数理解析研究所講究録
第 627 巻 1987 年 53-64

定数係数確率偏微分方程式について

神戸大自然科学　藤田安啓 (Yasuhiro Fujita)

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}, P)$ を完備な確率空間として，その上の 1 次元 Wiener process $W(t)$ を考える。確率偏微分方程式（以下 S.P.D.E. と略す）とは

$$
(1)\quad \begin{cases} du(t,x) = A(x,D)u(t,x)\,dt + B(x,D)u(t,x)\,dW(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0<t<T \quad x\in\mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \qquad x\in\mathbb{R}^N \end{cases}
$$

という方程式で記述される確率積分項を含む偏微分方程式である。ここで，$A(x,D)$，$B(x,D)$ は $\mathbb{R}^N$ 上の微分作用素，$u_0(x)$ は与えられた函数である。(1) の方程式の解の存在と一意性については，$L^2(\Omega)$ の範囲内では Pardoux [7]，Krylov - Rozovski [4] Prato [8] らにより適当な (t,x) の函数空間で調べられている。そこで用いられている条件は，おおまかに言って，$A(x,D)$ の条件のよさ（例えば $e^{A(x,D)t}$ が解析的半群を生成するなど）により，確率積分項 $B(x,D)u(t,x)dW(t)$ をうまく処理するというも

のであった。そこでは，確率積分項 $B(x, D)\,u(t, x)\,dW(t)$ が(1)に入っているために解の存在と一意性は成り立ちにくくなっている。ところが Prato [9] は方程式(1)を適当な変換により，偏微分方程式に直し，(1)の解が pathwise に一意に存在するための条件を求めた。その条件は $L^2(\Omega)$ の場合と違い，$A-\frac{1}{2}B^2$ という微分作用素の性質が問題で，pathwise に考える限りでは確率積分項は解の存在と一意性に役立っていることさえある。

ただし，Prato [9] では $e^{tB(x, D)}$ が群（半群ではない。）を生成することを仮定している。

このように(1)の解は $L^2(\Omega)$ で考えるか，Pathwise で考えるかにより，確率積分項の役割は全く違うものになっている。この講究録では(1)の方程式を定数係数の場合（すなわち，$A(x, D) = A(D)$，$B(x, D) = B(D)$ のとき）に限って，確率積分項の役割を調べようと思う。そして，多項式 $A(i\xi)$，$B(i\xi)$ $(\xi \in R^n)$ により Pathwise および $L^2(\Omega)$ で(1)の解が存在するための条件を特徴づける。その結果，上の事情が定数係数の場合に説明される。

記述と結果

以下，函数はすべて $\mathbb{R}^N$ 上の $\mathbb{C}$－valued なものとする。

$\phi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対し，その Fourier 変換 $\mathcal{F}\phi$ およびその逆変換 $\mathcal{F}^*\phi$ を

$$(\mathcal{F}\phi)(\xi) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \ (2\pi)^{-N/2} \int_{\{|x|\leq A\}} e^{-ix\cdot\xi} \ \phi(x)\,dx$$

$$(\mathcal{F}^*\phi)(x) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \ (2\pi)^{-N/2} \int_{\{|\xi|\leq A\}} e^{ix\cdot\xi} \ \phi(\xi)\,d\xi$$

で定義する。ここで，$i=\sqrt{-1}$，$|\cdot|$ は $\mathbb{R}^N$ の norm，$x\cdot\xi$ は $\mathbb{R}^N$ での x と ξ の内積，また l.i.m. は $L^2(\mathbb{R}^N)$ での limit である。

$H^p = H^p(\mathbb{R}^N)$ $(p \in \mathbb{N}_0)$ を norm

$$\|\phi\|_p = \left[\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|)^{2p} \, |\mathcal{F}\phi(\xi)|^2 \, d\xi \right]^{1/2}$$

を持つ Hilbert 空間とする。$\mathbb{N}_0$ は非負の整数全体を表す。また，$H^\infty = \bigcap_{p\in\mathbb{N}_0} H^p$ とおく。$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ が multi-index とは $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ $(1 \leq i \leq N)$ となることであり，$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$，$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_N^{\alpha_N}$ $(\xi \in \mathbb{R}^N)$，$D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_N)^{\alpha_N}$ と書く。よく知られた通り，$H^p = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^N) : D^\alpha\phi \in L^2(\mathbb{R}^N) \ {}^\forall|\alpha| \leq p\}$ である。$C_b^n(\mathbb{R}^N)$ は $\mathbb{R}^N$ 上の n 階までの有界で連続な導函数を持つ函数からなる集合で

$$|f|_n = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \sum_{|\alpha|\le n} |D^\alpha f(x)| \qquad f\in C_b^n(\mathbb{R}^N)$$

なるnormを与える。Sobolevの埋め込み定理より，$f\in H^{[N/2]+1+p}(\mathbb{R}^N)$（$p\in\mathbb{N}_0$）は$C_b^p(\mathbb{R}^N)$なるmodificationを持ち，

$$|f|_p \le C_{N,p}\,\|f\|_{[N/2]+1+p}$$

なる不等式を満たす。ここで$C_{N,p}$はNとpにのみdependする定数である。また，$[x]$は$x\in\mathbb{R}$を超えない最大の定数である。$C_b^\infty(\mathbb{R}^N)=\bigcap_{p=0}^{\infty} C_b^p(\mathbb{R}^N)$とおく。微分作用素$A(D)$，$B(D)$を$A(D)=\sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha D^\alpha$，$B(D)=\sum_{|\beta|\le l} b_\beta D^\beta$で定める。ここで$a_\alpha$．$b_\beta\in\mathbb{C}$，$l$，$m\in\mathbb{N}_0$である。完備な確率空間$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},P)$上の1次元Wiener process $w(t)$を一つ取る。$T>0$を任意に選んで固定する。

さて，考えるべきS.P.D.E.は

$$(2)\quad \begin{cases} du(t,x) = A(D)u(t,x)\,dt + B(D)u(t,x)\,dw(t) \\ \qquad\qquad\qquad 0< t\le T \qquad x\in\mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x)\in H^\infty, \quad x\in\mathbb{R}^N \end{cases}$$

である。

定義１．　$[0,T]\times\mathbb{R}^N\times\Omega$ から $\mathbb{C}$ への函数 u が(2)の解であるとは，次の(a)～(d)を満たすことである。

(a)　$u(t,x,\omega)$ は各(t,x)について $\mathcal{F}_t$－可測。

(b)　$u(t,x,\omega)$ は各ωについて(t,x)連続。

(c)　すべての(t,ω)に対し，$u(t,x,\omega)$はxについて無限階微分可能，各ωについてすべての導函数は(t,x)－連続である。

(d)　$P(\tilde{\Omega})=1$ なる $\tilde{\Omega}\in\mathcal{F}$ 上で

(3)
$$u(t,x)= u_0(x) +\int_0^t A(D)\,u(s,x)ds +\int_0^t B(D)\,u(s,x)\,dW(s)$$

がすべての(t,x)について成立する。ここで $u_0(x)$ は smooth な version を取る。

この定義では(2)の解として，超函数の意味の微分ではなく，普通の意味での微分可能な函数を考えている。

定義２　方程式(2)が well-posed であるとは

(a)　$^\forall u_0\in H^\infty$ に対して (2)が $u\in L^2(\Omega\,;C(0,T;H^p))(^\forall p\in\mathbb{N}_0)$ となる解を持ち，一意である。

(b) $\forall \varepsilon>0$ $\forall p\in \mathbb{N}_0$ に対し，$\delta=\delta(\varepsilon,T)>0$ と $q=q(p)\in\mathbb{N}_0$ が存在して，$\|u_0\|_q<\delta$ なら $E\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_p^2<\varepsilon$ とできることである。

さて，定理をのべよう。$\varepsilon>0$ に対し，多項式 $H_\varepsilon(\xi)$ を

$$H_\varepsilon(\xi)=2\,\mathrm{Re}\,A(\xi)-(1-\varepsilon)\{\mathrm{Re}\,B(\xi)\}^2+\{\mathrm{Im}\,B(\xi)\}^2\qquad \xi\in\mathbb{R}^N$$

で定める。ここで $\mathrm{Re}\,z$，$\mathrm{Im}\,z$ は $z\in\mathbb{C}$ の実数部分，虚数部分を表す。

定理 1　$\exists\varepsilon>0$ が存在して，$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}H_\varepsilon(\xi)<\infty$ ならば，(2) は P-a.s. で $C([0,T];H^\infty)$ に属する解を持つ。さらに v を P-a.s. で $C([0,T];H^\infty)$ に属する (2) の別の解とすると，

$$P(\,u(t,x)=v(t,x)\quad \forall(t,x)\,)=1\ 。$$

定理 2　(2) が well-posed $\iff \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}H_2(\xi)<\infty$

定数係数の場合に限れば Pardoux [7]，Krylov - Rozovski [4]，Prato [8] の条件は $\exists\alpha>0$ $\exists k>0$ が存在して，$H_2(\xi)=-\alpha|\xi|^\ell+k$ に同値である。

定理1，2より確率積分項 $B(D)u(t,x)dW(t)$ は well-posed を成り立ちにくくしている。実際 $H_2(\xi)=2\mathrm{Re}\,A(\xi)+|B(\xi)|^2$ である。一方，解の存在と一意性を，$\mathrm{Im}\,B(\xi)$ は成り立ちにくく，$\mathrm{Re}\,B(\xi)$ は成り立ちやすくしている。

いくつか例をあげる。

例1　$A(D)=0$，$B(D)=\Delta\ (=\sum_{j=1}^{N}(\partial/\partial x_j)^2)$ とする。このとき，

$$H_\varepsilon(\xi)=-(1-\varepsilon)\{\sum_{j=1}^{N}\xi_j^2\}^2 。$$

従って，このとき，(2) は一意に解を持つが，well-posed でない。この例は Prato [9] の仮定を満たさないが，解が存在する例である。($e^{\Delta t}$ は $t<0$ で $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上 define できない。)

例2
$$\begin{cases} du/dt\,(t,x)=-\Delta u(t,x) & 0<t<T \quad x\in\mathbb{R}^1 \\ u(0,x)=1/(1+|x|^2)\in H^\infty \end{cases}$$

は解を持たないが，

$$
\begin{cases}
du(t,x) = -\Delta u(t,x)\,dt + \Delta u(t,x)\,dW(t) \\
u(0,x) = 1/(1+x^2)
\end{cases}
$$

は $H_\varepsilon(\xi) = \xi^2 - (1-\varepsilon)\xi^4$ より一意解を持つ。従ってこの例は $\Delta u(t,x)\,dW(t)$ がついたために解が存在しやすくなっている。

定理の証明の sketch

（定理 1）　$U(\xi,t)$ を

$$U(\xi,t) = \exp[\tilde{A}(\xi,t)]\,(\mathcal{F}u_0)(\xi)$$

で定義する。ここで $\tilde{A}(\xi,t) = t[A(\xi) - (1/2)\{B(\xi)\}^2] + B(\xi)W(t)$。

$$|e^{z} - e^{\tilde{z}}| \le e\,(e^{\mathrm{Re}\,z} + e^{\mathrm{Re}\,\tilde{z}})\,|z - \tilde{z}| \qquad z,\ \tilde{z} \in \mathbb{C}$$

という不等式を使って，$0 \le s,\ t \le T$ に対し

$$
\begin{aligned}
&|U(\xi,t) - U(\xi,s)|^2 \\
&\le 2e^2\{\exp[2\mathrm{Re}\,\tilde{A}(\xi,t)] + \exp[2\mathrm{Re}\,\tilde{A}(\xi,s)]\}\,|\tilde{A}(\xi,t) - \tilde{A}(\xi,s)|^2\,|\mathcal{F}u_0(\xi)|^2
\end{aligned}
$$

$$\leq C_1(1+|\xi|)^{2(\ell\vee 2m)}|\mathcal{F}u_0(\xi)|^2\{|t-s|^2+|W(t)-W(s)|^2\}$$

$$\times\Big[\exp(H_\varepsilon(\xi)t)\exp(2\mathrm{Re}\,B(\xi)W(t)-\varepsilon t\{\mathrm{Re}\,B(\xi)\}^2)+\exp(H_\varepsilon(\xi)s)$$

$$\times\exp[2\mathrm{Re}\,B(\xi)W(s)-\varepsilon s\{\mathrm{Re}\,B(\xi)\}^2)\Big]$$

$$\leq C_2(1+|\xi|)^{2(\ell\vee 2m)}|\mathcal{F}u_0(\xi)|^2\{f_\varepsilon(t)+f_\varepsilon(s)\}\{|t-s|^2+|W(t)-W(s)|^2\}.$$

ここで　$f_\varepsilon(t)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\exp[-\varepsilon t x^2+2xW(t)]$。$f_\varepsilon(t)$ は $t=0$ で連続でないが，$t^a f_\varepsilon(t)$ $(a>0)$ は $[0,T]$ で P-a.s で連続である。（the law of the iterated logarithm を使う）。以上より，$^\forall p\in\mathbb{N}$。

$$\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|)^{2p}|U(\xi,t)-U(\xi,s)|^2\,d\xi$$

$$\leq C_2\|u_0\|_{p+(\ell\vee 2m)}\{f_\varepsilon(s)+f_\varepsilon(s)\}\{|t-s|^2+|W(t)-W(s)|^2\}$$

従って，$u\equiv\mathcal{F}^*U$ は P-a.s. で $C([0,T];H^\infty)$ に入る。Sobolev の埋め込み定理などから，この u が (2) の解であることがわかる。一意性も同様にわかる　//

（定理２）　$\Rightarrow$

$$|U(\xi,t)|^2=\exp[H_2(\xi)t]\exp[2\mathrm{Re}\,B(\xi)W(t)-\frac{1}{2}\{2\mathrm{Re}\,B(\xi)\}^2]|\mathcal{F}u_0(\xi)|^2$$

と不等式

$$E \sup_{0\le t\le T} \exp\left[a w(t) - \frac{1}{2} a^2 t \right] \le C(T)\,(1+a^2) \qquad a \in \mathbb{R}$$

より

$$E \sup_{0\le t\le T} |U(\xi,t)|^2 \le C_3 \left[1 + \{2\,\mathrm{Re}\, B(\xi)\}^2 \right] |\mathcal{F} u_0(\xi)|^2 \text{。}$$

$$\therefore \quad E \sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|)^{2p} |U(\xi,t)|^2 d\xi \le C_4 \|u_0\|_{p+2m} .$$

これより、⇒は明らか。

⇐　次の2条件が同値であることに注意[1]

① $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} H_2(\xi) < \infty$

② $^\exists K_1, K_2 > 0 \qquad H_2(\xi) \le K_1 \log(1+|\xi|) + K_2$。

これを使って、$\lim_{n\to\infty} u_0^n = 0$ in H^∞ だが、

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, E \sup_{0\le t\le T} \|u^n(t)\|_0^2 \ge 1$ なる例が作れる。ここで $u^n(t)$ は

$u_0^n \in H^\infty$ に対応する(2)の解。

詳しくは[11]を見られたい。

REFERENCES

[1] L. Garding, Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math.

[2] A. Ichikawa, Linear stochastic evolution equations in Hilbert spaces, J. Differential Equations 28 (1978) 266 – 283.

[3] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North – Holland / Kodansha (1981).

[4] N.V. Krylov and B.L. Rosovsky, Cauchy problem for linear stochastic partial differential equations, Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat., 41 (6), (1977), 1329 – 1347.

[5] H. Kunita, Limit theorems for stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms, Stochastic differential systems, Proceedings of the Bohn Conference, to appear.

[6] S. Mizohata, The Theory of Partial Differential Equations, Cambridge University Press (1973).

[7] E. Pardoux, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes Stochastics, (1979) 127 -167.

[8] G. Da Prato, Some results on linear stochastic evolution equations in Hilbert spaces by the semi - group methods, Stochastic Anal. Appl. 1 (1983), 57 - 88

[9] G. Da Prato, M. Iannelli and L. Tubaro, Some results on linear stochastic differential equations in Hilbert space, Stochastics 6, (1982), 105 - 116.

[10] G. DA Prato and L. Tubaro, Some results on semilinear stochastic differential equations in Hilbert spaces, Stochastics 15 (1985), 271 - 281

[11] Y. Fujita, Linear stochastic partial differential equations with constant coefficients, to appear in J. Math. Kyoto Univ.