

Super minimal surfaces I

都立大学 江尻 典雄 (Ejiri Norio)

目的は Bryant による次の結果の紹介することである。

定理 M を compact, connected Riemann surface とする。このとき M から 4次元単位球面 $S^4(1)$ への conformal minimal immersion がある

証明の方針は Penrose fibration を用いて super minimal surface の表現公式を作りその応用として定理を得る。

1. holomorphic quartic form.

M を compact, connected Riemann surface とする。

X を M から $S^4(1)$ への smooth map とする。但し $S^4(1)$ を 5次元 Euclid 空間 R^5 の原点中心の単位球面と見て X を R^5 に値をとると思、ている。 X が conformal とは

$$(1.1) \quad \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial \bar{z}} \right\rangle = 0$$

が成立することであり X が harmonic とは

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial \bar{z}} = - \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial \bar{z}} \right\rangle X$$

が成立することである。ここで \langle, \rangle は R^5 の内積を complex linear に拡張し, z は M の complex coordinate とする。今から X を conformal, harmonic とする。つまり X は branched, minimal immersion となる。この時

holomorphic quartic form Q が

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{z}^2} \right\rangle dz^4$$

で定義できる。実際容易に (1.1), (1.2) を使って $\langle \partial^2 X / \partial z^2, \partial^2 X / \partial \bar{z}^2 \rangle$ が holomorphic がおかる。 $Q \equiv 0$ のとき M を super minimal surface と呼ぶ

注 1.1. M が topological sphere S^2 であるときはこのような Q は恒等的に 0 となる。

2. Penrose fibration.

R^4 の orientation を固定する。 (x^1, x^2, x^3, x^4) を oriented orthogonal coordinate とする。 J_0 を R^4 の orthogonal complex structure として

$$J_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

で定義する O を固定した orientation を自然な orientation とする R^4 の orthogonal complex structure 全体とする。この時 $SO(4)$ が $O \wedge J \rightarrow gJg^{-1}, g \in SO(4)$

として transitive に作用し その isotropy 群は unitary 群 $U(2)$ に他ならない。したがって O は $SO(4)/U$ と同一視でき $S^2(1)$ となることがわかる。 $S^4(1)$ の orientation を 1 つ固定する。 F を $S^4(1)$ の oriented frame bundle とする O の $SO(4)$ -作用を使って associated bundle H を作る。この H を $S^4(1)$ の twistor space と呼ぶ。各 fibre は 各点 $x \in S^4(1)$ に対して $T_x(S^4(1))$ の orthogonal complex structure 全体となる。但しその自然な orientation は、固定された $S^4(1)$ の orientation となっている。 π を H から $S^4(1)$ への projection とする。 H には F の connection からきまる horizontal distribution \mathcal{H} がはいる。 \mathcal{V} を vertical distribution とする。 $\tilde{x} \in H$ に対して

$$T_{\tilde{x}}(H) = \mathcal{H}_{\tilde{x}} + \mathcal{V}_{\tilde{x}}$$

なので 同一視 $\mathcal{H}_{\tilde{x}} = T_{\pi(\tilde{x})}(S^4(1))$, $\mathcal{V}_{\tilde{x}} = T_{\tilde{x}}(S^2(1))$ を使って $T_{\tilde{x}}(H)$ に内積を導入 さらに $\mathcal{V}_{\tilde{x}}$ は $T_{\tilde{x}}(S^2(1))$ より orthogonal complex structure を持ち 一方 $\mathcal{H}_{\tilde{x}}$ は $T_{\pi(\tilde{x})}(S^4(1))$ の orthogonal complex structure に他ならないので $\mathcal{H}_{\tilde{x}}$ の orthogonal complex structure を引き起す。このようにして H は almost Hermitian structure を持つ ここまでは oriented 4次元 Riemannian manifold で twistor space が定義できることをいっているが 特に $S^4(1)$ の場合

次の事実が知られている

Fact. H は 3次元複素射影空間 P_3 となる。

実際作り方より $H = SO(5)/U(2)$ となっている。

3. "Gauss map"

M を compact, connected Riemann surface とする。 χ を M から $S^4(1)$ の conformal immersion とする。 $N(M)$ を normal bundle とする。 M と $S^4(1)$ の orientation からきまる orientation を $N(M)$ に与えておく。 各 $x \in M$ に対して $e_1(x), e_3(x)$ を $T_x(M)$ の oriented orthonormal basis とし $e_2(x), e_4(x)$ を $N_x(M)$ の oriented orthonormal basis とする。 M から $P_3 (= H)$ への map G を

$$G(x) = (\chi(x), e_1(x), e_2(x), e_3(x), e_4(x)) \cup (2)$$

で定義する。 well defined であることを示すのは容易である。 これを "Gauss map" と呼ぶ。 $S^4(1)$ の orientation を変えることによつて別の "Gauss map" を持つ

注 3.1. $S^4(1)$ のかわりに R^4 を考える。 そのとき "Gauss map" は

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & SO(4)/U(2) = S^2(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \chi & \longrightarrow & (e_1(x), e_2(x), e_3(x), e_4(x)) \cup (2) \end{array}$$

となる。 したがつて M から $S^2(1) \times S^2(1)$ への map を得るが これは standard な Gauss map となっていることがわかる。

次の定理は direct calculation によって出る. (c.f. [E-S-2], [Gu-R], [Ej-3])

定理 3.1. (1) M が $S^4(1)$ の super minimal surface であるための必要十分条件は どちらかの "Gauss map" が horizontal, holomorphic.

(2) P_3 の horizontal holomorphic map は $S^4(1)$ の super minimal surface を与える.

但し horizontal とは $G \times (TM) \subset \mathbb{R}^4$ となることである.

注 3.2. minimal の場合 branch point があっても "Gauss map" は定義できる.

$S^4(1)$ の minimal surface が \Rightarrow super minimal surface となるおとしいことについて次の定理がある.

定理 3.2. ([E-S-2]) M_g を genus g の compact, connected Riemann surface で $S^4(1)$ に conformal, minimal に immerse されているとする. 且

$$|\text{self intersection number}| > 2(g-1)$$

ならば M_g は super minimal surface となる.

証明. X をその immersion とする. $N^{\mathbb{C}}(M)$ を $N(M)$ の complexification とする. $N(M)$ の normal connection を使って $N^{\mathbb{C}}(M)$ は holomorphic structure を持つ. (c.f. [E-W-4]) ω を X の second fundamental form とする.

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) d\bar{z}^2$$

は $N^c(M)$ に値をとる form となる。Codazzi equation よりこれは holomorphic になる。 $G(x)$ は $N(M)$ の orthogonal complex structure J'' を導いている。つまり $J''e_2 = e_4$, $J''e_4 = -e_2$ である (先ほど述べたが、たが M の orthogonal complex structure J' を使えば $G(x) = J' + J''$ に他ならない)。 J'' は $N(M)$ の normal connection で平行となることがわかる。そこで J'' をつかって $N^c(M)$ を (1,0)-type $N^{1,0}(M)$ と (0,1)-type $N^{0,1}(M)$ の subbundle に分解することができて holomorphic subbundle となっていることがわかる。 $N(M)$ の metric を使って $N^{0,1}(M)$ は $N^{1,0}(M)$ の dual space となるので $N^{0,1}(M)$, $N^{1,0}(M)$ の Chern number $C_1(N^{0,1}(M))$, $C_1(N^{1,0}(M))$ について

$$(3.1) \quad C_1(N^{1,0}(M)) + C_1(N^{0,1}(M)) = 0$$

を得る。さて $\sigma\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ の (1,0)-part, (0,1)-part をそれぞれ $\sigma^{1,0}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$, $\sigma^{0,1}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ とすると $N^{1,0}(M)$, $N^{0,1}(M)$ に値をとる form

$$\sigma^{1,0}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) d\bar{z}^2, \quad \sigma^{0,1}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) d\bar{z}^2$$

が定義できる。さてどちらを消えていないとする。このとき

$$C_1(N^{1,0} \otimes \{d\bar{z}^2\}) \geq 0, \quad C_1(N^{0,1} \otimes \{d\bar{z}^2\}) \geq 0$$

となるので $C_1(N^{1,0}) \geq 4(1-g)$, $C_1(N^{0,1}) \geq 4(1-g)$ を得る。

(3.1)より $|C(N^{10})| \leq 4|1-9|$ となる。しかるに $C(N^{10})$ は self intersection の2倍であるので仮定より矛盾となる。ゆえに $\sigma^{10}(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \equiv 0$ or $\sigma^{01}(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \equiv 0$ となる。したがって $\langle \sigma(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}), \sigma(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \rangle \equiv 0$ が成立する。これは $Q \equiv 0$ を示している \blacksquare

注3.3. self intersection number は regularly homotopy class と対応している。一般に各 regularly homotopy class に minimal surface があるとはかぎらない。実際 S^2 から $S^4(1)$ の $|\text{self intersection number}| = 1$ となる regularly homotopy class は, minimal immersion を持たないが他の class については Barbosa の例を用いて minimal immersion があることがわがっている。

4. horizontal distribution と表現公式

目的は P_3 の horizontal distribution \mathcal{H} を具体的にあらわすことである。

(z_0, z_1, z_2, z_3) を P_3 の homogeneous coordinate とする。 A を open set $\{(z_0, z_1, z_2, z_3) \in P_3 \mid z_0 \neq 0\}$ とする。 z_1, z_2, z_3 を P_3 の coordinate とし次が成立する

補題 A 上 \mathcal{H} は holomorphic 1-form

$$\omega = dz_1 - z_3 dz_2 + z_2 dz_3$$

で定義される。

この補題を使って superminimal surface の表現公式を得る。

定理 4.1 ([Br-2]). M を compact, connected Riemann surface とする。 f と g を M 上の meromorphic functions とする。 g は定数でないとする。 M から $\mathbb{P}_3 \wedge$ の map $\Phi(f, g)$ を

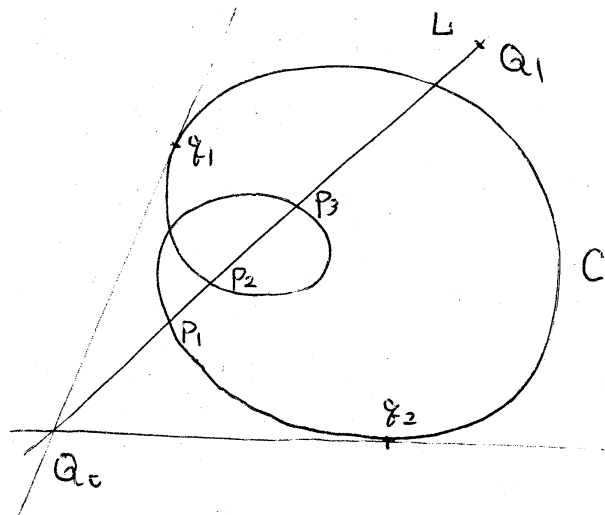
$$\Phi(f, g) = \left[1, f - \frac{1}{2}g \left(\frac{df}{dg} \right), g, \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dg} \right) \right]$$

で定義する時、 $\Phi(f, g)$ は horizontal holomorphic map となる。 逆にどんな holomorphic horizontal map も上の表現を持つ $\mathbb{P}_3 \wedge$ の map となっている。

この表現公式を使って主定理を導く。つまりうまく f, g を見つけようということである。さて Φ を M から $\mathbb{P}_2 \wedge$ の holomorphic, generically 1-1 immersion で $\Phi(M) (=C)$ が ordinary double point のみを singularities に持つ algebraic curve とするものとする。このような Φ の存在は、よく知られている。さて Q_0 を \mathbb{P}_2 の点で flex tangent, bitangent, double point の tangent の各 line の上になく、 L を Q_0 を通り C に接しない、 double point を通らない line とする。 Q_1 を L 上の点、

($\neq Q_0, \notin C$) とする。そこで $Q_0 = [0, 1, 0]$, $Q_1 = [1, 0, 0]$ とする coordinate をとる。すると $\Psi(P) = [g(P), f(P), 1]$ となる meromorphic function f, g ができる。これが求める f, g であり $\Psi(f, g)$ は holomorphic embedding を与えておくことを示せばよい。

最後に問題として, "genus g の compact connected Riemann surface M に対し M が $S^4(1) \wedge$ の immersion の各 regularly homotopy class 中 minimal immersion を持つものと持たないものを決定する" をあげておく。



Reference については、大仁田氏の Reference を見てください。

Super minimal surfaces II

都立大学 江尻 典雄 (Ejiri Norio)

M を compact, connected orientable surface とする。 M から $S^3(1)$ への immersion X に対して $W(X)$ を

$$\int (H^2 - K + 1) * 1$$

で定義する。ここで H は M の mean curvature, K は M の Gauss curvature, $* 1$ は volume element とする。 W は Willmore functional と呼ばれている。 λ_1, λ_2 を M の主曲率とするとき $H^2 - K + 1$ は

$$\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)^2$$

で与えられる。したがって $W \geq 0$ であり等号は M が totally umbilical となることである。容易に

$$(H^2 - K + 1) * 1$$

は $S^3(1)$ の共形変換で不変であることがわかる。

つまり W は 共形不変な量となり $S^3(1)$ の曲面の共形幾何をやる一つの出発点となります。この Willmore functional の Euler Lagrange 方程式は 次で与えられます。

$$\Delta H - 2H(H^2 - K + 1) = 0$$

ここで Δ は M の Laplacian である。この方程式を満たす曲面を Willmore surface と呼ぶ。

注. この方程式は Hombu によって与えられた。

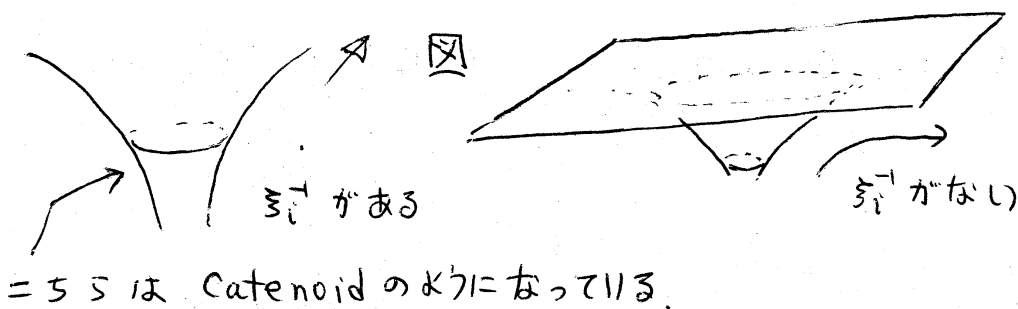
目的は Bryant による次の定理の紹介である ([Br-3])。

定理 M を $S^3(1)$ の genus 0 の Willmore surface とする。そのとき M は R^3 の minimal surface の stereographic projection の逆による smooth compactification となる。

注. smooth compactification を持つための必要十分条件は Bryant によって決定されている。つまり R^3 の finite total curvature を持つ complete minimal surface $\tilde{M} = M - \{P_1, \dots, P_k\}$ で $\tilde{\chi}$ をその immersion とするとき 各 P_i の complex coordinate ξ_i に対して

$$\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \xi_i} = \xi_i^{-2} \nu_i + \nu_i' + \dots$$

となる。 $\nu_i, \nu_i' \in \mathbb{C}^3$ があることである。実際 end が embedding とならなくてはならないので $\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \xi_i}$ は order 2 の pole を持つ。 ξ_i^{-1} が現われるか 11 なりかは、次の図のようになっている。



1. Conformal Gauss map.

$S^3(1)$ の曲面の共形幾何をやりたい。しかし今までの Gauss map は、共形不変でない。それは平面は共形変換で sphere に移ってしまうからである (R^3 で考えて)。

Σ を $S^3(1)$ の oriented small spheres の全体とする。 M を oriented surface として $S^3(1)$ に immerse されているとする。このとき M の各点 x に対し x で M に接し同じ orientation, 同じ mean curvature vector を持つ small sphere を対応させる。このとき M から $S\Sigma$ への map ϕ が定義できる。容易にわかることは、これは共形不変であるということである。

Σ をどう見るかを考える。

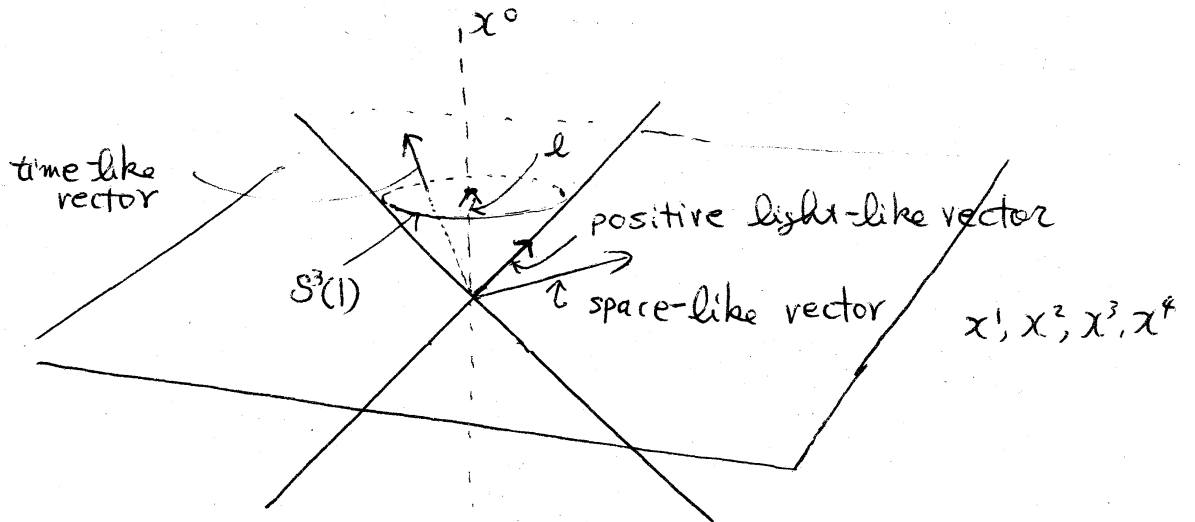
L^5 を 5次元 Lorentz 空間とする。つまり $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$ を R^5 の orthogonal coordinate として内積を

$$\langle X, Y \rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4$$

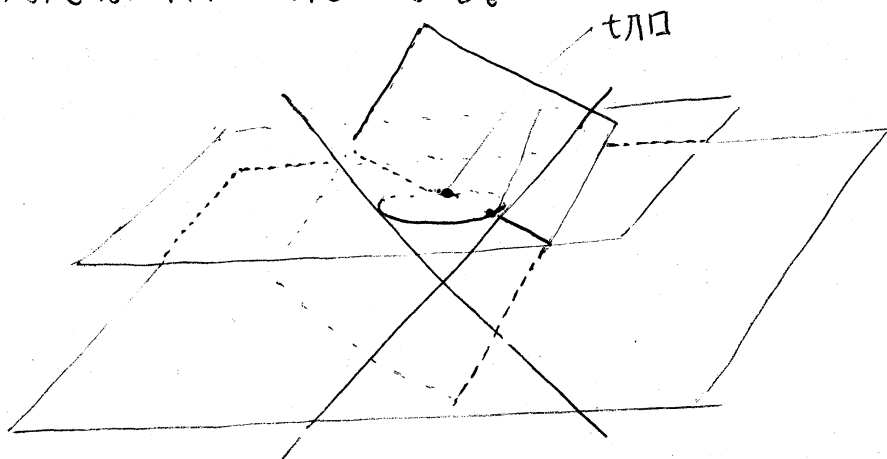
で与えたものである。 $S^3(1)$ として

$$\{ x \in L^5, \langle x, x \rangle = 0, \langle x, l \rangle = -1 \}$$

と考える。ここで $l = (1, 0, 0, 0, 0)$ とする。



$S^3(1)$ は positive-light-like ray を一点と見ている。
 さて $S^3(1)$ の oriented small sphere は L^5 の原点を通る
 oriented Lorentz hyperplane で切った切口となり この
 対応は 1:1 onto となる。



L^5 の orientation $(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 > 0)$ と
 その Lorentz hyperplane の orientation より unit
 space-like vector が定まる。したがって Σ の各元に対

して、この unit space-like vector を対応させる写像は Σ と 4次元 de Sitter space

$$Q \equiv \{x \in L^5, \langle x, x \rangle = 1\}$$

との同一視を与える。Qは、 L^5 から induceされる metric (signature $-+++$) を持つ。したがって $S^3(1)$ の oriented surface M に対して、 M から Q への map を得る。これを g であるとする。具体的な表現は次で与えられることがわかる。

$$\begin{array}{ccc} g: M & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & n(x) + \langle \ell(x), n(x) \rangle \chi(x) \end{array}$$

ここで n は unit normal vector of M in $S^3(1)$, ℓ は M の mean curvature vector in $S^3(1)$ である。さらに $\chi(x)$ は $S^3(1)$ の L^5 への入れ方における position vector である。次の定理は Bryant によって示されたものである。

定理 1.1. (1) g は conformal であり conformal factor は $(H^2 + 1 - K)$ で与えられる。

(2) M が Willmore surface であることと g が harmonic であることは同値。

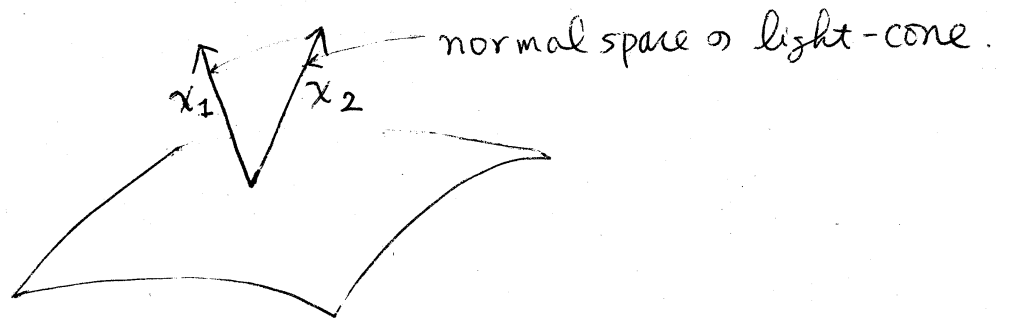
この g のことを Bryant は conformal Gauss map と呼んでいる。したがって Willmore functional は conformal Gauss map の energy (area) となる。注意すべきこと

は, umbilic points 以外では g は Q の space-like surface を与えて 113 ことである. つまり

(1.1) $g_*(T_x M)$ が space-like plane となっている。

2. Space-like surfaces.

M を orientable surface とし, g を M から S^3 の space-like immersion とする. つまり (1.1) が成立している. したがって normal space に与えられた metric は signature $+ -$ となる. これより M と Q の orientation を定めると normal space の 2 つの positive light-like vectors が定まる. これらを χ_1, χ_2 とする

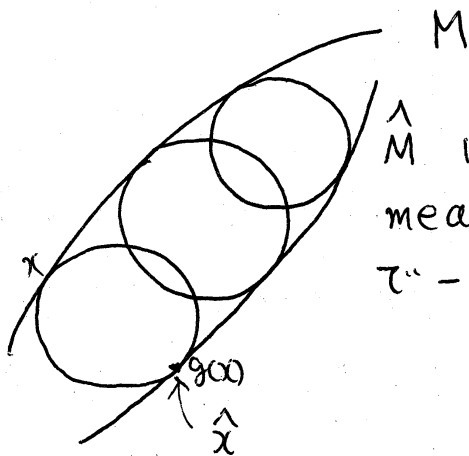


$S^3(1)$ は positive light-like ray を一点で見たものだから S^3 の χ_1, χ_2 は $S^3(1)$ の map を定義する. ここで M が Q で minimal とは, mean curvature vector が消えていることとするときが成立する.

補題 2.1. もし M が minimal とすると, χ_1, χ_2 が曲面を与えて 113 部分は Willmore surface で その conformal

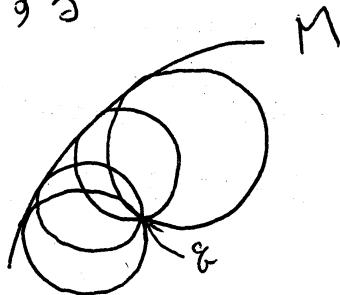
Gauss map は $g \neq \text{他ならない}$

M を $S^3(1)$ の Willmore surface とする。 χ をその immersion とし g を conformal Gauss map とする。 \mathcal{U} を M の umbilic points 全体とする。 g は $M - \mathcal{U}$ を Q の minimal surface として実現している。 この曲面の χ_1, χ_2 にかんして 1 つは χ に他ならない。 もう 1 つを χ_2 とするとき χ_2 が曲面を与える部分は χ Willmore surface となる。 Bryant は Willmore surface の umbilic points は孤立しており χ_2 は \mathcal{U} 上拡張できることを示している。 これを M の Willmore dual \hat{M} としうことにする。 この幾何学的意味は次のようになる。



\hat{M} は enveloping surface で mean curvature が対応する点で一致

もっとも simple な場合として \hat{M} が一点となる場合を考える $\hat{M} = \{p\}$ とする



π_g を $S^3(1) - \{pt\}$ から R^3 への stereographic projection とする。
 π_g によつてこれら 5 small spheres は R^3 の 2-planes となる。
 $\pi_g(M)$ はこれら 5 の planes に接し、同じ mean curvature を持つので $\pi_g(M)$ は minimal surface となる。したがつて主定理の証明には genus 0 の Willmore surface S^2 に対して \hat{S}^2 が one point であることを言えばよい。

3. Super minimal surfaces.

M を compact, connected Riemann surface とする。
 g を M から \mathbb{C} への conformal harmonic とする。super minimal surface I と同様にして quartic form P が

$$\left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{z}^2} \right\rangle dz^4$$

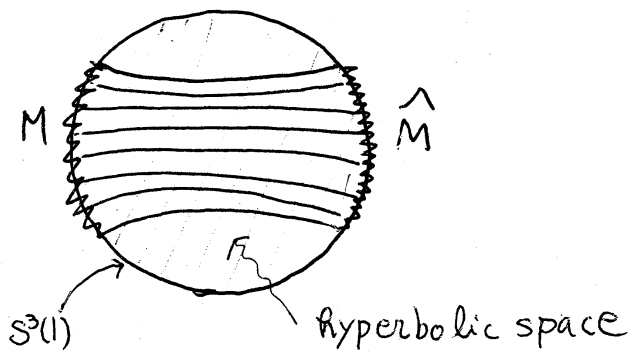
で定義できる。conformal harmonic より P は holomorphic となることがわかる。 $P \equiv 0$ となるものを \mathbb{C} の super minimal surface と呼ぶことにする。genus 0 の compact connected Riemann surface からの \mathbb{C} への conformal, harmonic map は super minimal surface を与えることは容易にわかる。さて $S^3(1)$ の genus 0 の Willmore surface を考えると、その conformal, Gauss map は、conformal harmonic なので $P \equiv 0$ が成立する。主定理は次の補題より出る。

補題 M が Q の superminimal surface であることと image が L^5 の degenerate plane $\{y\}^\perp$ に含まれることと同値。
 \Leftarrow y は light-like vector.

genus 0 の Willmore surface に対して, $X_2 = y$ に代わらずに, μ 元は dual は one point となる。

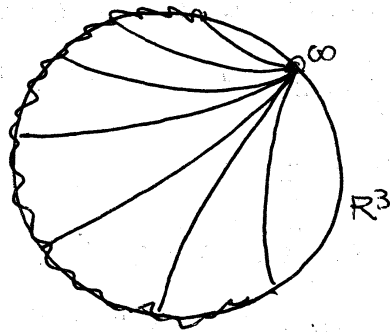
4. duality の応用.

M を $S^3(1)$ の Willmore surface とし \hat{M} を Willmore dual とする。 $S^3(1)$ を 4次元 hyperbolic space の asymptotic boundary とする。このとき $x \in M$ と対応する $\hat{x} \in \hat{M}$ を結ぶ hyperbolic space の測地線の集まりで, 3次元 submanifold となつてゐる部分は, type number が 2以下の minimal hypersurface となり, 又逆も成立する。



この観点から Bryant の結果は次のように読みとれる。

4次元 hyperbolic space の type number が 2以下の minimal hypersurface の asymptotic boundary が genus 0 の compact surface であるとき, それは次のようなものにか



注4.1. このような考え方のもとで 高い codimension を持つ Willmore surface については [Ej-5] で与えられている。

Reference については 大仁田氏の Reference を見てください。