数理解析研究所講究録
第 625 巻 1987 年 80-86



# 有限環上の線形セル構造オートマトン

東洋大学工学部　情報工学科　　佐　藤　忠　一

## 1．　まえがき

有限可換環上の線形セル構造オートマトンの研究にはイデアル論的なアプローチが不可欠であるが［４，８］、有限環上の場合はもはやイデアル論的手法は直接的にはあまり役に立たない。しかし有限環上の線形局所関数の単射性に関する問題は有限体の元を成分に持つ行列環上の問題に帰着されるので、ここでは、一般に有限可換環の元を成分に持つ行列環上の線形セル構造オートマトンについて考察し、その単射性、全射性の問題は、その線形局所関数の行列表現の行列式を取ることによりそれを有限可換環上の線形局所関数の多項式表現とみなして、再びイデアル論的な手法を用いて議論できることを示す。また、位数有限性についてはその行列表現の固有方程式を調べることにより議論できることを示す。

最後にこれらの結果を有限可換環上の周期的な線形ポリオートマトンの解析に応用する。

## 2．　準備

有限環Ｒ上の線形セル構造オートマトンは（$Z^K$，Ｒ，Ｎ，ｆ）で与えられ、
Ｚは整数の集合、$Z^K$はＫ次元セル空間、Ｒは各セルが取り得る状態の集合で有限環、
Ｎは$Z^K$の有限部分集合で、$N=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。Ｎは近傍を表す。
ｆは、$R^n \to R$なる線形写像で$f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$である。ｆはスコープ幅ｎの線形局所関数と呼ばれる。$Z^k$からＲへの写像を様相という。様相の集合をＣ（Ｒ）で表す。
ｆに対して、写像　$f_\infty : C(R) \to C(R)$ を次のように定める。

$x, y \in C(R)$ に対して、

$$f_\infty(x)=y \iff y(r)=\sum_{j=1}^{n} a_j x(r+v_j)$$

ここで、$r+v_1$，・・・，$r+v_n$、なるn個のセルは、セル$r \in Z^k$の近傍と呼ばれる。$f_\infty$を線形並列写像又は線形全域関数と言う。

以下では簡単のため２次元の線形セル構造オートマトンについて考える。（n次元の場合も同様である。）又、R上の線形局所関数の全体をL（R）とする時、半群L（R）の表現$\mu$とはL（R）から$R[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}]$への準同型写像である。

**定義１**

| | | |
|---|---|---|
| fがR上で単射 | $\Longleftrightarrow$ | $f_\infty$がC（R）上で単射 |
| fがR上で全射 | $\Longleftrightarrow$ | $f_\infty$がC（R）上で全射 |
| $f_\infty$がR上で位数有限 | $\Longleftrightarrow$ | $^\exists n>0$、C（R）上で$f_\infty^n=I$（Iは恒等写像） |
| $f_\infty$がR上で位数無限 | $\Longleftrightarrow$ | $f_\infty$はC（R）上で単射かつ $^\forall n$、$f_\infty^n \neq I$ |
| fがR上で位数有限 | $\Longleftrightarrow$ | $^\exists$近傍N、$f_\infty$がC（R）上で位数有限 |
| fがR上で位数無限 | $\Longleftrightarrow$ | $^\forall$近傍N、$f_\infty$がC（R）上で位数無限 |

３．　R上の線形局所関数の単射性、全射性

有限環Rのすべての左極大イデアルを$A_1, A_2, \cdots, A_\ell$とし、Rの根基をradRで表す。（$\mathrm{rad}R=\bigcap_{i=1}^{\ell} A_i$）radRは、Rの最大のベキ零イデアルでR／radRは根基を持たない環、即ち、rad（R／radR）＝{0}となり半単純環である。

**補題１**　IをI ⊆ radRなるRの任意の両側イデアルとする時、R上の線形局所関数fに対して次の各命題が成立する。

（１）　fはR上で単射 $\Longleftrightarrow$ fはR／I上で単射 $\Longleftrightarrow$ fはR／radR上で単射

（２）　fはR上で位数有限 $\Longleftrightarrow$ fはR／I上で位数有限 $\Longleftrightarrow$ fはR／radR上で位数有限

（３）　fはR上で位数無限 $\Longleftrightarrow$ fはR／I上で位数無限 $\Longleftrightarrow$ fはR／radR上で位数無限

**命題１**　有限環Ｒに対してＲ／ｒａｄＲは有限体$F_1$，$F_2$，・・，$F_k$ が存在して
$R/\mathrm{rad}R \simeq M_{n_1}(F_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(F_k)$
ここで$M_{n_i}(F_i)$は$F_i$上の$n_i$次の完全行列環である。

補題１、命題１よりＲ上の線形局所関数の単射性、位数有限性及び位数無限性の問題は有限体の元を成分に持つ行列環上の問題に帰着される。即ちＲ／ｒａｄＲ上のｆを各$M_{n_i}(F_i)$上に分解し、$f=(f_1, \cdots, f_k)$とすると次の補題２、補題３が成立する。

**補題２**　Ｒを有限環とする。この時次の各命題はすべて等価である。
（１）　ｆはＲ／ｒａｄＲ上で単射である
（２）　各ｉ（$1 \leqq i \leqq k$）に対して$f_i$は$M_{n_i}(F_i)$上で単射である
（３）　各ｉ（$1 \leqq i \leqq k$）に対して$\det(\mu f_i)$は$F_i$上の単項式である

**補題３**　Ｒを有限環とする。この時次の各命題はすべて等価である。
（１）　ｆはＲ／ｒａｄＲ上で位数有限である
（２）　各ｉ（$1 \leqq i \leqq k$）に対して$f_i$は$M_{n_i}(F_i)$上で位数有限でかつ
$(\mu f_i)^{m_i} = X^{s_i} Y^{t_i} I$　の時次式が成立する（Ｉは単位行列）
$s_1/m_1 = s_2/m_2 = \cdots = s_k/m_k$　かつ
$t_1/m_1 = t_2/m_2 = \cdots = t_k/m_k$
（３）　各ｉ（$1 \leqq i \leqq k$）に対して$f_i$は$M_{n_i}(F_i)$上で位数有限でかつ
$\det(\mu f_i) = X^{s_i} Y^{t_i}$の時次式が成立する
$s_1/n_1 = s_2/n_2 = \cdots = s_k/n_k$　かつ
$t_1/n_1 = t_2/n_2 = \cdots = t_k/n_k$

**補題４**　Ｒを有限環とする。この時次の各命題はすべて等価である。
（１）　ｆはＲ／ｒａｄＲ上で全射である
（２）　各ｉ（$1 \leqq i \leqq k$）に対して$f_i$は$M_{n_i}(F_i)$上で全射である
（３）　各ｉ（$1 \leqq i \leqq k$）に対して$\det(\mu f_i) \neq 0$

有限体は有限可換体であるから、一般に有限可換環上の行列環で議論する。今Rを有限可換環とし、$M_n$（R）上の線形セル構造オートマトン及びR－加群$V_n(R)=R\oplus\cdots\oplus R$　（Rによるn個の直和）上の線形セル構造オートマトンについて考える。両者ともその局所関数　$f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$　の$a_j$は$M_n$（R）の元であるが$x_j$の方は前者は$M_n$（R）の元であるが後者は$V_n$（R）の元である。

<u>定理１</u>　Rを有限可換環とする。行列環$M_n$（R）上の線形局所関数ｆに対して次の各命題は等価である。

（１）　ｆは$M_n$（R）上で単射である

（２）　ｆは$V_n$（R）上で単射である

（３）　$\det(\mu f)$はR$[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}]$の単元である

（４）　$\det(\mu f)$をR上のある線形局所関数の多項式表現とみなして単射である

（５）　$\mu(f)$は$M_n(R[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}])$において正則行列である

<u>定理２</u>（佐藤，藤原）Rを有限可換環とする。ｆを$M_n$（R）上の線形局所関数とし、$\mu(f)$をその表現とする。この時次の各命題はすべて等価である。

（１）　ｆは$M_n$（R）上で位数有限である

（２）　ｆは$V_n$（R）上で位数有限である

（３）　$\mu(f)$の固有方程式はR上で次の形をしている

$$\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}[a_{n-j}(X^sY^t)^j+\beta_{n-j}]\lambda^{n-j}$$

ここで　$a_{n-j}\in R$，$a_0$はRの単元，$\beta_{n-j}\in \mathrm{rad}R[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}]$

（４）　ｆは$M_n(R)/\mathrm{rad}M_n(R)$上で位数有限である

（５）　$\mu(f)$の固有方程式は$R/\mathrm{rad}R$上で次の形をしている

$$\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}a_{n-j}(X^sY^t)^j\lambda^{n-j}$$

ここで　$a_{n-j}\in R/\mathrm{rad}R$，$a_0$は$R/\mathrm{rad}R$の単元

（６）　$A_1,\cdots,A_\ell$をRの極大イデアルとする。$\mu(f)$の固有方程式は各$R/A_i$（$i=1,2,\cdots,\ell$）上で次の形をしている

$$\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}a_{n-j}(X^sY^t)^j\lambda^{n-j}$$

ここで　$a_{n-j} \in R/A_i$，$a_0 \neq 0$，$s$，$t$ は $i$ に無関係な整数

<u>定理３</u>　Ｒを有限可換環とする。この時次の各命題はすべて等価である。

（１）　$f$ は $M_n(R)$ 上で全射である

（２）　$f$ は $V_n(R)$ 上で全射である

（３）　$\det(\mu f)$ はＲ上のある線形局所関数の多項式表現とみなして全射である

<u>定理４</u>　Ｒを有限可換環とする。$f$ を $M_n(R)$ 上の全射である線形局所関数とし $|\ker f_\infty|$ を $\|f\|$、又は、$\|\mu(f)\|$ で表す。
この時次の各命題が成立する。

（１）　$M_n(R)$ 上の $f$ に対して $\|f\| = \|\det(\mu f)\|^n$

（２）　$V_n(R)$ 上の $f$ に対して $\|f\| = \|\det(\mu f)\|$
ここで $\|\det(\mu f)\|$ は $\det(\mu f)$ をＲ上のある線形局所関数の多項式表現とみなした時その全域関数のｋｅｒｎｅｌの濃度である

<u>系１</u>　Ｒを有限環とする。２次元以上のセル空間において $f$ がＲ上の全射である線形局所関数の時、$\|f\| < \infty$ なるための必要十分条件は $f$ がＲ上で単射になることである

## ４．　線形ポリオートマトンへの応用

有限可換環Ｒ上の周期的な線形ポリオートマトンについて考察する。以下の議論に必要な定義、記法については簡単のため１次元セル空間の場合を与えるがそれらは容易に一般次元に拡張できる。

周期ｎの線形ポリオートマトンとは４項組 $T = (Z, R, f, n)$ である。ここでＺは整数の集合でセルの集合を表し、Ｒは各セルの状態を表す有限可換環、$f$ は $f = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}) \in L(R) \times \cdots \times L(R) = L^n(R)$ で、各 $f_i$ はセルに作用するＲ上の線形局所関数である。

ＺからＲへの写像を様相といいＲ上のすべての様相の集合を $C(R)$ と書く。
$f = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$ に対して並列写像 $f_\infty : C(R) \to C(R)$ を次

のように定義する。

$f_\infty(x) = y \Leftrightarrow y(i+nt) = f_i(x(i+nt), x(i+nt+1), \cdots, x(i+nt+n_i-1))$

ここで$n_i$は$f_i$のスコープ幅で$i \in Z_n$, $t \in Z$, $x$, $y \in C(R)$である。又、$f \in L^n(R)$の単射性、全射性は定義1と同じ意味で使う。又、$f$が位数有限とは$\exists n>0$に対して$f_\infty^n$が恒等写像のシフトになっている時に言う。$f$が位数無限とは $f$が単射でかつ位数有限でない時に言う。

半群$L^n(R)$の表現$\mu$とは$L^n(R)$から$M_n(R[X, X^{-1}])$への準同型写像である。

<u>注意1</u>　$n=1$の時、Tは線形セル構造オートマトンと一致し、$\mu$はその局所関数の多項式表現となっている。すなわち、上記の表現$\mu$は大里[3]の与えた多項式表現の一般化である。

<u>定理5</u>（佐藤，中村）[6]　$f=(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}) \in L^n(R)$に対して　$f_i = \sum_{j=0}^{n_i-1} a_{ij} x_j$,　$a_{ij} \in R$
とする。ここで、$i \in Z_n$に対して、$n_i$は$f_i$のスコープ幅である。この時、$f$の表現$\mu(f)$は次のように与えられる。

$$\mu(f) = \begin{pmatrix} F_{00}(X), & F_{01}(X), & \cdots\cdots, & F_{n-1,n-1}(X) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{n-1,0}(X), & F_{n-1,1}(X), & \cdots, & F_{n-1,n-1}(X) \end{pmatrix}$$

ここで、$F_{ij}(X) = \sum a_{i, h_n(j-i)+kn} X^{h_n(j-i)+kn}$

また、$\Sigma$の和は$h_n(j-i)+kn \leqq n_i - 1$を満たす範囲内である。

但し、$h_n$は$h_n : Z \to Z_n$なる準同型写像である。

定理５より、Ｒ上の周期ｎの線形ポリオートマトンはＲ－加群$V_n$（Ｒ）上の線形セル構造オートマトンであるから、前節の結果が適用され次の系を得る。

系２　有限可換環Ｒ上の周期的線形ポリオートマトンの $f \in L^n$（Ｒ）に対して、ｆの単射性、位数有限性、位数無限性及び全射性はすべて決定可能である。

参考文献


［１］　ファン・デル・ベルデン：現代代数学３，東京図書
［２］　バーコフ，マックレーン：現代代数学概論，白水社
［３］　大里延康：テセレーションオートマトンに関する研究，東北大学修士論文　１９７６年3月
［４］　佐藤忠一：線形セル構造オートマトンのイデアル論的アプローチ，京都大学数理解析研究所講究録　４５８　１９８２年
［５］　中村勝己：線形ポリオートマトンに関する研究，東洋大学卒業論文　１９８３年3月
［６］　佐藤忠一：線形ポリオートマトンにおける局所関数の行列表現，東洋大学工学部研究報告　１９８３年
［７］　藤原文雄：行列環上における線形局所関数の位数有限に関する研究　東洋大学卒業論文　１９８４年3月
［８］　佐藤忠一：線形セル構造オートマトンのイデアル論的アプローチⅡ，京都大学数理解析研究所講究録　５２２　１９８４年