数理解析研究所講究録
第 626 巻 1987 年 1-7

F．Morgan の方法と応用について

山口大・理　中内　伸光 (Nobumitsu Nakauchi)

F.Morgan は最近、極小曲面の解全体の空間の有限性について、いくつかの研究を行なっています([3])。この稿では、主にその解説を行ないます。

§1．背景

変分問題という側面からの極小曲面論の原型の一つとして classical Plateau problem というものがあります：

classical Plateau problem

R^3 の中に与えられた Jordan 曲線を境界とする面積最小の曲面を求めよ。

変分問題を考えるとき、一般に次のようなことがまず問題になります：

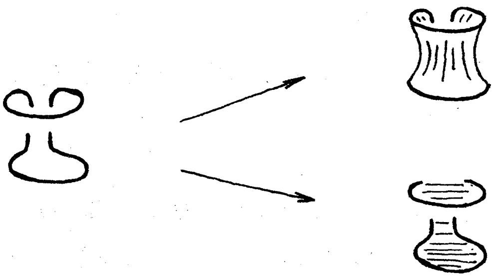
1．解の存在

2．解の性質　・・・・・ $\begin{cases} \text{(1)　個々の解の性質(indivisual)} \\ \text{(2)　解全体の構造(total)} \end{cases}$

3．応用

classical Plateau Problem に関して、曲面を単連結なものに限れば、1 は Rado, Douglas そして Morrey によって ambient space が多様体の場合まで満足すべき結果が得られています。2 (1) については解の正則性、はめこみ性、埋込性など、様々な研究がなされています。そしてこのような結果のもと、近年 Meeks,Schoen, Yau 等によって 3 が実り多いものになっています。

classical Palteau Problem の解が一般には一意的でないことはよく知られた事実です。典型的な例として：



Fleming はこの unit を大きさをかえて bridge principle で無限個つなぐことにより、無限個の解をもつ長さ有限の Jordan curve を構成しました。(Fleming の用いた unit はこれとは少し違います。） これは、$2^{\aleph_0}=\aleph$、即ち、連続濃度の解をもつことになります。ただ、連続濃度と言いましても、γを境界に持つ曲面全体の中では、解曲面の集合は離散的です。それでは、連続体をなす解曲面を持つような Jordan curve はあるかというのが一つの疑問として出てきますが、1976年に Morgan は、”連続体をなす面積最小曲面を張る、R^4 の smooth Jordan curve ” の存在を示しました([１])。R^3 でなくて R^4 であるのが残念なところですが、この例では $R^4=\mathbb{C}^2$ として unitary 群の作用が、解の連続体の構成に本質的に効いています。ちなみに R^3 では、同じく Morgan が 1981年に次のような例を構成しています([２])： ”次を満たす様な smooth Jordan curves の system Γ が存在する： 任意の正の整数 n に対して、Γ を境界に持ち、Euler 標数が －２n である様な oriented minimal surfaces の連続体がある。”(Morgan の原論文では、”高々 －２n ”となっていますが、丁度 －２n とできます。）

これらは解が無限個ある場合を調べていった訳ですが、これとは逆に、どういうときに解が有限個、さらには一個であるかという approach もあります。これに対しては、様々な人がそれぞれの結果を出しています。さらに、この有限性・一意性が generic な性質であるという経験的認識の下で、”ほとんどすべての Jordan curves については有限個(あるいは、一個) ”という方向のいくつかの結果が得ら

れています。

Morgan の結果には、Geometric Measure Theory が用いられています。Geometric Measure Theory の一般論を述べる訳にはいきませんが、Plateau problem との関係で少しふれておこうと思います。上で見たように、classical Plateau problem の解決は、”曲面を単連結なものに限って”という条件がついています。したがって、Plateau problem の本来の意味の解にはなっていない訳です。位相型を固定しない曲面全体での面積最小問題は、変分問題という立場からの曲面をもう一度見直すことを余儀なくさせました。そうして生まれてきた対象が Geometric Measure Theory の main objects であるところの current や varifoldです。これらの強力な Tools は、一般次元の hypersurfaces に対しても有効であることがわかりました。

§2. Morgan の結果

classical Plateau problem の解空間の有限性についての結果を、一般次元の場合にまで拡張するのは、2次元曲面の特性に大きく依存する classical approach に拘泥してもあまり進展が得られません。そこで Morgan は、immersed surface という対象はそのままにして、収束性などを Geometric Measure Theory の結果や手法をふんだんに用いて、空間の compact 性、さらには、有限性を示しました。ある source manifold からの immersions の空間だと曲面の位相型が固定されているため Geometric Measure Theory の適用が難しいのですが、Morgan は source も自由に動かせる様に次のような class をとりました：

N^n : n-dim.Riemannian manifold (ambient space)

$B^{n-2} \subset N^n$: (n-2)-dim. compact submanifold (与えられた境界)

のとき、

$$\mathcal{S}_B := \left\{ (f, M) : \begin{array}{ll} (1) & M : (n-1)\text{-dim. cpt smooth Riem.manifold} \\ (2) & f : M \longrightarrow N : \text{smooth} \\ (3) & f|_{\partial M} : \partial M \longrightarrow B : \text{smooth, one-to-one} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

但し、 $(f_1, M_1) \sim (f_2, M_2)$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\phi \quad \begin{tikzcd} M_1 \arrow[rr, "\text{diffeo}"'] \arrow[dr, "f_1"'] & & M_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}_B$ には、C^∞-topology から 自然に induce された topology が入っています。この class は、曲面の parametrization の違いは無視した、B を境界に持つ immersed surfaces の全体です。$\mathcal{S}_B$ の元に対して、minimal や area-minimizing (in $\mathcal{S}_B$) 等の概念は canonically に well-defined です。そこで、area-minimizing な minimal surfaces の空間：

$$\mathcal{M}_B := \{ [f, M] \in \mathcal{S}_B : \text{area-minimizing (in } \mathcal{S}_B) \}$$

を取ります。そこで：

問題： $\mathcal{M}_B$ の構造は？

Morgan の結果はいくつかありますが、area-minimizing surfaces についてのものを簡単に述べますと次の様になります：

<u>定 理</u> (Morgan)

N^n: real analytic , N の sectional curv. $\leqq$ const. $< \infty$
$(n \leqq 7)$ N の injectivity rad. $\geqq$ const. > 0

とする。

(I) N : non-compact のとき
$\# \mathcal{M}_B < \infty$

(II) N : compact のとき
$\# \mathcal{M}_B < \infty$、あるいは、
$\mathcal{M}_B$ は B を バインダーとした、N の open book str. を与える。

有限性の部分の証明は、classical Plateau problem の場合と同様、open かつ compact を示します。openness の証明は、よく知られた Banach 空間の陰函数定理に基礎を置き、それほど難しいものではありません。compactness の証明に Geometric Measure Theory のいろいろな結果や方法が用いられます。

§３．Without-boundary case

面積最小問題は境界なしの曲面についても考えることができます。Morgan は境界値問題しか扱っていませんが、境界なしの場合もある程度のことが言えます。このことについて少し見てみましょう。境界なしの曲面の面積最小問題は、最小解が例えば一点に退化しない様に何らかの "非退化条件" をもつ曲面の class で考えなければなりません。そこで、次の "非退化条件" を採用することにしましょう：

定　義 (cf. Schoen-Yau [４])

$$f : M \longrightarrow N : \text{incompressible}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$f_{*} : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N) : \text{injective} \quad \text{if } M \text{ の genus} \geqq 1$$

$$f : \text{homotopically non-trivial} \quad \text{if } M \text{ の genus} = 0$$

incompressibility は、もともと３次元Ｐ．Ｌ．topology の概念(３次元Ｐ．Ｌ．多様体の中の２次元Ｐ．Ｌ．曲面についての概念)です。これに従って、ここでは N を３次元としましょう。次のような incompressible surfaces の class を考えます：

$$M : 2\text{次元 compact smooth surface without boundary}$$

に対して

$$\mathcal{S}(M) := \{ f : M \longrightarrow N : \text{smooth incompressible} \} / \sim$$

但し、 $f_1 \sim f_2 \overset{\text{def}}{\iff} \exists \phi$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\phi", "\text{diffeo}"'] \arrow[dr, "f_1"'] & & M \arrow[dl, "f_2"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{S}(M)$ には、$C^\infty(M, N)$ から induce された topology が入っています。
そこで：

$$\mathcal{M}(M) := \{ [f] \in \mathcal{S}(M) : \text{area-minimizing (in } \mathcal{S}(M)) \}$$

とおくと、これは M からの area-minimizing incompressible surfaces の全体ですが、このとき次が成り立ちます：

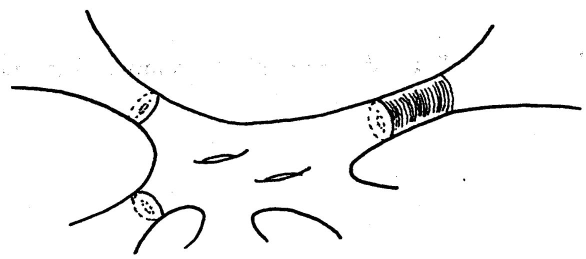
<u>定　理</u>

N^3 : smooth, N の sectional curv. $\leqq$ const. $< \infty$
N の injectivity rad. $\geqq$ const. > 0

とする。このとき

$\mathcal{M}(M)$: closed

言い換えると、N の area-minimizing incompressible surfaces の全体は、曲面の parametrization の違いは無視して C^∞-topology で閉じていることを示しています。



この定理の証明は Morgan の定理と同様、Geometric Measure Theory での収束を用います。曲面が２次元の場合は、強く一様収束まで言えるので、limit surface の位相型は同じで、Geometric Measure Theory を用いながらも位相型を固定した class で議論ができます。境界がある場合とは違い、limit としてある surface の covering immersion に収束していく場合も考えられます。

《 R e f e r e n c e s 》

［１］ F.Morgan: A smooth curve in R^4 boundaing a continuum of area-minimizing surfaces, Duke Math. J. 43(1976), 867-870.

［２］ F.Morgan: A smooth curve in R^3 boundaing a continuum of area-minimizing surfaces, Arch. Rat. Mech. Anal. 75(1981), 193-197.

［３］ F.Morgan: On finiteness of the number of stable minimal hyper-surfaces with a fixed boundary, Indiana Univ. Math. J. 35(1986), 779-833.

［４］ R.Schoen-S.T.Yau: Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, Ann. of Math. 110(1979), 127-142.