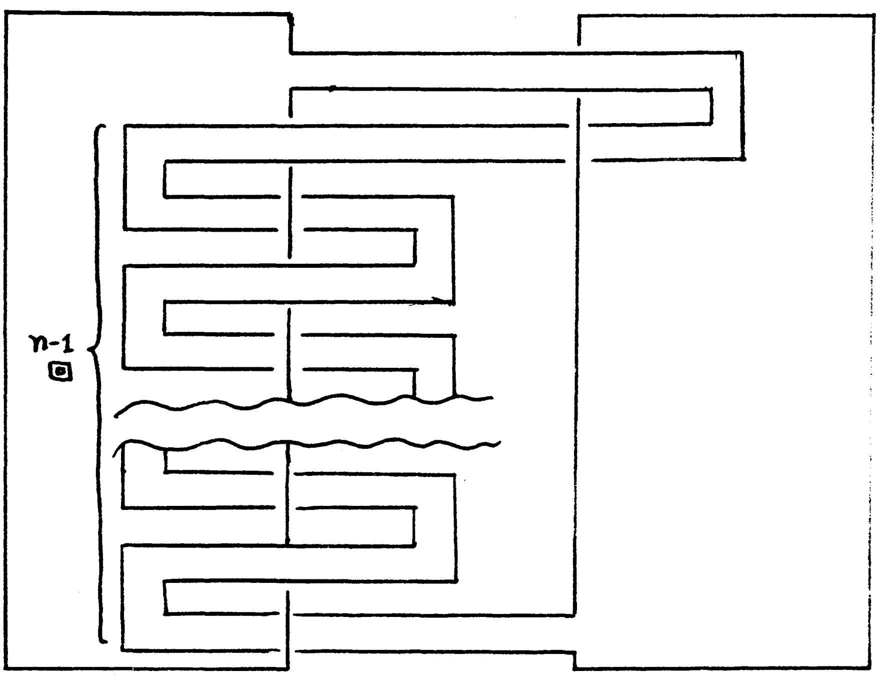


$\Delta_{K^2}(t) = 2t-1$ である。一方$K^2$には次の様なSeifert 3-manifold $S^2 \times S^1 - \mathring{\Delta}^3 \cong W^3$ をはる事が出来る。

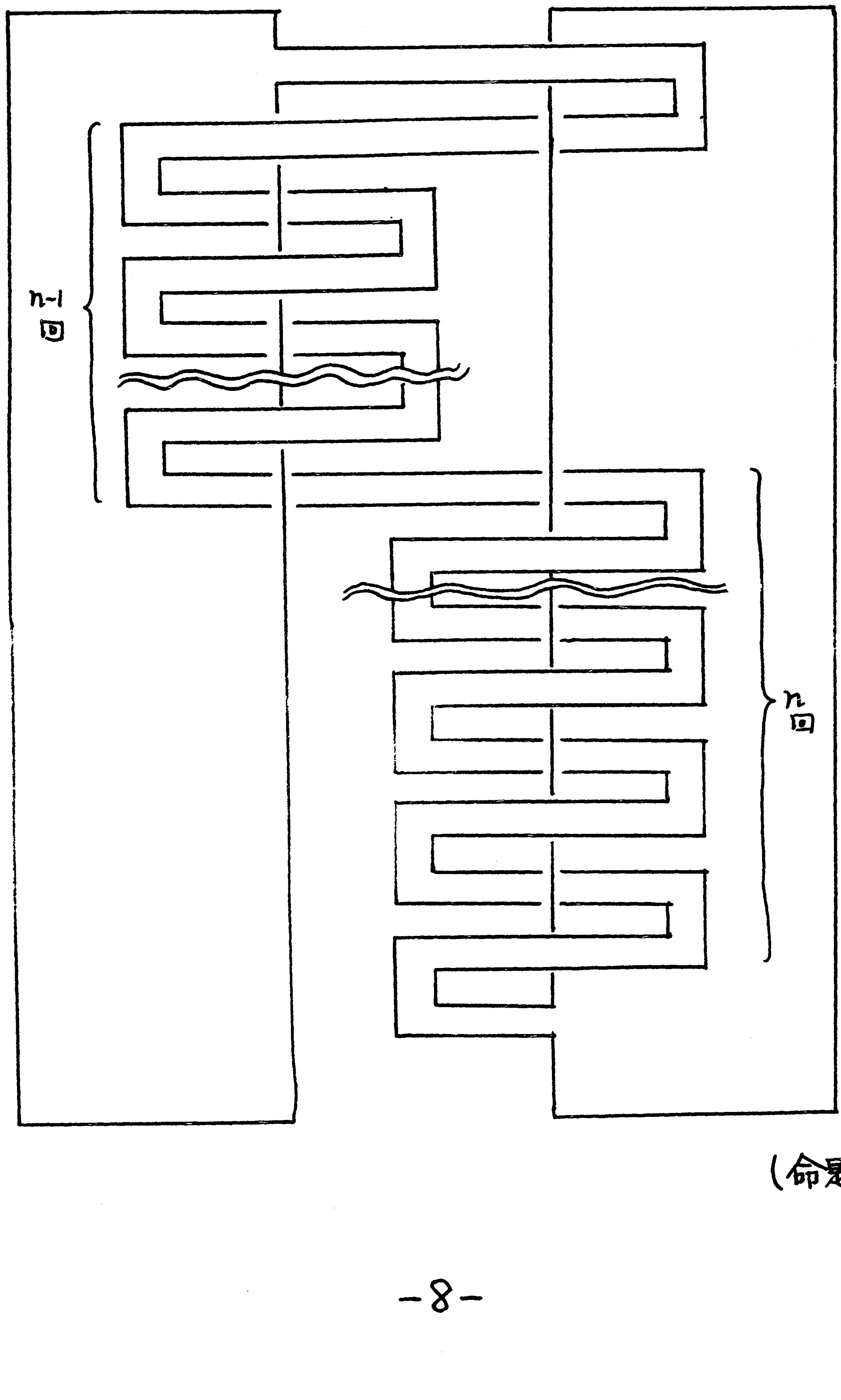



従って注意10より$K^2$はribbon genus 1のribbon 2-knotである。

（$n \geq 2$の場合）equatorial 1-knotを指定する。あとは，$n = 1$の例と同様に自然に各cross sectionを与えて2-knotを構成するものとする。



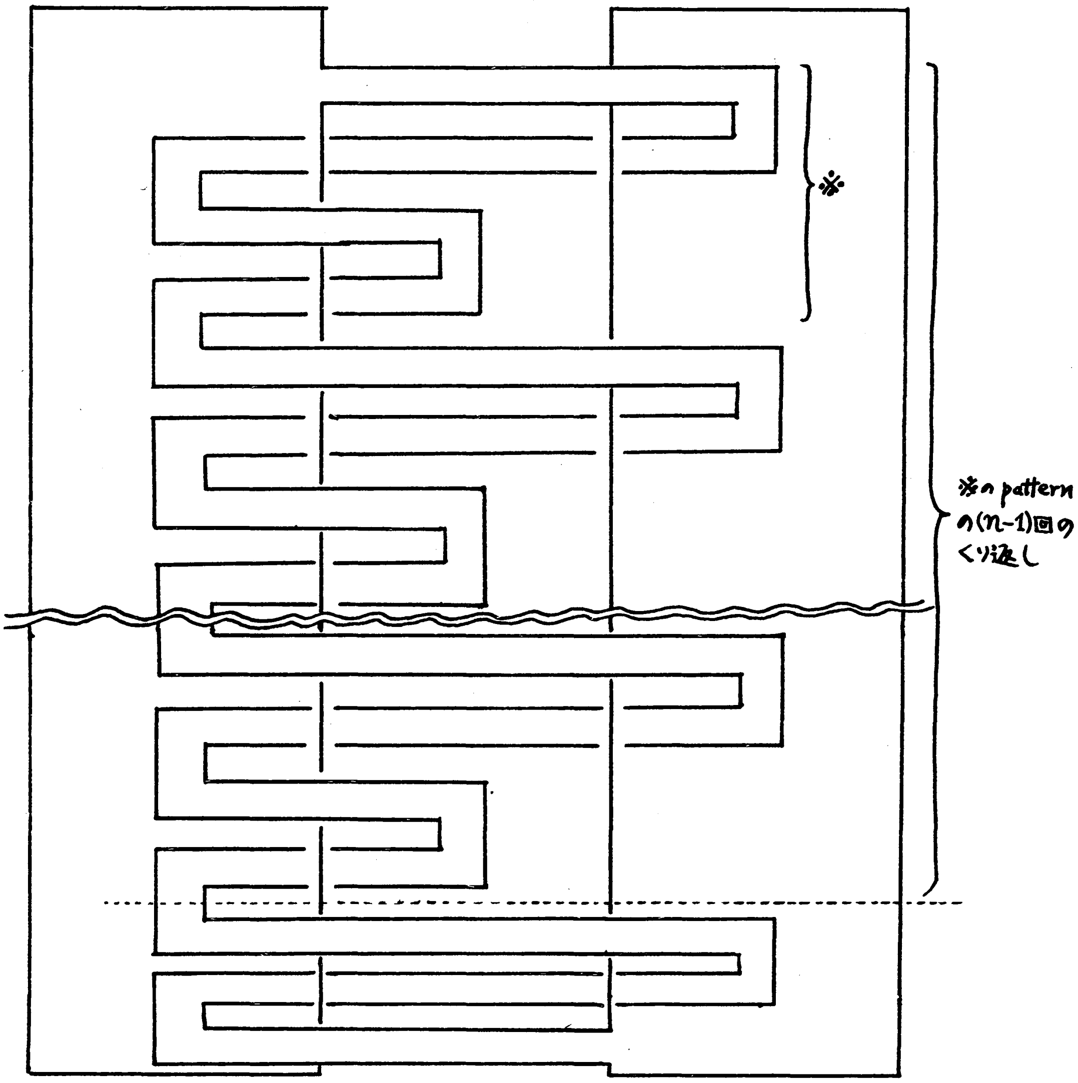
この ribbon 2-knot $K^2$ の Alexander polynomial は Kinoshita ([K, P.520]) に従えば $t^2-t+1$ である。下に図示した様に $K^2$ には Seifert 3-manifold $\mathop{\#}_{i=1}^{n}(S^2\times S^1)_i-\mathring{\Delta}^3$ をはる事が出来る。従って注意10より $g(K^2)=n$ である。まず $K^2$ を knot type を変えないように変形した上で Seifert manifold $W^3$ をはる。$W^3\cap R^3_0$ のみ示す。



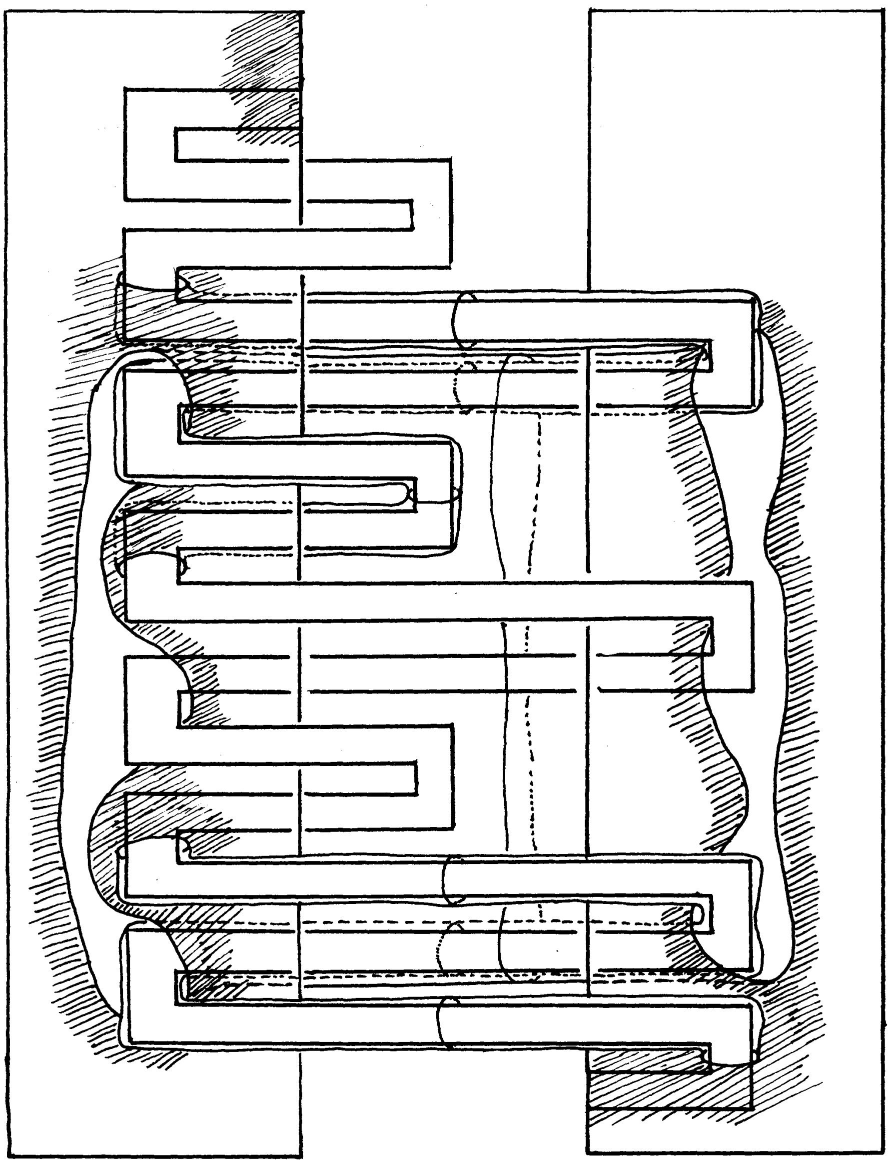

(命題9証了)

注意15　研究集会では上の（$n \geq 2$の場合）で構成したribbon 2-knot がすべての$n$についておそらく$\oplus$-prime であろうと述べたが、$t^n - t + 1$は$n = 8$のとき

$(t^2 - t + 1)(t^6 + t^5 - t^3 - t^2 + 1)$　と因数分解され、$\oplus$-primeでない可能性の出る事がのちにわかった。しかしながらその後$n \geq 1$なる$n$に対しAlexander polynomialとして整数係数の範囲で既約な多項式をもち、しかもSeifert manifold $\#_{i=1}^{n} (S^2 \times S^1)_i - \mathring{\Delta}^3$ をもつribbon 2-knotが構成できた。



この 1-knot を equatorial 1-knot として.《命題 9 の証明》の方法で自然に構成した ribbon 2-knot は ゼ−2 なる Alexander polynomial をもつ。これに Seifert 3-manifold $W^3 \cong \#_{i=1}^{n} (S^2 \times S^1)_i - \mathring{\Delta}^3$ をはったときの $W^3 \cap R^3_0$ を示せばよいが、はり方の pattern は同じなので $n=3$ の図を掲げる。



以上により命題9はもっと強められ、「任意の自然数$n$に対して ribbon genus $n$の⊕-prime ribbon 2-knot が存在する」と改める事ができる。

最後に ribbon genus $n$ ($n \geq 0$) の ribbon 2-knot について各分解問題を考える。

《$g(K^2) = 0$ のとき》定義より$K^2$は unknot であり、⊕-prime である。

《$g(K^2) = 1$ のとき》$K^2$は系7より⊕-prime である。

$g(K^2) = 1$なる$K^2$については次の定理がある。

<u>定理16</u> [Y2, P.100] Alexander polynomial で knot type がきまる。（但し unoriented knot として）

次の事は、[C-F, chapter 8] の Alexander polynomial の定義の仕方と、⊕-decomposition の定義からすぐ出る。

<u>命題17</u>　$K^2 = K_1^2 \oplus K_2^2$ならば $\Delta_{K^2}(t) \doteq \Delta_{K^2}(t) \times \Delta_{K^2}(t^{-1})$

《$g(K^2) = 2$のとき》 命題17より$\Delta_{K^2}(t)$が一次以下なら、$K^2$は⊕-prime である。次に$\Delta_{K^2}(t)$ が二次式とする。$K^2 = K_1^2 \oplus K_2^2$とすると命題6より $g(K_1^2) = g(K_2^2) = 1$である。

従って補題11と命題17から$\Delta_{K_1^2}(t)$と$\Delta_{K_2^2}(t)$は各々一次式である。依って因数分解の一意性と定理16から次のことが言える。

命題18　$g(K^2)=2$なる$K^2$は⊕-decompositionに関し、分解がunique である。

同様に定理16と因数分解の一意性より次の事は言える。

命題19　$g(K^2)=n$　$(n \geq 3)$　なる$K^2$に対し、これが$n$個の2-knotに分解されるとする。加えて$\Delta_{K^2}(t)$が、一次式の積に因数分解されるとする。この時、⊕-decompositionに関し、分解はunique である。

命題20　$g(K^2)=3$　で$\Delta_{K^2}(t)=1$　ならば$K^2$は⊕-primeである。

＊参考文献＊

[S]　Shin'ichi Suzuki : Knotting Problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ., vol 4 No. 3 (1976) 241-371

[So] Sosinskii A.B. : Decomposition of knots, Math. USSR Sbornik 10 (1970)

[Y1] Takaaki Yanagawa : On ribbon 2-knots, the 3-manifold bounded by the 2-knots, Osaka J. Math. vol 6 (1969) 447-464

[Y2] Takaaki Yanagawa : A note on ribbon n-knots with genus 1, Kobe J. Math, vol 2 (1985) 99-102

[Ro] D. Rolfsen : Knots and Links, Publish or Perish Inc., Barkley 1976

[K] Shin'ichi Kinoshita : On the Alexander polynomials of 2-sphers in a 4-sphere, Ann. of Math. vol 74 (1961) 518-531

[Yo] Katsutoshi Yonebayashi : On the Alexander polynomial of ribbon 2-knots, Master's thesis Kobe Univ. 1969

[C-F] R.H. Crowell and R.H. Fox : Introduction to knot theory, Grad. Texts in Math. vol 57 Springer-Verlag New York and Berlin 1977