数理解析研究所講究録
第625巻 1987年 71-79

整礎集合上の部分関数の有限微分閉包について

新潟大学経済学部　西澤輝泰
(Teruyasu Nishizawa)

§0. はじめに

与えられた部分関数 ω から，それが含む帰納的構造を抽出しこれを拡張して ω の自然な拡張である関数 $\tilde{\omega}$ を得ようとすることは，帰納的推論の本質的要素であろう。帰納的構造は単純なものから複雑なものまで種々あり得るが，本論文では，最も単純なものとして有限木オートマトン的な構造を抽出する方法を提示する。

§1. 部分関数に関する記法

部分関数 $\varphi : A \to B$ について，φ の定義域を $D(\varphi)$ で表す。即ち $D(\varphi) = \{ x \in A ; (\exists y \in B)\ \varphi(x) = y \}$ である。

$X \subset A$ に対し，$\varphi(X) = \{ y \in B ; (\exists x \in X \cap D(\varphi))\ \varphi(x) = y \}$ とおく。また，$y \in B$ に対し，$\varphi^{-1}(y) = \{ x \in D(\varphi) ; \varphi(x) = y \}$ とし，$Y \subset B$ に対し，$\varphi^{-1}(Y) = \bigcup_{y \in Y} \varphi^{-1}(y)$ とする。

2つの部分関数 φ, ψ について,

$$(\forall x \in D(\varphi))\,[\,x \in D(\psi) \wedge \varphi(x) = \psi(x)\,]$$

となっているとき, φ は ψ の制限, ψ は φ の拡張であるといい, $\varphi \sqsubset \psi$ と表す。

空でない集合 $\overline{W}$ について, $\overline{W} \to \overline{W}^m$ の部分関数すべてからなる族を $\Pi_m(\overline{W})$ で表す。$m=0$ も許容し, $\overline{W}^0$ は仮空の要素 ε 唯1つからなる集合 $\{\varepsilon\}$ であるとする。$\vec{f} \in \Pi_m(\overline{W})$ について, m を $d(\vec{f})$ で表す。

$\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ は,

$$d(\vec{f}) = m \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} [\, f_i \in \Pi_1(\overline{W}) \wedge D(f_i) = D(\vec{f}) \,]$$
$$\wedge\ (\forall x \in D(\vec{f}))\ \vec{f}(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$$

なることを表す。

$$\Pi(\overline{W}) = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Pi_m(\overline{W}) \qquad \text{とおく。}$$

§2. 部分関数による部分関数の微分

集合 $\overline{W}$ 上の部分関数 ω が $\vec{f} \in \Pi(\overline{W})$ により微分可能とは,

$$(\forall x, y \in D(\vec{f}) \cap D(\omega))\,[\,\vec{f}(x) = \vec{f}(y) \longrightarrow \omega(x) = \omega(y)\,]$$

が成り立つことをいう。次のことが明らかである。

(1) $\vec{f}$ が1対1なら, 任意の ω が $\vec{f}$ により微分可能。

(2) $\vec{f}$ が $D(\vec{f}) \cap D(\omega)$ 上一定値をとるならば, ω も

$D(\vec{f}) \cap D(\omega)$ 上一定値をとるとき、かつそのときに限り ω は $\vec{f}$ により微分可能である。

部分関数 $\omega : \overline{W} \to A$ が $\vec{f} \in \Pi_m(\overline{W})$ により微分可能であるとき、その微分 $\partial_{\vec{f}}\omega$ は $\overline{W}^m \to A$ の部分関数として次のように定められる。

$$(\partial_{\vec{f}}\omega)(\vec{x}) = a \longleftrightarrow (\exists y \in D(\vec{f}) \cap D(\omega))\left[\vec{f}(y) = \vec{x} \wedge \omega(y) = a\right]$$

即ち、$D(\partial_{\vec{f}}\omega) = \vec{f}(D(\omega))$ であり、$\vec{x} \in D(\partial_{\vec{f}}\omega)$ に対し $\{\partial_{\vec{f}}\omega(\vec{x})\} = \omega(\vec{f}^{-1}(\vec{x}))$ である。ω が関数でかつ $\vec{f}$ が onto であれば $\partial_{\vec{f}}\omega$ も関数になる。

ω が $\vec{f} \in \Pi_0(\overline{W})$ で微分可能のときは、$\partial_{\vec{f}}\omega$ は未定義要素または定数であって、$\{\partial_{\vec{f}}\omega\} = \omega(D(\vec{f}))$ である。

§3. 場合分け変換

$\mathfrak{F} \subset \Pi(\overline{W})$ について、次の(1),(2)が成りたつとき、$\mathfrak{F}$ は $\overline{W}$ 上の場合分け変換であるという。

(1) $\mathfrak{F}$ は有限集合

(2) $\{D(\vec{f})\,;\ \vec{f} \in \mathfrak{F}\}$ が $\overline{W}$ の分割を構成する。即ち、

$$(\forall \vec{f} \in \mathfrak{F})\ D(\vec{f}) \neq \phi \wedge \bigcup_{\vec{f} \in \mathfrak{F}} D(\vec{f}) = \overline{W}$$
$$\wedge\ (\forall \vec{f}, \vec{g} \in \mathfrak{F})\left[\vec{f} \neq \vec{g} \longrightarrow D(\vec{f}) \cap D(\vec{g}) = \phi\right].$$

特に $\overline{W}$ が半順序 $\prec$ に関して整礎集合で、任意の $\vec{f} \in \mathfrak{F}$ について $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ とするとき、

$\bigwedge_{i=1}^{m} (\forall x \in D(\vec{f}))\ f_i(x) \precneqq x$ が成り立つならば，$\mathfrak{F}$ は場合分け降下変換である，という。

W 上の部分関数 ω が W 上の場合分け変換 $\mathfrak{F}$ により微分可能である，とは ω が $\mathfrak{F}$ の任意の元により微分可能であることをいう。このとき，

$$\bigvee_{\vec{f}\in\mathfrak{F}} (x \in D(\vec{f}) \wedge \omega(x) = (\partial_{\vec{f}}\omega)(\vec{f}(x)))$$

が任意の $x \in D(\omega)$ について成り立つ。

§4. 部分関数の有限微分閉包

H を $A^m \to A$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ の関数からなる有限集合とする。$W \to A$ の部分関数 $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$ と W 上の場合分け変換 $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \cdots, \mathfrak{F}_n$ とからなる系

$\Gamma = \{H; \omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n; \mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \cdots, \mathfrak{F}_n\}$ は次のことが成りたつとき有限微分閉包をなす，という。即ち，各 $i = 0, 1, \cdots, n$ について ω_i が $\mathfrak{F}_i$ で微分可能で，任意の $\vec{f} \in \mathfrak{F}_i$ に対し，$d(\vec{f}) = m$ とするとき，H の元 $h: A^m \to A$ と番号 $j_1, \cdots, j_m \in \{0, 1, \cdots, n\}$ が存在して，任意の $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \vec{f}(D(\omega_i))$ に対し，

$(\partial_{\vec{f}}\omega_i)(\vec{x}) = h(\omega_{j_1}(x_1), \cdots, \omega_{j_m}(x_m))$ となる。

この関係を $\partial_{\vec{f}}\omega_i = h\langle\omega_{j_1}, \cdots, \omega_{j_m}\rangle$ と略記する。

ここでもし W が整礎集合で，$\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \cdots, \mathfrak{F}_n$ が

場合分け降下変換であるときは，Γは停止性の有限微分閉包をなすという。

さて，$\Gamma=\{H;\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n;\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_n\}$ を停止性の有限微分閉包とする。このとき，

$$
\left.\begin{array}{l} i=0 \\ \\ \\ n \end{array}\right\{
\begin{array}{l}
\bigvee_{\vec{f}\in\mathcal{F}_i}\left(x\in D(\vec{f})\wedge\ \tilde{\omega}_i(x)=h(\tilde{\omega}_{j_1}(f_1(x)),\cdots,\tilde{\omega}_{j_m}(f_m(x)))\right) \\
\qquad\qquad (\text{ただし，} \vec{f}=(f_1,\cdots,f_m),\ \partial_{\vec{f}}\,\omega_i=h\langle\omega_{j_1},\cdots,\omega_{j_m}\rangle)
\end{array}
$$

なる事により，（もし $d(\vec{f})=0$ なる任意の $\vec{f}$ に対し $\partial_{\vec{f}}\omega_i$ が未定義でなければ，）W 上の関数 $\tilde{\omega}_0,\tilde{\omega}_1,\cdots,\tilde{\omega}_n$ が定まり，明らかに $\bigwedge_{i=0}^{n}(\omega_i\sqsubset\tilde{\omega}_i)$ である。この $\tilde{\omega}_0,\tilde{\omega}_1,\cdots,\tilde{\omega}_n$ を，$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$ から Γ によって定まる関数である，という。もし $\mathcal{F}_0,\cdots,\mathcal{F}_n$ の元と H の元の計算法が与えられていれば上記の事は $\tilde{\omega}_0,\tilde{\omega}_1,\cdots,\tilde{\omega}_n$ を計算する再帰プログラムである。$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$ が関数である場合は，これらを計算する再帰プログラムである。

§5. 部分関数の木集合による表現

$\Gamma=\{H;\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n;\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_n\}$ を停止性の有限微分閉包とする。$\mathcal{F}=\bigcup_{i=0}^{n}\mathcal{F}_i$ とおく。$\mathcal{F}$ の元を節点の名札とし，$\vec{f}$ を名札とする節点の子の個数が $d(\vec{f})$ に等しいような有限木すべての集合を $T_{\mathcal{F}}$ とする。$\tau\in T_{\mathcal{F}}$ について，

τ の root の名札を $\mathrm{root}(\tau)$，また τ の高さを $\mathrm{height}(\tau)$ で表すとして，$i=0,1,\cdots,n$ に対し $T_{\mathcal{F}}$ の部分集合 T_i を次により定める。ただしここで，$\tau \in T_{\mathcal{F}}$，$\mathrm{root}(\tau)=\vec{f}$，$d(\vec{f})=m$ とする。

(1) $\mathrm{height}(\tau)=0$ （即ち $m=0$）のとき，

$$\tau \in T_i \longleftrightarrow \vec{f} \in \mathcal{F}_i$$

(2) $\mathrm{height}(\tau)>0$ （即ち $m>0$）のとき，

$\tau = \vec{f}\langle \tau_1, \cdots, \tau_m \rangle$，$\mathrm{root}(\tau_j)=\vec{f}_j$ $(j=1,\cdots,m)$，

$\partial_{\vec{f}}\,\omega_i = h\langle \omega_{k_1}, \cdots, \omega_{k_m} \rangle$ として，

$$\tau \in T_i \longleftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{m} \tau_j \in T_{k_j}$$

即ち，$T_0, T_1, \cdots, T_n$ は，$\mathcal{U}_i = \{ \vec{f} \in \mathcal{F}_i \,;\, d(\vec{f})=0 \}$ とおいて，木集合方程式系

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i = \bigcup_{\vec{f} \in \mathcal{F}_i} \vec{f}\langle T_{k_1}, \cdots, T_{k_m} \rangle \cup \mathcal{U}_i \\ \quad (\text{ただし，} d(\vec{f})=m,\ \partial_{\vec{f}}\,\omega_i = h\langle \omega_{k_1}, \cdots, \omega_{k_m} \rangle) \end{array} \right. \quad (i=0,\cdots,n)$$

の唯一解として定まる正規木集合である。

さて，Γ による $\omega_i(x)$ の計算過程は次により定められる木 $\mathrm{rep}_i(x) \in T_{\mathcal{F}}$ により表現される。ただし $x \in D(\omega_i)$ とする。

(1) $x \in D(f)$，$\vec{f} \in \mathcal{F}_i$，$d(\vec{f})=0$ のとき，

$rep_i(x) = \vec{f}$

(2) $x \in D(\vec{f})$, $\vec{f} \in \mathcal{F}_i$, $d(\vec{f}) = m > 0$ のとき,

$$rep_i(x) = \vec{f}\langle rep_{k_1}(f_1(x)), \ldots, rep_{k_m}(f_m(x))\rangle$$

(ただし, $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, $\partial_{\vec{f}}\omega_i = h\langle \omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_m}\rangle$)

$\tilde{T}_i = \{ rep_i(x) ; x \in D(\omega_i) \}$ とおく。$\tilde{T}_i$ は部分関数 ω_i を表現する木集合である。$\tilde{T}_i \subset T_i$ は明らかであるが, 特に $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ が関数であって, $d(\vec{f}) > 0$ なる すべての $\vec{f} \in \mathcal{F}$ が onto である場合は $\partial_{\vec{f}}\omega_j$ が関数であるので $\tilde{T}_i = T_i$ となって, ω_i は正規木集合により表現される。更にこのとき A が有限集合であれば, 任意の $a \in A$ について $\tilde{T}_i^a = \{ rep_i(x) ; x \in \omega_i^{-1}(a) \}$ も正規木集合となる。

§6. 単純微分閉包

停止性の有限微分閉包 $\Gamma = \{H ; \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n ; \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$ において, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 = \cdots = \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ であり, かつ $d(\vec{f}) > 0$ なる任意の $\vec{f} \in \mathcal{F}$ が onto であるとき, Γ は単純微分閉包であるといい, $\Gamma = \{H ; \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n ; \mathcal{F}\}$ と略記する。このとき, §4 の $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n$ を計算する再帰プログラムは, root-to-frontier の出力つき木オートマトンとみなせる。即ち,

(1) このオートマトンの状態は $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \cdots, \tilde{\omega}_n$.

(2) $\vec{f} \in \mathfrak{F}$, $d(\vec{f}) = m$, $\partial_{\vec{f}} \omega_i = h < \omega_{k_1}, \cdots, \omega_{k_m} >$ とすると，計算状況の遷移は次のようになる。

$m > 0$ のとき，

$$(\tilde{\omega}_i, \vec{f} < \tau_1, \cdots, \tau_m >) \xrightarrow[\text{出力}h]{} \{(\tilde{\omega}_{k_1}, \tau_1), \cdots, (\tilde{\omega}_{k_m}, \tau_m)\}$$

$m = 0$ のとき，

$$(\tilde{\omega}_i, \vec{f}) \xrightarrow[\text{出力}h]{} \cdot \quad \text{（即ち } h \text{ を出力して停止する.）}$$

特に，任意の $\vec{f} \in \mathfrak{F}$ について $d(\vec{f}) \leqq 1$ のときは，この遷移を次のように表して全体を図示することができる。即ち，

$d(\vec{f}) = 1$ なる $\vec{f} \in \mathfrak{F}$ に対し，$\partial_{\vec{f}} \omega_i = h < \omega_j >$ として，

$\tilde{\omega}_i \xrightarrow[\vec{f}/h]{} \tilde{\omega}_j$ ， また $d(\vec{f}) = 0$ なら，$\tilde{\omega}_i \xrightarrow[\vec{f}/h]{} \cdot$

今，特にアルファベット Σ をとって $\mathfrak{W} = \Sigma^*$ とし，$\mathfrak{F}$ を，

$\mathfrak{F} = \{null\} \cup \{f_\sigma ; \sigma \in \Sigma\}$; $d(null) = 0$, $D(null) = \{\varepsilon\}$,

$d(f_\sigma) = 1$, $D(f_\sigma) = \sigma \cdot \Sigma^*$, $f_\sigma(\sigma \cdot x) = x$ なるものとすると，$\mathfrak{W}$ 上の任意の（部分）関数は $\mathfrak{F}$ で微分可能である。このとき，$\partial_{null} \omega$ を $\partial_\varepsilon \omega$ で，また $\partial_{f_\sigma} \omega$ を $\partial_\sigma \omega$ で表し，$\partial_{\sigma_k}(\partial_{\sigma_{k-1}}(\cdots(\partial_{\sigma_1}(\partial_\varepsilon \omega))\cdots))$ を $\partial_{\sigma_1 \cdots \sigma_k} \omega$ と表す。更にこのとき，アルファベット Δ に対し，$A = \Delta^*$ とし，$\tilde{\Delta}^* = \{h_y ; y \in \Delta^*\}$; $h_y(z) = yz$ とおいて，単純微分閉包 $\Gamma = \{H ; \omega_0, \cdots, \omega_n ; \mathfrak{F}\}$ を $H \subset \tilde{\Delta}^* \cup \{\varepsilon\}$（ただし任意の $\omega : \mathfrak{W} \to A$ に対し，$\partial_\varepsilon \omega = \varepsilon$）なるように

定めると，Γの定める再帰プログラムは一般系列機械（gsm）になる。即ち，$\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n$ は gsm 写像となる。また，$\tilde{W}$ と $\tilde{\Omega}$ をこれと同じにとり，A を有限集合とし，$H = A \cup \{id\}$（ただし id は $A \to A$ の恒等写像）とすると，単純微分閉包 Γの定める再帰プログラムは Moore 型系列機械（状態のみに依存する出力を出す有限オートマトン）で，状態 $\tilde{\omega}_i$ での出力は $\partial_\varepsilon \omega_i$ である。（$\partial_\varepsilon \omega_i$ が未定義の場合は，任意に値を設定すればよい。）このとき任意の関数 $\omega : \Sigma^* \to A$ と任意の $x \in \Sigma^+$，$y \in \Sigma^*$ に対し，$(\partial_x \omega)(y) = \omega(xy)$，$\partial_\varepsilon \omega = \omega(\varepsilon)$ である。

参考文献

1. T. Nishizawa, Automaton Programs and Regular Functional Expressions – On An Extension of Derivatives, Bull. Informatics and Cybernetics, vol.21, No.1~2, Research Assoc. of Statistical Sci., 1984
2. 西澤輝泰，述語の微分について（その3），京大数理解析研究所講究録 591号，1986
3. 西澤輝泰，述語の微分について，電子通信学会技術研究報告，vol.86，No.60（コンピュテーション研究会），1986