数理解析研究所講究録
第 626 巻 1987 年 184-193


# 曲面の平均曲率を保つ等長的変形について

東北大 教養 剱持 勝衛

3次元ユークリッド空间 $\mathbb{R}^3$ で，曲面(片)の族 $X_t(u,v)$ を考える，ここで $(u,v)$ は局所座標，$t$ はパラメーターである。

定義. $\{X_t\}$ が $H$-変形とは，

(1) $X_t$ が等長的, i.e., $dX_t\cdot dX_t = dX_{t'}\cdot dX_{t'}$，且

(2) $X_t$ の平均曲率 $H_t$ が，$H_t = H_{t'}$，をみたすこと。

2次元の曲面であることから，これは，$X_t$ が等長的で且主曲率が同じような変形といってもよい。$\mathbb{R}^3$の運動によって変形されるようなものは，自明な $H$-変形と呼ばれる。

非自明な $H$-変形の有名な例として，懸すい面からら線面へと変わる一連の曲面族がある。これらは互に等長的であってかつ全て極小曲面であるので，$H$-変形である。

より一般に，O. Bonnet は 1867年に次の定理をえた：

定理（Bonnet）$R^3$内の任意の平均曲率一定な曲面片 $X$ に対して，$X$の非自明な $H$－変形 $X_t$，$X_0=X$，が存在する。

注意．$X$が一定な平均曲率をもつ回転面の時，このような $X_t$ は具体的に与えられている．（ DoCarmo & Dajczer [4] を見よ．）（ H は X の平均曲率とする。）

$H$≠一定な曲面の $H$－変形は常に存在するわけではない。一般論は，E.Cartan (1942)，W.Scherrer (1957)，Tribuzy (1980)，S.S.Chern (1985)……等によって研究されている．代表的な事実として次をのべておこう：

$X\subset R^3$が 非自明な $H$－変形を許容すれば，

(a) $X$は $W$－曲面でなければならぬ [1]；

(b) $X$は，一般に 6コの任意定数に依存して決まり，かつ，$ds^2 = (\mathrm{grad}\ H)^2/(H^2-K)\cdot dX^2$ の曲率は常に $-1$ である [2]．

これらの事実から，H≠一定の時，H-変形を許容するような曲面は相当に限られたクラスをつくることがわかるが，具体的な例をみつけられるであろうか？

$X\subset R^3$ を，向きづけされ，へそ点のない曲面片とする。$\{e_1, e_2, e_3\}$ を $X$のダルブー標構としよう，i.e.,

これらは正規直交系であって，$e_3$ は $X$ の各点で法単位ベクトルとする．

$$dX = w_1 e_1 + w_2 e_2 \,, \qquad de_i = \sum_{j=1}^{2} w_{ij}\, e_j + w_{i3}\, e_3, \quad i=1,2$$

は，$X$ のダルブー方程式系である，従って，

$\mathrm{I} = dX \cdot dX = w_1^2 + w_2^2$ が $X$ の第一基本形式であり，第２基本形式は，$w_{i3}$, $i=1,2$, で決まる。固定した $w_1, w_2$ に対して，H，K（K はガウス曲率）を保存する $X$ の曲面族を構成したいので，ある $\alpha$ をみつけて，

$$(1) \quad \begin{pmatrix} w_{13} \\ \\ w_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H+\sqrt{H^2-K}\cos\alpha, & \sqrt{H^2-K}\sin\alpha \\ \\ \sqrt{H^2-K}\sin\alpha, & H-\sqrt{H^2-K}\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \\ w_2 \end{pmatrix}$$

と書くのが便利である。この記方の長所として，任意の $\alpha$ に対して，ガウスの方程式が満たされることがある。$\alpha$ は，$e_i$, $i=1,2$ に依存しているので，その「微分」は，

$$(2) \quad D\alpha := d\alpha + 2w_{12} = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \,,$$

としておくのがよい，従って，$\alpha_i$, $i=1,2$, は $(0,1)$ 型のテンソル場になる。(1)の外微分をとって，

$$(3) \quad D\alpha = -\sin\alpha \cdot \frac{(H_1 w_1 - H_2 w_2)}{\sqrt{H^2-K}} + \cos\alpha \cdot \frac{(H_2 w_1 + H_1 w_2)}{\sqrt{H^2-K}} - * \, d\log\sqrt{H^2-K} \,,$$

ここで、　$dH = \sum_{i=1}^{2} H_i w_i$，そして　$*$は　Hodge の$*$－作用素である。第2基本形式を微分したので、そこから導かれる式，(3)，はコダッチの方程式である。よって，曲面論の基本定理と(1)での注意より，(3)をみたす$\alpha$が無数にあれば，$w_1, w_2$；$H$，$K$とその$\alpha$を使って，無数の曲面が存在して，それらは互に等長的で且平均曲率$H$も保たれる。

故に，(3)を，与えられた$w_1, w_2$；$H$，$K$に対して，$\alpha$を未知関数とする偏微分方程式とみて，その積分可能条件を求めることにしよう：

(2)と(3)から，(3)の外微分は，

(4)　$$-2P_1 \sin\alpha + P_2 \cos\alpha + P = 0,$$

ここで，

$$P_1 := H_{12}\sqrt{H^2-K} - H_2(\sqrt{H^2-K})_1 - H_1(\sqrt{H^2-K})_2,$$

$$P_2 := (H_{22}-H_{11})\sqrt{H^2-K} + 2H_1(\sqrt{H^2-K})_1 - 2H_2(\sqrt{H^2-K})_2,$$

$$P := (H^2-K)\left(\Delta \log\sqrt{H^2-K} - 2K\right) - |\mathrm{grad}\, H|^2,$$

$H_{ij} := \nabla_j H_i$　を得る。

$P_1, P_2, P$には，$\alpha$が含まれてないことが重要である。(4)は，与えられた曲面に対しては，その曲面から定まる$\alpha$に

対して成立する．一方，(4)が$\alpha$について恒等的に成立すれば(3)は積分可能となり，古典的偏微分方程式論から，無限個の$\alpha_t$, ~~$t\in R$~~, が存在する。

定理1．与えられた，向きづけ可能，へそ点のない曲面片$X\subset R^3$に対して，

Xの H-変形が存在するための必要十分条件は，Xの HとKが　$P_1 = P_2 \equiv 0$　を満足することである。

証明．Xの H－変形 $X_t$ が存在するならば，(4)が無数の$\alpha_t$について成立．ところが，$P_1$, $P_2$, $P$ は $t$ から独立であるから，$P_1 = P_2 = P \equiv 0$．逆に，Xに対して，$P_1 = P_2 = 0$ なら，(4) から $P = 0$．故に(3)は完全積分可能である。

Q.E.D.

注意．この定理1は，最初に W. Scherrer [6] によって証明されたが，彼の計算は任意の局所座標に対して成されたために計算式が非常に長くなり，その結果読む人もなく，忘れさられていた。

一方私達の方法では，この必要十分条件を得るのに重要な式は唯一つ，(3)式であって，それはコダッチの式の別表現であることがわかる点が重要である。

系 ある曲面$X$が $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2=0$ を満足するなら，$X$は自然に $\mathbb{P}=0$ をも満たす。

注意．平均曲率一定な曲面は，明らかに $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2=0$ を満たす．よって，H-変形が存在する．これがBonnetの定理であった。

応用（H≠一定な曲面のH-変形の具体例）．$X\subset\mathbb{R}^3$は，ガウス曲率 $K=$一定と仮定する。このような曲面は，沢山あるが，そのなかで $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2=0$ を満たすものがあるだろうか？，もしあれば，そのH-変形は何であろうか？

定理2．$X\subset\mathbb{R}^3$は定曲率曲面で $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2\equiv 0$ を満たすとする．その時，$K\equiv 0$．

証明．もし $H\equiv 0$ なら，$\mathbb{P}\equiv 0$ を考えて $K\equiv 0$．以後，$H\neq 0$ の近傍でのみ考える．

$$f_i := \frac{H_i}{H^2-K}, \quad (H^2-K\neq 0)$$

なる(0,1)−型のテンソル場を考えよう。$K=$一定，$\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2=0$ から，$f_i$の共変微分は $f_{ij}=\lambda\delta_{ij}$ となることが

わかる．$\Phi=0$ より，　$\lambda=\dfrac{K}{H}$ である。$f_i$ にリッチの恒等式を使って，$KH_i\equiv 0$，$i=1,2$，i.e.，$K\equiv 0$ をえる。

Q.E.D

以後，$X\subset R^3$ の計量は $ds^2=du^2+dv^2$，$\omega_1=du$，$\omega_2=dv$ とする。$\Phi_1=\Phi_2=0$ は，

$$
(5)\quad \begin{cases} HH_{uv}-2H_uH_v=0, \\ H(H_{vv}-H_{uu})+2(H_v^2-H_u^2)=0 \end{cases}
$$

と同値である。(5)の一般解は，$H\equiv 0$ 又は，

$$
(6)\qquad H(u,v)=\frac{1}{a(u^2+v^2)+bu+cv+d},\qquad (a,b,c,d\in R)
$$

である。

$H\equiv 0$，$K\equiv 0$ である曲面は $R^3$ で全測地的，特にいたる所へそ点となり，これは除かれる。

$a=b=c=0$ の場合，$H=$ 一定 $(\neq 0)$，$K\equiv 0$ となり，円柱の一部で，この場合の $H$-変形は，円柱の族，しかし $u$-曲線，$v$-曲線が一定角度で回転してゆく．自明でないが面白くない $H$-変形である。

$a^2+b^2+c^2\neq 0$ の場合，解(6)が $\Phi=0$ を満足することから，$a=0$ でなければならぬ．よって，$K\equiv 0$，しかし $H\neq$ 一定な場合で，(5)の解は

$$H(u,v) = \frac{1}{bu+cv+d}, \quad (b^2+c^2 \neq 0) .$$

$(u,v)$－平面の直交変換，$X$ の相似変換により，

(7) $$H(u,v) = \frac{1}{2u}$$

の場合をしらべれば十分である。この時，(3) は

(3)′ $$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \frac{\sin\alpha}{u}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{1-\cos\alpha}{u} .$$

(3)′ の一般解は，$t$ をパラメーターとして，

(8) $$\tan\frac{\alpha_t}{2} = \frac{ut}{1-vt} .$$

(7), (8) を (1) に代入して，曲面族 $X_t$ を得る：

$X_t$ の満たすべき全微分方程式系は，

(9) $$\begin{cases} \dfrac{\partial X_t}{\partial u} = e_1, & \dfrac{\partial X_t}{\partial v} = e_2, \\ \dfrac{\partial e_1}{\partial u} = \dfrac{(1-vt)}{u\{(1-vt)^2+u^2t^2\}}e_3, & \dfrac{\partial e_1}{\partial v} = \dfrac{t(1-vt)}{(1-vt)^2+u^2t^2}e_3, \\ \dfrac{\partial e_2}{\partial u} = \dfrac{t(1-vt)}{(1-vt)^2+u^2t^2}e_3, & \dfrac{\partial e_2}{\partial v} = \dfrac{ut^2}{(1-vt)^2+u^2t^2}e_3, \\ \dfrac{\partial e_3}{\partial u} = \cdots\cdots, & \dfrac{\partial e_3}{\partial v} = \cdots\cdots . \end{cases}$$

(9)より，$\dfrac{\partial e_1}{\partial u} = \dfrac{1-vt}{ut} \cdot \dfrac{\partial e_1}{\partial v}$，$\dfrac{\partial e_2}{\partial u} = \dfrac{1-vt}{ut} \cdot \dfrac{\partial e_2}{\partial v}$．

故に，$e_1, e_2, e_3$ は全て，$\dfrac{u}{1-vt}$ の関数となる。
$u/(1-vt) = s$ とおいて，(9)を書き直すと，

$$
(10) \quad \begin{cases} \dfrac{de_1}{ds} = \dfrac{1}{s(1+t^2s^2)} e_3(s), \\ \dfrac{de_3}{ds} = -\dfrac{1}{s(1+t^2s^2)} e_1(s) - \dfrac{t}{1+t^2s^2} e_2(s), \\ \dfrac{de_2}{ds} = \dfrac{t}{1+t^2s^2} e_3(s) \end{cases}
$$

をみたす。これは，$s$ を弧長とする，ある空間曲線 $x_t(s)$ のフルネーの式で，$x_t(s)$ の曲率 $= 1/s(1+t^2s^2)$，捩率 $= -t/(1+t^2s^2)$，$x_t$ の接ベクトル $= e_1$，主法線ベクトル $= e_3$，従法線ベクトル $= e_2$ となっている。故に $x(s)$ の展直平面 $= X_t$ の接平面である。$t = 0$ の時の曲線 $x_0(s)$ は有名な平面上の対数ら線であるから，$X_0$ は対数ら線上の円柱面（の一部）である。$t > 0$ の時，$x_t(s)$ の捩率 $k_2$ と曲率 $k_1$ の比は $k_2/k_1 = -ts$．一般に，この曲線から作られる展直曲面は錐面であることが知られている。故に，我々は次の定理をえた。

定理3. $X \subset \mathbb{R}^3$ を，へそ点のない平坦な曲面，i.e, $K \equiv 0$ な曲面片．もし $X$ の平均曲率 $H$ が一定なら，$X$ の $H$-変形 $X_t$ は，$k_1(s) = \dfrac{1}{s(1+t^2s^2)}$，$k_2(s) = \dfrac{-t}{1+t^2s^2}$ の空間曲線 $x_t(s)$ の展直曲面である。

特に，$X_0$ は対数ら線上の円柱面である。

注意．この定理の一部は，Roussos [5] によっても，独立に得られた。

ここでのべた大部分は，Colares との共同研究 [3] によるものであるが，定理3の $X_t$ の幾何学的構成に関する所は，著者による。

REFERENCES


[1] E.Cartan, Sur les couples de surfaces ....,Bull.Sci.Math., 66(1942), 1-30.

[2] S.S.Chern, Deformations of surfaces Preserving principal curv., Diff.Geometry and Complex Analysis, Springer(1985), 155-163.

[3] G.Colares and K.Kenmotsu, Isometric deformations of surfaces preserving the mean curvature, preprint(1986).

[4] DoCarmo and Dajczer, Helicoidal surfaces...., T.M.J.,34(1982)

[5] I.M.Roussos, Mean curvature pres.,Ph.D. Thesis,Univ.of Minnesota.

[6] W.Scherrer, Die Grundgleichungen der Flächentheorie ll, Comm.Math. Helv., 32(1957), 73-84.