数理解析研究所講究録
第 624 巻 1987 年 224-236

Dehn surgered manifolds and knots

九州大 理　茂手木 公彦 (Kimihiko Motegi)

§1. 序

本稿の目的は Dehn surgery で得られる多様体を通してもとの knot の間の関係を調べることである。

K を oriented S^3 の中の unoriented knot とし、K に沿った q/p-Dehn surgery で得られる oriented 3-manifold を $M(K; q/p)$ と書く。($q/p \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $(p, q) = 1$) 本稿を通して 3-manifold は oriented で、$\cong$ は orientation preserving homeomorphic を表わし、$\sim$ は knot の次の意味での同値関係を表わすものとする。$K_1 \sim K_2 \underset{def}{\Leftrightarrow} S^3$ の orientation preserving homeomorphism で K_1 を K_2 に写すものが存在する。

knot の surgery description を複数個もつような多様体はいろいろ調べられているが、最初に考えられるのは次の問題である。

問題　$K_1, K_2 \subset S^3$ を $K_1 \not\sim K_2$ なる knots とする。このとき、$\{K_1$ の Dehn surgery で得られる得られる 3-manifolds$\} \cap \{K_2$ の Dehn surgery で得られる 3-manifolds$\}$ は高々有限個か?

しかし、この問題に対する答は、次の例が示すように NO で

ある。

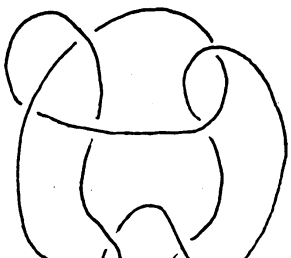
例　K_1 ; (r_1, s_1) - torus knot, K_2 ; (r_2, s_2) - cable knot about K_1 $(r_i, s_i \geqq 2)$ とする。Gordonの結果([2] Cor. 7.3.)を用いると、$|r_2 s_2 p - q| = 1$ をみたす q/p に対して $M(K_2; q/p) \cong M(K_1; q/s_2^2 p)$ となる。従って {K_1のDehn surgeryで得られる3-manifolds} $\cap$ {K_2のDehn surgeryで得られる3-manifolds} は無限個。

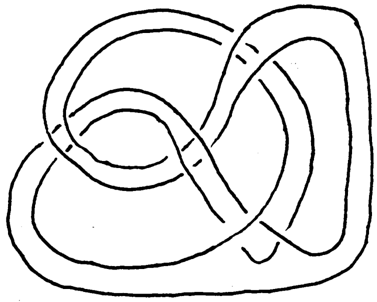
この例では、Dehn surgeryの係数は異なっているが、そこで係数が一致するという条件をつけてみる。この条件のもとで、先づ、

問題　$K_1, K_2 \subset S^3$, $K_1 \nsim K_2$ なる3 knotsで、ある $q/p \in \mathbb{Q}$ に対し $M(K_1; q/p) \cong M(K_2; q/p)$ となるものが存在するか？

ということが問題になるが、この問題に関してLickorish [8], Brakes [1], Livingston [9] がいくつかの例を構成している。

例 (Lickorish [8])

K_1 

 K_2

$\Delta_{K_1}(t) = 1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4$　　　$\Delta_{K_2}(t) = 1 - t + t^2$

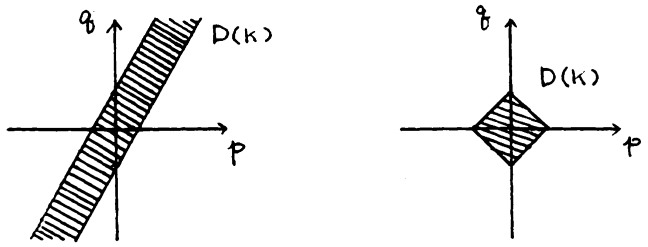
K_1, K_2 の -1 - Dehn surgeryは同じ多様体になる。

Remark　任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して N 個の異なるの $+1$ - Dehn surgery

で得られる多様体の存在が Brakes, Livingston によって示されている。更に Livingston は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、異なる knot でそれぞれの $1/n$ - Dehn surgery で得られる多様体が一致する例を構成している。

次に問題となるのは、無限個の $q/p \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に対して $M(K_1; q/p) \cong M(K_2; q/p)$ になるような knot K_1, K_2 が存在するか、ということであるが、この問に対する答えとはいえないが、次が成り立つ。

定理 任意の knot $K \subset S^3$ に対して、次のような領域 $D(K) \subset \mathbb{R}^2$ ($D(K)$ は帯状領域か compact な領域) が存在する。ある $(p, q) \in \mathbb{R}^2 - D(K_1) \cup D(K_2)$ に対して、$M(K_1; q/p) \cong M(K_2; q/p)$ ならば $K_1 \sim K_2$ となる。



($D(K)$ がどちらの type になるかは knot exterior を torus 分解した際、$\partial E(K)$ を含む piece が Seifert fibred か hyperbolic かによる。)

Dehn surgery のうち $1/n$ - Dehn surgery ($n \in \mathbb{Z}$) は homology 3 - sphere を生み出し、n - Dehn surgery (framed surgery) は 2-handle はり合わせることにより多様体の同境問題に関係するものであるが、このような type の Dehn surgery に関して、定理からわ

かる系をあげておく。(定理の帯状領域を調べればわかる。)

系　無限個の整数 n に対して、$M(K_1; 1/n) \cong M(K_2; 1/n)$ となるならば、$K_1 \sim K_2$。

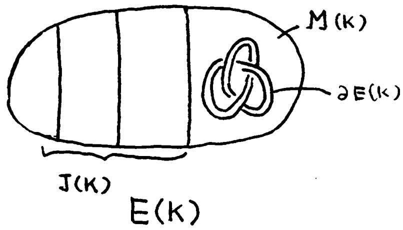
系　K_i を prime knot とする。無限個の整数 n に対して、$M(K_1; n) \cong M(K_2; n)$ となるならば $K_1 \sim K_2$。

Remark　knot の branched cover と knot について、S. Kojima は[7]において、任意の prime knot に対して次のような $N(K)$ が存在することを示している。$n \geqq \max(N(K_1), N(K_2))$ なる n に対して、K_1, K_2 の n-fold branched cover が同相なら、K_1 と K_2 は unoriented equivalent。

§2.　Dehn surgery と dual knot

K を non-trivial knot とする。K の exterior $E(K) = S^3 - \mathrm{int}\, N(K)$ は、Alexander の定理より irreducible、また loop theorem, Dehn's Lemma より ∂-irreducible であることがわかる。このとき、$E(K)$ は有限個の disjoint な essential torus の family $\mathcal{T}(K)$ により (up to ambient isotopy で) 一意的に Seifert fibred piece と simple piece (∀incompressible torus が ∂-parallel) に分解される (Jaco-Shalen [4], Johannson [5])。更に、Thurston の uniformization theorem (Morgan-Bass [10]) から simple piece のうち Seifert fibred でないものには、体積有限の complete hyperbolic structure が入る

ことがわかる。つまり、$E(K)$は$J(K)$によってSeifert fibred pieceとhyperbolic pieceに一意的に分解される。以下、$E(K)-\mathrm{int}\,N(J(K))$の$\partial E(K)$を含むpieceを$M(K)$と表わす。($K$がtorus knotまたはhyperbolic knotの時、$M(K)=E(K)$となる。)



また、knot Kに沿ってDehn surgeryした際の、attaching solid torus VのcoreのimageをK^*で表わし、dual knotと呼ぶことにする。更に、$M_{p,q}(K)=M(K)\cup_h V$ (hはq/p-Dehn surgeryにassociateした∂Vから$\partial E(K)$へのhomeomorphism)と表わす。

この§の目的は、Dehn surgeryを実行した際のdual knotのbehaviorを調べることである。先にみたように$M(K)$はSeifert fibredかhyperbolicであるが、先ず$M(K)$がSeifert fibredのcaseについて調べる。

補題 2.1. $M(K)$はSeifert fibredとする。1つのDehn surgeryを除いて$M(K)$のSeifert fibrationは$M_{p,q}(K)$に拡張し、任意の$N\in\mathbb{N}$に対し、ある帯状領域$B_N(K)\subset\mathbb{R}^2$が存在し、$(p,q)\notin B_N(K)$に対して$K^*$は$M_{p,q}(K)$においてindex $>N$なるexceptional fibreとなる。

証明. $M(K)$のSeifert fibrationはup to isotopyで一意であり

(Jaco [3], VI.17. Theorem)。今その regular fibre が $\lambda^{\alpha}\mu^{\beta}$，但し，$(\lambda, \mu)$ は $E(K)$ の longitude - meridian pair，と表わされるとする。q/p - Dehn surgery した時の V の meridian curve の image は $\lambda^{p}\mu^{q}$ と表わされ，$\lambda^{\alpha}\mu^{\beta}$ と $\lambda^{p}\mu^{q}$ の intersection number $|\alpha q - \beta p|$ が 0 でない時，V を fibred solid torus として，$M(K)$ の Seifert fibration を $M_{p,q}(K)$ に拡張できる。また，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，$B_N(K) = \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \mid |\alpha q - \beta p| \leqq N\}$ とおけば結果が従う。□

$M(K)$ は ∂-irreducible であるが，$M_{p,q}(K)$ に関して次が成り立つ。

<u>補題 2.2.</u> $(p,q) \notin B_1(K)$ に対して，$M_{p,q}(K)$ は ∂-irreducible

<u>証明.</u> $(p,q) \notin B_1(K)$ に対しては $M_{p,q}(K)$ は Seifert fibred であり，irreducible である (Jaco [3], VI.7. Lemma)。従って $M_{p,q}(K)$ が ∂-irreducible であることを示すためには，solid torus でないことを示せばよいが，これは K^* が index $\geqq 2$ の exceptional fibre であることから示される。□

<u>Remark 2.3.</u> $M(K)$ は knot exterior に含まれる ∂-irreducible な Seifert fibred manifold であるから，(r,s) - torus knot space，(r,s) - cable space，composing space のいずれか (Jaco [3], IX.22. Lemma) であり，$M(K)$ の regular fibre は最初の 2 つの case の時，$\lambda\mu^{rs}$ と表わされ，最後の case の時，μ と表わされる。従って特に $M(K)$ が composing space の時，$p=0$ (i.e. trivial な surgery) を

除いて$M_{p,q}(K)$は∂-irreducible。

次に$M(K)$がhyperbolicのcaseについて考える。ここでの議論はThurstonによるhyperbolic Dehn surgery（[13] Chap. 5）及びS. Kojimaの結果（[6] Lemma 5.1.）に基づいている。

<u>補題 2.4.</u>　int $M(K)$は体積有限なcomplete hyperbolic structureをもつものとする。このとき、あるcompact set $C(K)=\{(p,q)\in\mathbb{R}^2 \mid |p|+|q|\leq N\}$が存在して、$(p,q)\notin C(K)$に対して int $M_{p,q}(K)$も体積有限のcomplete hyperbolic structureをもつ。更に、任意のεに対してcompact set $C_\varepsilon(K)=\{(p,q)\in\mathbb{R}^2 \mid |p|+|q|\leq N_\varepsilon\}$ $(N_\varepsilon\geqq N)$が存在し、dual knot K^*は int $M_{p,q}(K)$において長さがεより小なる閉測地線となる。

また、hyperbolic manifoldは$\mathbb{H}^3$でcoverされ、$\mathbb{H}^3$はirreducibleだから、hyperbolic manifoldはirreducible。よって、

<u>系 2.5.</u>　$(p,q)\notin C(K)$に対して、$M_{p,q}(K)$は∂-irreducible。

§3. dual knotの特徴付け

この§では、§2の結果を利用してDehn surgered manifoldにおけるdual knotを特徴づけることを考える。

$E(K)$におけるexceptional fibresとclosed geodesics全体に対して次のように"weight" wを定義する。

$$w(\text{exceptional fibre})=1/\text{index}(\text{exceptional fibre})$$

$$w(\text{closed geodesic}) = \text{length}(\text{closed geodesic})$$

$E(K)$はcompactだからexceptional fibreは高々有限個であり、Margulis constantより短い長さの閉測地線は有限個(Morgan-Bass [10] V.6)であることがわかる。そこで、$E(K)$における weightの最小値を$\min\{w\}$と書くことにする。また、$\mathrm{int}\,M(K) - N$ (NはKに対応するtorus cuspのsmall horoball neighborhood)において閉測地線の長さのinfimumはhyperbolic Dehn surgery deformationに関して連続である。

従って、補題2.1, 2.4からdual knot K^*を次のようにできる。$B_N(K)$あるいは$C_\varepsilon(K)$を適当にとれば、$(p,q) \in B_N(K)$ or $C_\varepsilon(K)$に対して、$1/\mathrm{index}(K^*) < \min\{w\}$、あるいは、$\mathrm{length}(K^*) < \min\{w\}$かつ$K^*$は$\mathrm{int}\,M_{p,q}(K)$においてunique shortest closed geodesicとなる。以下、このような$B_N(K)$あるいは$C_\varepsilon(K)$を$D(K)$と定める。trivial knotに対しては$D(K) = \emptyset$とする。

$E(K)$のuniqueなtorus分解を与えるessential torusのfamilyを$J(K)$と表わしたが、Dehn surgered manifold $M(K; q/p)$のuniqueなtorus分解に対して次がわかる。(best possibleではないが後で使うのは次の形で十分。)

<u>補題3.1.</u> $(p,q) \in D(K)$に対して、$M(K; q/p)$のuniqueなtorus分解はやはり$J(K)$によって与えられる。

<u>証明</u> 補題2.2, 系2.5より、$M_{p,q}(K)$は∂-irreducibleであり、

$M_{p,q}(K)$がSeifert fibredの時、そのSeifert fibrationはup to isotopyでuniqueだから結果が従う。□

ここで、$M(K; q/p)$におけるexceptional fibreとclosed geodesic全体に先と同様にして"weight" wを定義できるが、このとき、K^*は$M(K; q/p)$においてunique minimal weightをもっている。

§4. 定理の証明

trivial knot K_1のq/p-Dehn surgeryで得られる多様体はlens space $L(q,p)$（$q=1$の時S^3, $q=0$の時$S^2 \times S^1$）であるから（[12]）、K_2がnon-trivial knotとすると、$(p,q) \in \mathbb{R}^2 - D(K_2)$に対して、$M(K_1; q/p) \neq M(K_2; q/p)$であるから、以下$K_1$, K_2はnon-trivialとする。

先ず、$M(K_1) = E(K_1)$ i.e. K_1はtorus knotかhyperbolic knotの場合を考える。K_1がtorus knotの時、$M(K_1; q/p) \overset{h}{\cong} M(K_2; q/p)$ $(p,q) \in \mathbb{R}^2 - D(K_1) \cup D(K_2)$だから、$K_2$もtorus knotであり、$K_i^*$は$M(K_i; q/p)$においてunique maximal indexのexceptional fibreとなっている。hはfibre preserving homeomorphismにhomotopicだから、$M(K_1; q/p)$から$M(K_2; q/p)$へのorientation preserving homeomorphismでK_1^*をK_2^*にうつすものが存在する。次に、K_1がhyperbolic knotとする。このときも、条件からK_2もhyperbolic knotであり、K_i^*は$M(K_i; q/p)$においてunique shortest closed geodesicになっている。Mostow

の剛体性定理より与えられたhomeomorphismはisometryにhomotopic。従って、$M(K_1;q/p)$から$M(K_2;q/p)$への orientation preserving homeomorphismでK_1^*をK_2^*にうつすものが存在する。

次に$M(K_1)\neq E(K_1)$ i.e. K_1が satellite knot の場合を考える。次の補題に注意する。

<u>補題4.1.</u> $(p,q)\in\mathbb{R}^2-D(K_1)\cup D(K_2)$に対して、$M(K_1;q/p)\cong M(K_2;q/p)$とする。$M(K_1)$がSeifert fibredならば$M(K_2)$もSeifert fibredである。

<u>証明</u> 補題3.1.より、$M(K_i;q/p)$のuniqueなtorus分解は$J(K_i)$によって与えられ、$h: M(K_1;q/p)\cong M(K_2;q/p)$は(ambient isotopyで修正することにより)torus分解を保つ(i.e. $h(J(K_1))=J(K_2)$)としてよい。

今、$w(K_1^*)=1/m$ (= unique minimal)とおく。$M(K_2)$がSeifert fibredでないとすると$M(K_2)$はhyperbolicであり、K_2^*はunique minimalなweightをもつ閉測地線となっている。hは$M_{p,q}(K_1)$を$M(K_2;q/p)$のあるSeifert fibred pieceにうつしているが(Seifert fibred manifoldは、体積有限のcomplete hyperbolic manifoldになりえない)、$h|_{M_{p,q}(K_1)}$はfibre preserving homeomorphismにisotopicだから$h(M_{p,q}(K_1))$はindex $1/m$のexceptional fibreをもつ。一方$w(K_2^*)$はunique minimalより$w(K_2^*)<1/m$であり、Mostowの剛体性定理より、$h^{-1}(\mathrm{int}\, M_{p,q}(K_2))$は$w(K_2^*)$の長さの

閉測地線が存在することになる。これは、K_i^* の weight が unique minimal であることに反する。よって、$M(K_2)$ は Seifert fibred。□

この補題より $M(K_1)$ が Seifert fibred ならば $M(K_2)$ も Seifert fibred であり、K_i^* は $M(K_i; q/p)$ における unique maximal index の exceptional fibre。従って、$M_{p,q}(K_1)$ は $M_{p,q}(K_2)$ にうつされ、$M_{p,q}(K_1)$ への制限は fibre preserving homeomorphism に isotopic だから、$M(K_1; q/p)$ から $M(K_2; q/p)$ への orientation preserving homeomorphism で K_1^* を K_2^* にうつすものが存在する。$M(K_1)$ が hyperbolic のとき、補題4.1. より $M(K_2)$ も hyperbolic で、K_i^* は $M(K_i; q/p)$ において unique shortest closed geodesic だから、$M_{p,q}(K_1)$ は $M_{p,q}(K_2)$ にうつされる。また、$M(K_1; q/p)$ から $M(K_2; q/p)$ への orientation preserving homeomorphism で、$M_{p,q}(K_1)$ の truncated space への制限が isometry になるものが得られるので、$M(K_1; q/p)$ から $M(K_2; q/p)$ への orientation preserving homeomorphism で K_1^* を K_2^* にうつすものが得られる。

以上より、定理の条件をみたすような Dehn surgery をした際に、$M(K_1; q/p) \cong M(K_2; q/p)$ ならば、$f: M(K_1; q/p) \xrightarrow{\cong} M(K_2; q/p)$ で $f(K_1^*) = K_2^*$ なるものが存在する。$M(K_i; q/p) - \mathrm{int}\, N(K_i^*)$ は、$S^3 - \mathrm{int}\, N(K_i)$ だから、f は $E(K_1)$ から $E(K_2)$ への orientation preserving homeomorphism f' を induce する。$f'(\lambda_1^p \mu_1^q) = (\lambda_2^p \mu_2^q)^\varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$ ((λ_i, μ_i) は $E(K_i)$ における longitude - meridian pair) で、

更に、longitude は knot exterior において homologically trivial だから $f'(\lambda_1)=\lambda_2^{\varepsilon'}$ $(\varepsilon'=\pm 1)$。ここで f' は orientation を保つから $\varepsilon\varepsilon'=1$ で $f'(\mu_1)=\mu_2^{\varepsilon''}$ $(\varepsilon''=\pm 1,\ \varepsilon\cdot\varepsilon''=1)$ を得る。こうして、S^3 から S^3 への orientation preserving homeomorphism で K_1 を K_2 にうつすものが得られる。 (証明終り)

Remark. 定理より cable knot を除いた prime knot はそれぞれの q/p - Dehn surgery で得られる多様体が無限個一致すれば、それらは同値であることがわかる。

証明および他の応用については [11] を参照して下さい。

References

[1] Brakes, W.R, : Manifolds with multiple knot-surgery descriptions, Proc. Cambridge Phil. Soc. 87 (1980), 443-448.

[2] C. McA. Gordon,: Dehn surgery and satellite knots, Trans. Amer. Math. Soc. 275 (1983), 687-708.

[3] W. Jaco,: Lectures on three-manifold topology, Conf. Board Math. Sci., 43 Amer. Math. (1977).

[4] W. Jaco - P. Shalen,: Seifer fibred space in 3-manifolds, Mem. Amer. Math. Soc., #220 (1979).

[5] K. Johannson,: Homotopy equivalences of 3-manifolds

with boundaries, Lecture Notes in Math., #761 (1979).

[6] S. Kojima,: Bounding finite groups acting on 3-manifolds, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 96 (1984), 269-281.

[7] S. Kojima,: Determing knots by branched covers, to appear in the Proceedings of symposia at Warwick and Dunham, edited by D.B.A. Epstein. (1986).

[8] W. Lickorish,: Surgery on knots, Proc. of Amer. Math. Sci. 60 (1976).

[9] C. Livingston,: More 3-manifolds with multiple knot-surgery and branched-cover descriptions, Math. Proc. Camb. Phil. Sci. 91 (1982), 473-475.

[10] J. Morgan - H. Bass,: The Smith conjecture, Pure and Applied Math. Academic Press. (1984).

[11] K. Motegi,: Dehn surgered manifolds and knots, preprint.

[12] D. Rolfsen,: Knots and links, Mathematics Lecture Series, No.7, Publish or Perish, Berkley, Calif., 1976.

[13] W. Thurston,: The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Note, Princeton University. (1978).