数理解析研究所講究録
第626巻 1987年 96-114


# Asymptotic behavior of solutions to Eells-Sampson equation

名大理　内藤　久資　(Hisashi Naito)

## § 1. Introduction.

幾何学において，いくつかの重要な対象が変分原理によって特徴づけられている。例えば，Yang-Mills接続，Yamabeの問題，Harmonic mapがそうである。ここでは，harmonic map，特にその安定性を考えることにする。
以下本稿では，$(M, g)$, $(N, h)$ はcompact closed Riemann多様体とする。
初めに，harmonic mapの定義と基本的な定理であるEells-Sampsonの定理について述べる。

$f : M \longrightarrow N$ ; smooth map に対して，$f$ の energy density $e(f)$ と total energy $E(f)$ を次のように定義する。

$$e(f) = \frac{1}{2}|df|^2 = \frac{1}{2} g^{ij} h_{\alpha\beta}(f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}$$

$$E(f) = \int_M e(f)\, d\mu_M .$$

$f ; M \longrightarrow N$ ; smooth map が harmonic map であるとは，

fが汎関数Eの停留点であることと定義する。

この定義により，fがharmonic mapであることと，fがEのEuler－Lagrange方程式をみたすこととは同値であることがわかる。 そこで，EのEuler－Lagrange方程式を計算すると，

$$\Delta f = 0$$

$$(\Delta f)^{\alpha} = g^{ij}\left\{\frac{\partial^2 f^{\alpha}}{\partial x^i \partial x^j} - {}^{M}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^k} + {}^{N}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(f)\frac{\partial f^{\beta}}{\partial x^i}\frac{\partial f^{\gamma}}{\partial x^j}\right\}$$

となり，これは2階半線型楕円型方程式系である。

harmonic mapの例としては以下のものがある。

1) M上の調和関数

2) M上の測地線

3) Mのisometry，特に恒等写像はharmonic map

4) kähler manifoldの間の(anti－)holomorphic map

5) $f: M \longrightarrow N$ をisometric immersionとすると，

$f$ : harmonic map $\Longleftrightarrow$ $f$ : minimal

6) conformal map

7) $f: M_1 \times M_2 \longrightarrow N$ がそれぞれの変数について

harmonic map $\Rightarrow$ $f$ : harmonic map

8) Gを両側不変な計量をもつLie群とすると，

掛算 $\mu: G \times G \longrightarrow G$ はharmonic map

9) Hopf fibration $S^3 \longrightarrow S^2$, $S^7 \longrightarrow S^4$, $S^{15} \longrightarrow S^8$

はharmonic map

以上の例の他に，harmonic map の存在定理として，基本的と考えられるものは，次の Eells-Sampson の定理である。

<u>Theorem</u> (J. Eells - J.H. Sampson [3], 1964)

$^N K$ ($N$ の断面曲率) $\leq 0$ とすると，$C^\infty(M,N)$ の各 homotopy 類には，少なくとも 1 つの harmonic map が存在する。

さらに，次の意味での一意性がある。

<u>Theorem</u> (P. Hartmann [6], 1967)

(1) $f_0, f_1$ を $C^\infty(M,N)$ の同じ homotopy 類に属する harmonic maps とすると，$f_0$ と $f_1$ は harmonic maps の family $\{f_s\}_{0\leq s\leq 1}$ を通して homotopic

(2) $^N K < 0$ とすると，以下の (i), (ii) を除いて各 homotopy 類にはただ一つの harmonic map が存在する。

(i) $f_0$ が constant map ならば $f_1$ もそう

(ii) $f_0(M)$ が $N$ の closed geodesic $\gamma$ になるとき，$f_1(M)$ もそうで，$r$ を rotation とした時，$f_1 = r \circ f_0$ となる。

さて，Eells-Sampson の定理は次の半線型熱方程式を解くことによって得られる。

$$(\mathrm{E.S.})\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \Delta f & \text{on } M \times [0, \omega) \\ f = f_0 & \text{on } M \times (0) \end{cases}$$

この方程式をEells - Sampsonの方程式と呼ぶことにする。

つまり，(E.S.)の時間$t$に関する大域解の存在を示し，

$t \longrightarrow +\infty$で解がharmonic mapに収束することを示せば，上

に述べた定理を示すことができる。

一方，汎関数Eの第2変分公式は次で与えられている。

<u>Theorem</u> (R.T. Smith [16], 1975)

$f: M \longrightarrow N$ ; harmonic map でのEのHessianは

$$H_f(v, w) = \int_M \langle \Delta^f v - \mathrm{Trace}\, {}^N R(df, v) df, w \rangle d\mu_M$$

${}^N R$は$N$の曲率テンソル，$v, w \in \Gamma(f^{-1}TN)$)

$J_f(v) = \Delta^f v - \mathrm{Trace}\, {}^N R(df, v) df$ を$f$での<u>Jacobi operator</u>と呼ぶ

この第2変分公式によって，harmonic mapの安定性の定義をすることができる。

<u>Definition</u>

harmonic map $f$ の<u>Index</u>とは，

$\mathrm{Index}(f) = \{J_f$の負の固有空間の次元$\}$

$f$ の <u>Nullity</u> とは

$Null(f) = dim(\ker J_f)$ .

ここで，$J_f$ は elliptic で $M$ は compact だから，

$Index(f), Null(f) < +\infty$ となる。

さらに，harmonic map $f$ が <u>stable</u>，<u>weakly stable</u>

とは，それぞれ，$Index(f) = Null(f) = 0$, $Index(f) = 0$

をみたすこととする。

したがって，${}^N K \leq 0$ とすると，全ての harmonic map が (weakly) stable となることがわかる。 そこで，次の問題を考えてみよう。

<u>Problem.</u>

harmonic map $F$ が (weakly) stable であるとき，

$F$ と"十分近い" $f_0$ を初期値とする (E.S.) は $\omega = +\infty$

までの解を持つか？

さらに，その解は，$t \to +\infty$ とした時，harmonic map

$F$ に収束するか？

この問題に対する一つの解答が，次に述べる今回の主定理です。

<u>Theorem.</u> (H. Naito [7])

$F : M \longrightarrow N$ を stable harmonic map とする。

$m > \frac{1}{2} dim M + 2$ に対して，ある正数 $\varepsilon$ が存在して，

$$\|F - f_0\|_{H^m(M,N)} < \varepsilon$$

をみたせば，$f_0$を初期値とする(E.S.)の解 $f$ が，

$$C^0([0,\infty) ; H^m(M,N)) \cap C^{1/2}([0,\infty) ; H^{m-1}(M,N))$$

に存在し，

$$\| f(\cdot,t) - F \|_{H^m(M,N)} \leq Ce^{-\beta t} \quad (C, \beta > 0)$$

をみたす。　ここで $\|\cdot\|_{H^m(M,N)}$ は $N \hookrightarrow \mathbb{R}^p$ と考えた時の Sobolev space $H^m(M,\mathbb{R}^p)$ の norm。

Remark

この定理は，多様体が real analytic の時には，Leon Simon [14]によって得られていた。

L. Simon の結果については，section 2で述べる。

## §2. Known results.

このsectionでは，Eells - Sampson 方程式について，知られている結果をいくつか述べることにする。

(J. Eells - J.H. Sampson [3], 1964)

${}^NK \leq 0$の時，任意の$f_0 \in C^\infty(M,N)$に対して，$f_0$を初期値とする(E.S.)は$\omega = +\infty$までの解を持ち，$t \to +\infty$の時，$C^\infty$-topologyでharmonic mapに収束する。

(R. Hamilton [5], 1975)

$(M, g)$, $(N, h)$ を境界のある compact Riemann 多様体で, $\partial N$ は convex かつ ${}^N K \leq 0$ とする。次の Eells-Sampson 方程式の境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \Delta f & \text{on } M \times [0, \omega) \\ f = f_0 & \text{on } M \times (0) \\ f = h & \text{on } \partial M \times [0, \omega) \end{cases}$$

は $f_0|_{\partial M} = h$ をみたす $f_0 \in C^\infty(M, N)$ に対して $\omega = +\infty$ までの解を持ち, $t \to +\infty$ の時, $C^\infty$-topology で harmonic map に収束する。

(S. Nishikawa [9], 1980)

$(M, g)$, $(N, h)$ を境界のある compact Riemann 多様体で, $\partial M$, $\partial N$ は convex かつ ${}^N K \leq 0$ とする。次の Eells-Sampson 方程式の Neumann 問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \Delta f & \text{on } M \times [0, \omega) \\ f = f_0 & \text{on } M \times (0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial M \times [0, \omega) \end{cases}$$

は $\frac{\partial f_0}{\partial \nu} = 0$ をみたす $f_0 \in C^\infty(M, N)$ に対して $\omega = +\infty$ までの解を持ち, $t \longrightarrow +\infty$ の時, $C^\infty$-topology で harmonic map に収束する。

(S. Nishikawa [10], 1981)

$M = N \times_{\varphi} K$, $M' = N' \times_{\psi} K'$ を compact Riemann 多様体の warped product ; $N, N'$ は境界を持ち, $K, K'$ は境界はないとする。さらに $\partial N$ は convex かつ ${}^{N}K \leq 0$,
$F : K \longrightarrow K'$ は constant energy density をもつ harmonic map, $f_0 : N \longrightarrow N'$ ; smooth map とする。
$u ; \partial M \times [0, \infty) \longrightarrow M'$ ; smooth かつ $t$ に independent
$u = f_0 \times F$ on $\partial M \times (0)$ であるとき,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \Delta U & \text{on } M \times [0, \infty) \\ U = f_0 \times F & \text{on } M \times (0) \\ U = u & \text{on } \partial M \times [0, \infty) \end{cases}$$

は global solution $U ; M \times [0, \infty) \longrightarrow M'$ を持ち, $\partial M \times (0)$ を除いたところで smooth。

(L. Simon [14], 1983)

$(M, g)$, $(M', g')$ を compact real analytic Riemann 多様体とした時, $f$ を locally energy minimizing な map とすると, $f$ と $H^m$-topology $(m > \frac{1}{2}\dim M + 3)$ で十分近い初期値をもつ (E.S.) は $\omega = +\infty$ までの解をもち, $t \longrightarrow +\infty$ の時, $f$ と同じ energy を持つ harmonic map に収束する。(c.f. L. Simon [15], J. Jost [4])

(M. Struwe [17], 1985)

$(M,g)$ ; compact Riemann surface , $(N,h)$ ; compact Riemann多様体に対して，$f_0 \in H^1(M,N)$を初期値にもつ(E.S.)は，$\omega=+\infty$ までの解を持ち，高々有限個の点；$\{ (x_\ell, T_\ell) \in M \times [0,\infty)$ ; $1 \le \ell \le L$ で

$$\limsup_{T \to T_\ell,\, T<T_\ell} E_R(f(\cdot,T);x^\ell) > \varepsilon^1,\ {}^\forall R \in (0,R_0]$$

をみたす点$\}$ を除いて，$M\times[0,\infty)$上regular， ただし，$E_R(u,x)=\int_{B_R(x)} e(u)\,d\mu_M$。

<u>Remark</u>

以上の定理で得られた解は，全てunique。

§3. 非線型発展方程式の導出.

このsectionでは，主定理を証明するための準備として，ある条件の下に(E.S.)の解を構成することと同値となる発展方程式を導く。

定理の中での仮定，Fが<u>stable</u> harmonic map であるということを使うために，(E.S.)を$F^{-1}TN$ のsection に対する方程式に書き直すことを考える。 なぜなら，Fがstable であることを示す情報は，Jacobi operator ，即ち$\Gamma(F^{-1}TN)$に対するoperator で表現されているからである。

そのために次の事実を考えよう。

$f_1, f_2 ; M \longrightarrow N$ が

$|f_1, f_2| := \sup_{x \in M} d_N(f_1(x), f_2(x)) < i_N$ ($N$の単射半径)

をみたせば，$v \in \Gamma(f^{-1}TN)$ が存在して，

$f_2(x) = \exp_{f_1(x)} v(x)$ と書くことができる。

上の指数写像は$N$の指数写像である。

この事実を使って，$\Delta(\exp_{F(x)} v(x))$ を計算する。　これは，指数写像を local coordinate で2次まで Taylor 展開して得たものである。

$$\Delta(\exp_F v) = \Delta F - J_F(v) + \varphi(v)L(v) + P(v)$$

ここで，$J_F$は Jacobi operator で2階楕円型，$\varphi(v)L(v)$は2階の operator で，$v$を fix して，$u \longmapsto \varphi(v)L(u)$ は linear，$P$は1階の2次以上の多項式型の operator である。

したがって(E.S.)の解$f_t$を $|F, f_t| < i_N$ の仮定の下で構成することは，次の発展方程式(*)の解を構成することと同値となる。

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -J(u) + \varphi(u)L(u) + P(u) & \text{on } M \times [0, \omega) \\ u = u_0 & \text{on } M \times \{0\} \end{cases}$$

ただし，(E.S.)の初期値$f_0$に対して，

$f_0(x) = \exp_{F(x)} u_0(x)$ である。

以下では，$F;M \longrightarrow N$ は stable harmonic map と仮定する。

$\Gamma(F^{-1}TN)$ 上の $L^2$－内積を

$$\langle u, v\rangle_{L^2} := \int_M h_{\alpha\beta}\, u^\alpha v^\beta \, d\mu_M$$

で定義すると，$J_F$ は $L^2$－self adjoint になる。

$F$ は stable だから，$^\exists \sigma > 0$ s.t.

$$\langle J_F(u), u\rangle_{L^2} \geqq \sigma \langle u, u\rangle_{L^2} .$$

さらに，$\Gamma(F^{-1}TN)$ 上の Sobolev space の norm を，

$$\|u\|_{H^m(\Gamma(F^{-1}TN))} = \langle J_F^m(u), u\rangle_{L^2}$$

で定義する。　以下 $\|\cdot\|_{H^m(\Gamma(F^{-1}TN))}$ を $\|\cdot\|_m$ と書く。

さらに，次の命題を得ることができる。

Proposition 3.1.

$m > \frac{1}{2}\dim M + 2$ に対して，ある正数 $\varepsilon$ が存在して，

$\|v\|_m < \varepsilon$ ならば，$T(v)(\cdot) = J_F(\cdot) - \varphi(v)L(\cdot)$ は

$H^m$－positive operator。

i.e. $^\exists \rho > 0$ s.t. $\langle T(v)(u), u\rangle_{H^m} \geqq \rho \langle u, u\rangle_{H^m}$.

Proposition 3.2.

$k > \frac{1}{2}\dim M + 1$ に対して，$\|v\|_{k+1}, \|w\|_{k+1} < 1$ ならば

$$\|P(v) - P(w)\|_k \leq C\|v - w\|_{k+1}(\|v\|_{k+1} + \|w\|_{k+1})$$

が成り立つ。

## §4. Proof of theorem.

Section 3 での議論によって，(E.S.) の解を構成する替りに，(*) の解を構成すればよいことがわかったわけだが，このsectionでは，(*)の解をBanach space $B_\infty$ で構成しよう。ここで $B_{T_0}$ $(0<T_0\leqq\infty)$ は以下のように定義される。

$$B_{T_0}:=C^0([0,T_0);H^m(\Gamma(F^{-1}TN)))\cap C^{1/2}([0,T_0);H^{m-1}(\Gamma(F^{-1}TN)))$$

であって，そのnorm $\|\cdot\|^*_{T_0}$ は

$$\|u\|^*_{T_0}:=\sup_{0\leq t\leq T_0}\|u(t)\|_m+\sup_{0\leq t,s\leq T_0}\frac{\|u(t)-u(s)\|_{m-1}}{|t-s|^{1/2}}$$

である。

次に述べる逐次近似によって，解を構成しよう。

$$v_0=u_0 \tag{4.1.}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_{j+1}}{\partial t}+J(v_{j+1})=\varphi(v_j)L(v_{j+1})+P(v_j)\\ v_{j+1}(0)=u_0\end{cases}\quad (j\geqq 0) \tag{4.2.}$$

(4.2.) は次の (4.3.) と同値.

$$v_{j+1}(t)=U_j(t,0)v_0+\int_0^t U_j(t,\xi)Pv_j(\xi)d\xi. \tag{4.3.}$$

ここで，$U_j$ は $-T(v_j)$ をgenerator とする，発展作用素で，$-T(v_j)$ は section3 で定義した Sobolev spaces の内積に関して self adjoint かつ positive であることによって，次の estimates を持つ。

(4.4.) $\|U_j(t,\xi)v\|_m \leqq \|v\|_m$

(4.5.) $\|U_j(t,\xi)v\|_m \leqq \dfrac{C}{(t-\xi)}\|v\|_{m-2}$

まず，(4.1.)－(4.2.)で得られた$\{v_j\}$に対する，apriori評価を示そう。

<u>Proposition 4.1.</u>

$m > \frac{1}{2}\dim M + 2$ に対して，

$K_j(T_0) = K_j = \sup_{0 \le t \le T_0} \|v_j(t)\|_m$ とおくと，

$K_0 T_0^{1/2} \le C$ ならば，$K>0$ が存在して，

$K_j < K \quad (j \geqq 0)$ かつ $K T_0^{1/2} \le C$ となる。

さらに，$K_0 \to 0$ とすれば，$K \to 0$ とできる。

(proof)

(4.3.) を評価すると，

$$
\begin{aligned}
\|v_{j+1}(t)\|_m &\leqq \|U_j(t,0)v_0\|_m + \int_0^t \|U_j(t,\xi)Pv_j(\xi)\|_m d\xi \\
&\leqq \|v_0\|_m + C\int_0^t \frac{1}{(t-\xi)^{1/2}}\|Pv_j(\xi)\|_{m-1} d\xi \qquad (4.6.) \\
&\leqq \|v_0\|_m + C\int_0^t \frac{1}{(t-\xi)^{1/2}}\|v_j(\xi)\|_m^2 d\xi
\end{aligned}
$$

となるから，

(4.7.) $K_{j+1} \leqq K_0 + C T_0^{1/2} K_j^2$

簡単な計算によって，$C K_0 T_0^{1/2} \leqq 1/4$ ならば，

$^{\exists}K > 0$ s.t. $K_j > K$ かつ $C K T_0^{1/2} \leqq 1/2$ を示すことができる。

また，$k_0 \to 0$ とすると，$k \to 0$ととれることは，上の計算からわかる。 $\square$

このapriori estimateと，M. Potier-Ferry [13]による発展方程式の解の構成法を使って，まずlocal solutionの存在，次にそこで得られた解を接続して，global solutionの存在を示す。

<u>Theorem 4.2.</u>

ある正の数 $\kappa$ と $T_0$ が存在して，$k_0 < \kappa$ ならば，(*) のuniqueな解が $B_{T_0}$ に存在する。

(proof)

初めに，$v_{j+1}(t) - v_j(t)$ を評価しよう。

$$v_{j+1}(t) - v_j(t) = (U_j(t,0) - U_{j-1}(t,0))v_0 + \int_0^t (U_j(t,\xi)Pv_j(\xi) - U_{j-1}(t,\xi)Pv_{j-1}(\xi))d\xi$$

したがって，右辺第一項の評価は次のようになる。

(4.8.) $$\|(U_j(t,0) - U_{j-1}(t,0))v_0\|_m \leq C\|v_j - v_{j-1}\|^*_{T_0}\|v_0\|_m$$

このestimateは，発展作用素のgeneratorの性質によるもの。[13, proposition 6]

右辺第二項の評価は次の通り，

$$\|U_j(t,\xi)Pv_j(\xi) - U_{j-1}(t,\xi)Pv_{j-1}(\xi)\|_m$$

$$\leq \|(U_j(t,\xi) - U_{j-1}(t,\xi))Pv_j(\xi)\|_m$$

$$+ \| v_{j-1}(t,\xi)(Pv_j(\xi) - Pv_{j-1}(\xi)) \|_m$$

(4.9.)
$$\leq C \| v_j - v_{j-1} \|^*_{T_0} \| Pv_j(\xi) \|_{m-1} (t-\xi)^{-\theta}$$
$$+ \| Pv_j(\xi) - Pv_{j-1}(\xi) \|_{m-1} (t-\xi)^{-1/2}$$
$$\leq C \| v_j - v_{j-1} \|^*_{T_0} \{ K^2 (t-\xi)^{-\theta} + 2K (t-\xi)^{-1/2} \}$$

ここで $\frac{1}{2} < \theta < 1$.

よって，(4.8) と (4.9) をあわせて，

(4.10.)
$$\| v_{j+1}(t) - v_j(t) \|_m \leq C (K_0 + K^2 T_0^{1-\theta} + 2K T_0^{1/2}) \times \| v_j - v_{j-1} \|^*_{T_0}$$

が得られた。

一方，一般に $u \in H^m$ に対して，次のような interpolation property がある。

(4.11.)
$$\| u(t) - u(s) \|_{m-1} \leq |t-s|^{1/2} \sup_{0\leq t\leq T_0} \| u(t) \|_m^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq T_0} \| \frac{\partial}{\partial t} u(t) \|_{m-2}^{1/2}$$
$$t, s \in [0, T_0]$$

この性質を使うために，$\frac{\partial}{\partial t} v_{j+1}(t) - \frac{\partial}{\partial t} v_j(t)$ を評価する。

$$\| \frac{\partial}{\partial t} v_{j+1}(t) - \frac{\partial}{\partial t} v_j(t) \|_{m-2}$$
$$\leq \| Pv_j(t) - Pv_{j-1}(t) \|_{m-2}$$
$$+ \| T(v_j(t)) v_{j+1}(t) - T(v_{j-1}(t)) v_j(t) \|_{m-2}$$
$$\leq 2K \| v_j(t) - v_{j-1}(t) \|_{m-1}$$
$$+ C \| v_{j+1}(t) - v_j(t) \|_m$$

$$\leq C \|v_j - v_{j-1}\|^*_{T_0} (2K + K_0 + K^2 T_0^{1-\theta} + 2K T_0^{1/2})$$

となるから，(4.11.)，(4.10) によって，

(4.12.) $\|v_{j+1} - v_j\|^*_{T_0} \leq C(K_0, K, T_0) \|v_j - v_{j-1}\|^*_{T_0}$

を得る。 ここで $C$ は $K_0, T_0 \to 0$ とすれば，

$C \to 0$ となる定数。

よって，$C<1$ となるように，$K_0, T_0$ をとれば，

$\{v_j(t)\}$ は $B_{T_0}$ で収束する。 それを $v(t)$ と書くと，

$v(t)$ は (*) の unique な solution となる。 □

<u>Theorem 4.3.</u>

ある正数 $\xi$ が存在して，$K_0 < \xi$ ならば，(*) は $B_\infty$

に unique な解を持つ。

(proof)

theorem 4.2. では，$K_0 < \xi$ の時，$[0, T_0]$ での solution

$v(t)$ を構成したが，この $v(t)$ に対して，

$\|v(t)\|_m < \xi \quad \forall n \geq 1, \ \forall t \in [0, nT_0]$

であることを示せばよい。 そのために，

$$|v|_{t_1} = \sup_{0 \leq t \leq t_1} \|e^{\beta t} v(t)\|_m$$

とおき，

$\exists \xi > 0$ s.t. $\forall t_1 > 0$，$\|v_0\|_m \leq \xi$ ならば $|v|_{t_1} \leq C \|v_0\|_m$

を示せばよい。　ここで$\beta$は$\beta\in(0,\rho)$であって、

$\rho$はproposition 3.1.でのconstant。

$v$は次の式をみたしている。

$$(4.13.)\quad v(t)=U(t,0)v_0+\int_0^t U(t,\xi)Pv(\xi)d\xi$$

作用素$U$は次のestimatesをみたす。

$$\|U(t,\xi)v\|_m\leq e^{-\beta t}\|v\|_m$$

$$\|U(t,\xi)v\|_m\leq\frac{ce^{-\beta t}}{(t-\xi)}\|v\|_{m-2}$$

したがって、(4.13.)は、

$$|v|_{t_1}\leq\|v_0\|_m+C\int_0^t(t-\xi)^{-1/2}e^{-\beta t}|v|_{t_1}^2d\xi$$

$$\leq\|v_0\|_m+C_0|v|_{t_1}^2$$

と評価できて、

$K_0\leq C_0/4$　ととれば、

$|v|_{t_1}\leq CK_0$　とできて、

求める評価

$$\|v(t)\|_m\leq CK_0e^{-\beta t}\qquad t\in[0,\infty)$$

を得る。

よって(*)は$B_\infty$にuniqueな解をもち、その解は、

exponential orderでdecayすることがわかった。 □

以上によって，$f_0$を初期値に持つ(E.S)の解は，

$$f(x,t) = \exp_{F(x)} v(x,t)$$

と表わされ，$C^{1/2}([0,\infty); H^{m-1}(M,N)) \cap C^0([0,\infty); H^m(M,N))$ に入る。 さらに，$\|f(\cdot,t) - F\|_m \leq Ce^{-\beta t}$ を示すことができて，解 $f$ は，harmonic map $F$ に exponential order で decay することがわかる。

**References**


[1] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps. *London Math. Soc.* **10** (1978), 1-68.

[2] J. Eells and L. Lemaire, "Selected Topics on harmonic maps." C. B. R. N. Regional Conference Serise, 1980.

[3] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mapping of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.* **86** (1964), 109-160.

[4] J. Jost, "Harmonic Mapping Between Riemannian Manifolds." Proc. Cetre Math. Analy., Australian National Univ. 1983.

[5] R. Hamilton, "Harmonic maps of manifolds with boundary." L. N. M. **471**, Berlin-Heiderberg-New York, Springer-Verlag 1975.

[6] P. Hartmann, On homotopic hamonic maps. *Canad. J. Math.* **19** (1967), 673-687.

[7] H. Naito, Asymptotic behavior of solutions to Eells-Sampson equations near stable harmonic maps. *preprint.*

[8] H. Naito, *in preparation.*

[9] S. Nishikawa, On the Neumann problem for the nonlinear parabolic equation of Eells-Sampson and harmonic mappings. *Math. Ann.* **249** (1980), 177-190.

[10] S. Nishikawa, On the existence of global solutions of the nonlinear parabolic equation of Eells-Sampson over product manifolds. *Proc. A. M. S.* **82** (1981), 369-373.

[11] S. Nishikawa, "Harmonic map の存在と応用 ." Report on Global Analysis, 1980.

[12] A. Pazy, "Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations." New York-Berlin-Heiderberg-Tokyo, Springer-Verlag 1983.

[13] M. Poiter-Ferry, The linearization principle for the stability of solutions of quasilinear parabolic equations. *Arch. Ratio. Mech. Anal.* **77** (1981), 301-330.

[14] L. Simon. Asymptotic for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problem. *Ann. Math.* **118** (1983), 525-571.

[15] L. Simon, Asymptotic behavior of minimal submanifolds and harmonic maps. *Proc. Sympo. prue Math.* 44 (1986), 369-377.

[16] R. T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings. *Proc A. M. S.* **47** (1975), 229-236.

[17] M. Struwe, On the evolution of harmonic mappings of Riemann surfaces. *Comm. Math. Helv.* **60** (1985), 558-581.