

Lusin の面積積分と最大関数

東北大学教養部 金子 誠 (Makoto Kaneko)

u は、上半平面 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ で調和な関数とする。これに対して、その Lusin の面積積分 $A_\alpha u$ は

$$(A_\alpha u)^2(x) = \int_{\Gamma_\alpha(x)} |\nabla u(y,s)|^2 s^{1-n} dy ds$$

で定義される。ここで、 $\Gamma_\alpha(x) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \mid |x-y| < \alpha s\}$, そして、 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ の点は $(x,t), (y,s)$ ($x,y \in \mathbb{R}^n; t,s \in (0, \infty)$) のように表示する。一方、最大関数 $N_\alpha u$ は、次のように定義する。

$$(N_\alpha u)(x) = \sup \{ |u(y,s)| \mid (y,s) \in \Gamma_\alpha(x) \}.$$

これらの間には、ノルム同値 $\|N_\alpha u\|_p \approx \|A_\alpha u\|_p$ ($0 < p < \infty$) のあることは良く知られている。 $A_\alpha u$ を $N_\alpha u$ で評価する事を、もう少し精密に考えてみる。

$|\nabla u|^2 = \Delta|u|^2/2$ であるから、 $(A_\alpha u)^2(x) = \int_{\Gamma_\alpha(x)} \Delta|u|^2(y,s) s^{1-n} dy ds / 2$ となり、さらに、 $|u|^2$ は劣調和関数である。そこで $|u|^2$ を劣調和関数で置き換えたものを考えてみようというのが、McConnell の考えである。McConnell の結果は 内山氏により改良された。それをもう少し改良することができる。

$A = (a_{jk})$ を $(n+1)$ -次元の複素正方行列とし、 b_1, \dots, b_{n+1} は複素数とする。そして、微分演算子 L を次で定義する。

$$L = \sum_{j,k=1}^{n+1} a_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n+1} b_j \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

ただし、 x_{n+1} は $(n+1)$ -番目の変数 t をあらわす。 A が非負エルミート行列で、 b_1, \dots, b_{n+1} が実数のとき、次のことがわかる。

$$u \in C^2(\mathbb{R}_+^{n+1}), Lu = 0 \Rightarrow L|u|^2 = ([A + \bar{A}] \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}) \geq 0.$$

Example 1. $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty) \Rightarrow \Delta|u|^2 = 2|\nabla u|^2.$

Example 2. $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ において $\Delta_x u_0 - \partial u_0 / \partial t = 0$ とする。そして、 $u(x, t) = u_0(x, t^2/4n)$ と置くと、 $\Delta_x u - 2nt^{-1} \partial u / \partial t = 0$, $(\Delta_x - 2nt^{-1} \partial / \partial t) |u|^2 = 2|\nabla_x u|^2$. Calderón-Torchinsky は

$$\int_{\Gamma_\alpha(x)} \left| \frac{\partial}{\partial x_j} u(y, t) \right|^2 t^{1-n} dy dt \quad (j = 1, \dots, n)$$

を調べている(もっと一般的な nonisotropic な場合を扱っている)。

Example 3. McConnell は Example 1 に関して次のような面積積分を研究している。 v は $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ で非負劣調関数とする。このとき密度が Δv である正測度 μ (Riesz measure) があるので、これを用いて面積積分 $S_\alpha v$ を

$$(S_\alpha v)(x) = \int_{\Gamma_\alpha(x)} s^{1-n} d\mu(y, s)$$

と定義した。最初に導入した $A_\alpha u$ との関係は、 $(A_\alpha u)^2 = S_\alpha |u|^2 / 2$ である。

以上の事を背景として次のような定義をする。

v は $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 上の局所可積分な関数であって、超関数の意味の L_v が正のボレル測度 μ_{L_v} となるものとする。このような v に対して $S_\alpha v$ を

$$(S_\alpha v)(x) = \int_{\Gamma_\alpha(x)} s^{1-n} d\mu_{L_v}(y, s)$$

と定義する。一方、最大関数 $N_\alpha v$ は次で定義する。

$$(N_\alpha v)(x) = \text{ess sup} \{ |v(y, s)| \mid (y, s) \in \Gamma_\alpha(x) \}.$$

これが可測関数となることは検証できる。これらの間に次のような good λ inequality が成立する。

定理. $0 < \alpha < \beta < \infty$ とすれば、すべての $\gamma > 1$ に対して、

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n; (S_\alpha v)(x) > \gamma, (N_\beta v)(x) \leq 1 \right\} \right| \\ \leq c_1 \exp(-c_2 \gamma) \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n; (S_{2\alpha} v)(x) > 1 \right\} \right|$$

となる正定数 $c_j = c_j(n, \alpha, \beta, L)$ ($j = 1, 2$) が存在する。

技術的な困難さを避けるために、次のようなものを考えておく。 $B_n(O, R)$ を、 \mathbb{R}^n における、原点を中心、半径 R の球とし、 $T_R = B_n(O, R) \times (1/R, R) \subset \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ とおき、

$$(S_\alpha(T_R)v)(x) = \int_{T_R \cap \Gamma_\alpha(x)} s^{1-n} d\mu_{Lv}(y,s)$$

とおく。すると、定理において、 $S_\alpha v, S_{2\alpha} v$ を $S_\alpha(T_R)v, S_{2\alpha}(T_R)v$ で置き換えられる。このことから次の結果が得られる。

系 $0 < \alpha, \beta < \infty, 0 < p < \infty$ に対して $\|S_\alpha v\|_p \leq C \|N_\beta v\|_p$.

系 $0 < \alpha < \beta < \infty, 0 < p < \infty$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{c \frac{(S_\alpha v)(x)}{(N_\beta v)(x)}\right\} [(S_\alpha v)(x)]^p dx \leq C \|S_\alpha v\|_p^p$$

定理の証明の概略を述べる。その証明においては次の補題が重要な役割を演じる。 $E \subset \mathbb{R}^n$ にたいして $W_\alpha(E)$ を次で定義する。

$$W_\alpha(E) = \bigcup \left\{ \Gamma_\alpha(x); x \in E \right\}.$$

補題 $0 < \alpha < \beta < \infty$ とし

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; (N_\beta v)(x) \leq 1 \right\}$$

として、 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 上の測度 m を

$$m(W) = \int_{W_\alpha(E) \cap W} t d\mu_{Lv}(x,t) \quad (W \subset \mathbb{R}_+^{n+1})$$

で定義すれば、 m は Carleson measure であって

$$\|m\|_C = \sup \left\{ \frac{m(I \times (0, |I|^{1/n}))}{|I|}; I \subset \mathbb{R}^n \text{ は立方体} \right\} \leq C(n, \alpha, \beta, L).$$

次に、 $m_R(W) = m(W \cap T_R)$ とおき $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $0 \leq \phi \leq 1, \phi(x) = 1$ ($|x| \leq 1$), $\phi(x) = 0$ ($|x| \geq 2$) なるものとする。そして、

$$K_t(x) = t^{-n} \phi(x/at)$$

とおけば、 $x \in E$ に対しては

$$\left\{ S_{\alpha}(T_R)v \right\}(x) \leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} K_s(x-y) dm_R(y,s) \leq \left\{ S_{2\alpha}(T_R)v \right\}(x)$$

が成立する。真ん中の項は、速度 m_R の balayage であり、 $m_R \leq m$ であるから、 m_R は Carleson 測度となり、

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} K_s(x-y) dm_R(y,s)$$

は BMO-関数となる。これに John-Nirenberg-村井-内山 の不等式を適用すれば、求める分布不等式が得られる。

参考文献。

- [1] A.P. Calderón and A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, Adv. in Math. 16 (1975), 1-64.
- [2] C. Fefferman and E.M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137-193.
- [3] M. Kaneko, Estimates of the area integrals by the non-tangential maximal functions, to appear in Tôhoku Math. J.
- [4] A. Uchiyama, On McConnell's inequality for functionals of subharmonic functions, to appear in Pacific J. Math.