数理解析研究所講究録
第625巻 1987年 226-236

重み付 positive submodular system の辞書式最適基を得るための貪欲アルゴリズムについて

城西大 理　岩村 覚三 (Kakuzō Iwamura)
城西大 理　出口 洋三 (Yōzō Deguchi)
城西大 理　中山 隆 (Takashi Nakayama)

この小論では [1] の拡張を目的とする。すなわち mathematical programming 問題として眺めたとき，その計算の複雑度が $O(k^2|\mathcal{D}|)$ で評価できるような点列を構成することについて述べる。

1．定義および記号

Eを有限集合，2^E をEの部分集合族の全体からなる集合とする。Eの部分集合族のあつまりである $\mathcal{D}$ は，束としての合併集合および共通集合をとる演算に関して分配束をなすものとする。また $\mathcal{D}$ から R への実数値関数 f が，$\mathcal{D}$ 上で

$$\forall X, Y \in \mathcal{D},\quad f(X)+f(Y) \geqq f(X\cup Y)+f(X\cap Y)$$

を満たすとき，サブモデュラー関数であるといわれる。

この $\mathcal{D}$ と f との組を $(\mathcal{D}, f)$ で表わして，サブモデュラー

システムとよぶ。そして f を $(\mathcal{D}, f)$ のランク(rank)関数という。以下この小論を通して

$$\mathcal{D} \subseteq 2^E, \quad \phi \in \mathcal{D}, \quad E \in \mathcal{D}, \quad f(\phi) = 0$$

$\forall A (\neq \phi) \in \mathcal{D}$ に対して，つねに $f(A) > 0$

が成立つものとする．

いま $(\mathcal{D}, f)$ をひとつ与えたとき，サブモデュラー多面体(submodulor polyhedron) $P(f)$ を

$$P(f) = \{ x \in R_+^E \mid \forall X \in \mathcal{D} : x(X) \leq f(X) \}$$

ここで $x(X) = \sum_{e \in X} x(e)$, $R_+ = \{ x \in R \mid x \geqq 0 \}$

で，また基多面体(base polyhedron) $B(f)$ を

$$B(f) = \{ x \in P(f) \mid x(E) = f(E) \}$$

で定義する。$B(f)$ 内のベクトルのことを $(\mathcal{D}, f)$ の基(base)ということにする。[3]

R_+^E の任意の実点列 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$, $b = (b_1, b_2, \cdots b_k)$ に対して $|E| = k$ のもとで，ある番号 $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ が存在して $a_i > b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, j-1)$，あるいは $a_i = b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ が成立つとき，a は辞書式順序に照して b より大きい，または等しいという。また $w(e) > 0$ $(\forall e \in E)$ なる1つのベクトル $w \in R_+^E$ を重み(ベクトル)とよぶ。またあるベクトル $x \in R_+^E$ に対し，その絶対値が増加する向きに並べられた $|E|$ 個の $x(e)$ 列を $T(x)$ で表わすこ

とにする。さらにひとつの重みwが与えられたとき，次の条件（＃）を満たすような（$\mathcal{D}$，f）の１つの基ベクトルxのことを重みw付辞書式最適基ということにする。

条件（＃）

$|E|$-tuple $T((x(e)/w(e))_{e \in E})$が辞書式順序として最大（実際には極大）である。

また$x \in P(f)$に対し，飽和関数（saturation function）Sat(x)を

$$\mathrm{sat}(x) = \{ u \in E \mid \forall \alpha > 0,\ x + \alpha \chi_u \in P(f) \}$$

ここで　$\chi_u(u) = 1,\ \chi_u(e) = 0 \quad (e \in E - u)$

で定義すると

$$\mathrm{sat}(x) = \cup \{ A \mid A \in \mathcal{D},\ x(A) = f(A) \}$$

$$\mathrm{sat}((0,0,0,\cdots,0)) = \phi\ [1,2,3]$$

が得られる。

2．貪欲アルゴリズム

step 0 : $i \leftarrow 0$, $c_1 = \min\{ f(A)/w(A) \mid \phi \neq A \in \mathcal{D} \}$

$u_{c_1}(e) \longleftarrow c_1 w(e) \quad (e \in E)$

step 1 : $i \leftarrow i + 1$

if $\mathrm{sat}(u_{c_i}) = E$ then STOP

otherwise

$\varepsilon_i \leftarrow \min\{ (f(A) - u_{c_i}(A)) / (w(A \setminus \mathrm{sat}(u_{c_i})) \mid$

$$A \in \mathcal{D},\quad A \setminus sat(u_{c_i}) \neq \phi \},$$

$c_{i+1} = c_i + \varepsilon_i$

for $e \in E$

if $e \in sat(U_{c_i})$ then

$u_{c_{i+1}}(e) = u_{c_i}(e)$

else

$u_{c_{i+1}}(e) = u_{c_i}(e) + \varepsilon_i w(e)$

endif

GO TO step 1

このアルゴリズムの有効性については例えば［4］を参照のこと。

計算時間の複雑度については

step 0　　$O(k|\mathcal{D}|)$

step 1　　$O(k|\mathcal{D}|)$

となるので，$sat(u_{c_i}) \subsetneq sat(u_{c_{i+1}})$を用いると，この処理に要する全体的な複雑度は，$O(k^2|\mathcal{D}|)$となる［4］。

次に（E，$\mathcal{D}$）が poset greedoid としてみよう。このとき（E，$\mathcal{D}$）はシェリング構造（shelling structure）[5，6]となり，束としての合併集合および共通集合をとる演算に関して分配束を満たす。またϕ，E$\in\mathcal{D}$である。集合Eのk個の要素に対し全体で１つの（連）鎖を形成する poset 列，次に長さが$k/2$の２つの連鎖，さらに長さが$k/3$の３つの連鎖，……，長さ$k/(\frac{k}{2})$の$k/2$個の連鎖を順々に構成しそのそれぞれに相応する poset greedoid について考察する。この場合$|\mathcal{D}|$は

$$k,\ (\frac{k}{2})^2,\ (\frac{k}{3})^3,\ \cdots\cdot\qquad\cdots\cdot,\ 2^{\frac{k}{2}}$$

となりそれに応じて計算時間の複雑度は

$$O(k^3),\ O(k^4),\ \cdots\cdot\qquad\cdots O(k^2\cdot 2^{\frac{k}{2}})$$

のように変化する．もし入力データとして$\mathcal{D}$をすべて列挙せず，$\mathcal{D}$が分配束であるという事実のみを考えるならば，これらは多項式計算時間に相当し，$|\mathcal{D}|$の増大とともに，指数計算時間の複雑度へと変化していることになる．

しかし最近，藤重氏は，この問題に対し，fの正値性という条件が無くても，$O(k^2|\mathcal{D}|)$の時間オーダで解くことができると報告されている。彼はわれわれ同様$^\forall A\in\mathcal{D}$に対し$f(A)$を計算するのに oracle を用いている。

3. Example

$E = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{D} = \{\phi, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $w = (1, 1, 6)$

$f(\phi) = 0$, $f(\{3\}) = 2$, $f(\{1, 2, 3\}) = 3$ とする.

このとき

$c_1 = \min\{f(A)/w(A) \mid \phi \neq A \in \mathcal{D}\} = \min(\frac{2}{6}, \frac{3}{8}) = \frac{1}{3}$ （$\{3\}$で）

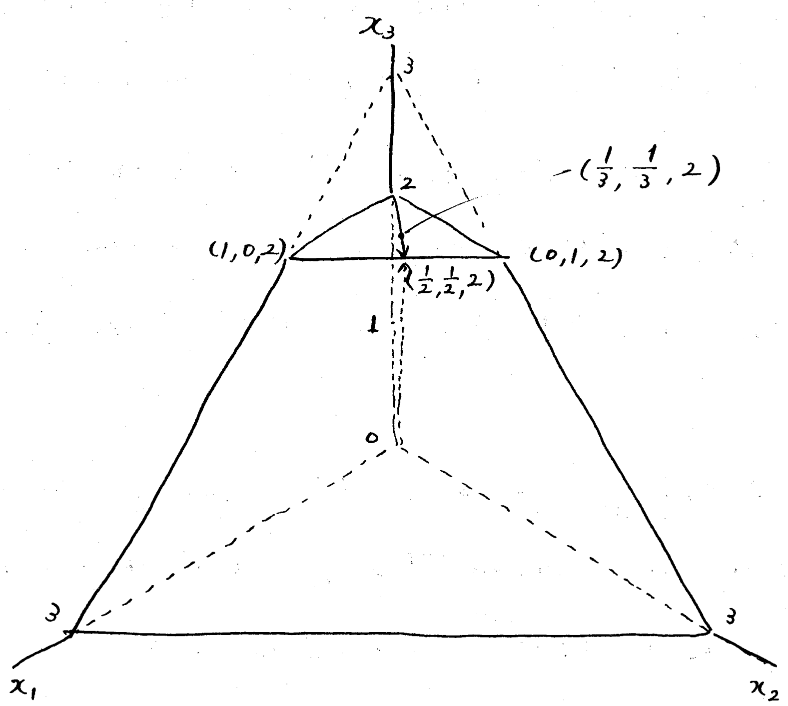
$u_{c_1} = u_{\frac{1}{3}} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2)$, $\mathrm{sat}(u_{c_1}) = \{3\} \neq E$

$\varepsilon_1 = \min\left\{(f(A) - u_{c_1}(A))/w(A \setminus \mathrm{sat}(u_{c_1})) \mid A \in \mathcal{D},\ A \setminus \mathrm{sat}(u_{c_1}) \neq \phi\right\}$

$= \dfrac{3 - 2\cdot\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{6}$,

$u_{c_2} = u_{c_1} + \frac{1}{6}(1, 1, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $\mathrm{sat}(u_{c_2}) = E$. STOP

$u_{c_2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ が $P(f)$ の辞書式順序最適基である。



$P(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_3 \leq 2,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\}$,

$B(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_3 \leq 2,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$

References

[1] S. Fujishige, Lexicographically optimal base of a polymatroid with respect to a weight vector, Mathematics of Operations Research, vol. 5, no. 2 (1980) 186-196

[2] S. Fujishige & N. Tomizawa, A note on submodular functions on distributive lattices, Journal of the O.R. Society of Japan, vol. 26 No. 4 (1983) 309-317

[3] S. Fujishige, Submodular systems and related topics, Mathematical Programming Study 22 (1984) 113-131

[4] K. Iwamura, A greedy procedure to get lexicographically optimal base of a positive submodular systems with respect to a weight vector, Dec. 5. 1986, manuscript.

[5] B. Korte & L. Lovász, Greedoid - A Structural framework for the greedy algorithm, Progress in Combinatorial Optimization, W.R. Pulleyblank (ed.), 1984 Academic Press 221-243.

[6] B. Korte & L. Lovász, Shelling Strutures, Convexity and a happy end, Graph Theory and Combinatorics. B. Bollobás (ed.), 1984, Academic Press, 219-232