

次元列で決まる多元環について

山梨大学教育学部 佐藤 眞久 (Masahisa Sato)

第 1 章 序文

近年の多元環論及びその表現論の発展にはめざましいものがあり、特に有限表現型の多元環については多くの研究者によってその構造を決定する多大の成果が得られ、その全容をまさに現わさんとしていると信じられている。その中で残された大きな問題として、次元列(環の組成列中に現われる単純剰余加群の個数といってもよい)で決まる多元環の分類の問題がある。最初に設定を明かかにしておこう。(詳しい定義および解説については山形氏の報告集[Y]を参照されたい。)

多元環とは代数閉体 K 上の有限次元の環をいう。更に、基本的(Basic)、即ち $1=e_1+\cdots+e_n$ を原始中等元への分解としたとき各中等元は非同型とする。右加群 M_R において M の次元列 $\dim_R M$ とはベクトル $(\dim_K Me_i)_i$ を意味する。但し、 \dim_K は K 上のベクトル空間としての次元である。

ここでは次の条件(*)を満たす多元環の性質を種々の例を通

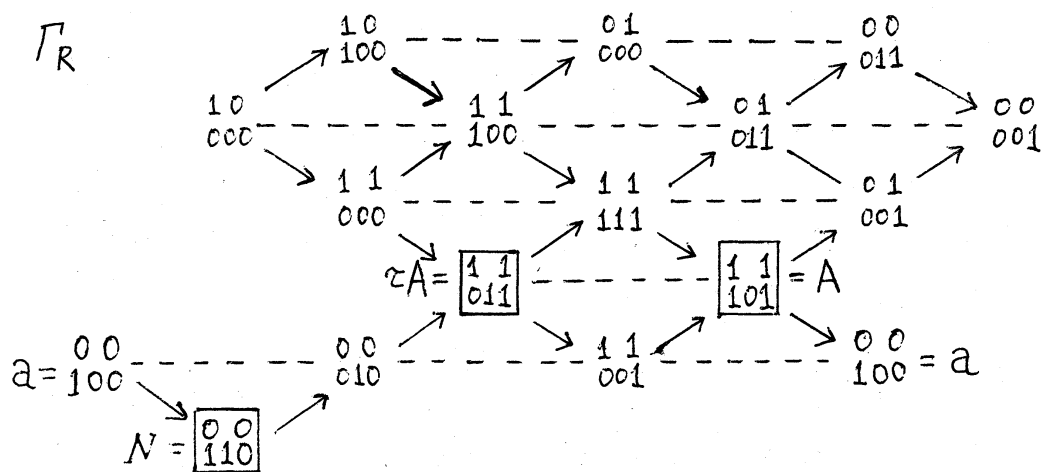
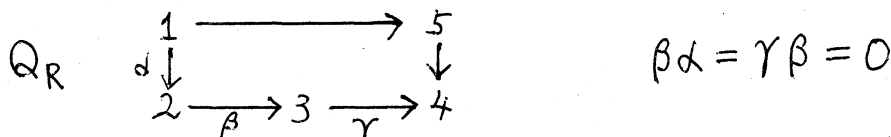
して述べてみたい。詳しい証明は佐藤[S]を参照されたい。

(*) 次元列が一致する直既約加群は同型である。

第2章 現況と方法論

(*)を満たす代表的な例は Gabriel [G]による単連結多元環である。更に、Happel-Ringel [H]によってA-Rグラフ(Auslander-Reiten Quiver)がサイクル(oriented cycle)を持たねば(*)が成立する事が証明されている。これらの一般化として、Auslander-Reiten [A]がA-Rグラフが短鎖(Short Chain)を持たねば(*)が成立する事を示した。ここで短鎖とは直既約加群の零でない準同型の鎖 $A \rightarrow B \rightarrow \tau A$ である。(τはA-RグラフのTranslation。)

まず次の例を見てもうきたい。Q_Rは環の有向グラフ(Quiver) Γ_RはそのA-Rグラフの記号である。



Γ_Rには短鎖(A → N → τA)およびサイクル(NからN)があるが、

また次の結果は興味深い。

定理2 (*)を満たす多元環Rの非同型な原始中等元eとfについて $\dim_k eRf \leq 1$ かつ $eRfRe = 0$ である。

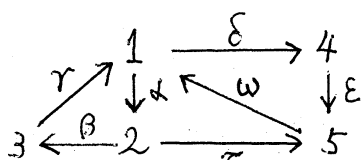
[注意] $\dim_k eRe$ は任意の次元を取ることが可能だが、 $eRfRe = 0$ より $eRe \cong K[X]/(X^n)$ となる。Rが短鎖をもたねば $\dim_k eRe \leq 1$ である (Auslander-Reiten[A]) ので短鎖はあまり良い概念ではない。

<証明のポイント>

① $\begin{matrix} & \xrightarrow{\alpha} & \bigoplus \beta \\ \gamma \searrow & & \nearrow \delta \end{matrix}$ なる形が出現すれば常に $\beta\alpha = 0$ を示す。
 $\beta\alpha = \delta\gamma$ のような多元環をみればわかるように、 $\beta\alpha$ は周辺の事情でかなり左右され、これに関係なく一定の条件を満たす事を示すのが要点である。

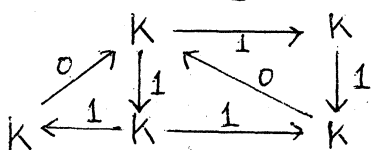
② $eRfRe \neq 0$ なるeがある場合、 $e = x \xrightarrow{d_1} e_2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_n} e_{n+1} = x$ なるサイクルで、 $1 \leq i < j < n$ または $1 < i < j \leq n$ なる任意のi,j に対し、 $d_j \dots d_i \in R \cdot \text{rad } R \cdot \text{rad } R \cdot \text{rad } R$ がすべての原始中等元j に対し成立するようなものが存在する事を示す。 ■

例 (定理1および定理2の結論をみたし(*)が不成立の例)
 多元環Rを次の有向グラフと関係式で決まるものとする。

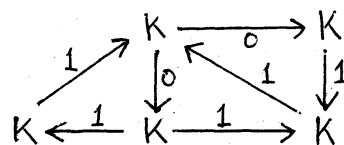


$$(\text{rad } R)e_1(\text{rad } R) = e_1(\text{rad } R)e_1 = 0$$

$$\epsilon\tau = \tau\alpha, \quad \gamma\beta = \omega\tau.$$



および



は

次元列が一致する2つの直既約表現である。

これを規制する原理は次の定理である。

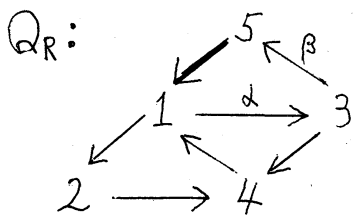
定理3 Q_R の一点 α と α を始点とするサイクル α があつたとする。このとき、 α に類似なサイクル $\beta: \alpha = y_0 \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\beta_p} y_p = \alpha$ ($p \geq 2$) で $\beta_p \cdots \beta_2 = 0$ または $\beta_{p-1} \cdots \beta_1 = 0$ となるものがある。■

ここでいくつか定義を与えておこう。

[定義] ☆ サイクルが極小 (minimal) とは、そのサイクル中の各点が異なることをいう。

☆ 一点 α を固定する。 α を含む極小サイクル α と β に対し、 $\alpha \sim \beta$ とは、 α および β が共通な矢で α に向かうもの、あるいは、 α から出るものを持つ、 α にいるときを表わす。また $\alpha \sim \gamma_1 \sim \dots \sim \gamma_n \sim \beta$ となる場合、 α と β は類似 (similar) と呼ばれる。

[注意] 上の定理ですべてのサイクルが $\beta_{p-1} \cdots \beta_1 = 0$ か $\beta_p \cdots \beta_2 = 0$ を満たすわけではない。次の例で $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ 及び $2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ は共に0でなく、条件を満たすサイクルは $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ で、上のサイクルとは1以外の共有点を有しない類似のサイクルである。



関係式

$$(\text{rad } R)e_i(\text{rad } R) = 0, \quad \beta\alpha = 0,$$

可能な矩形は可換。

$\beta_{p-1} \cdots \beta_1 \neq 0$ かつ $\beta_p \cdots \beta_2 \neq 0$ なるサイクルが条件(*)から何の制約も受けていないのであろうか。次の例をみてください。

例 (※)は成立しないが定理1から定理3までの結論をみたす例

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\
 \delta \downarrow & \swarrow \varepsilon & \downarrow \beta \\
 3 & \xrightarrow{\gamma} & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \beta\alpha = \gamma\delta \\
 \varepsilon\beta = \delta\varepsilon = 0
 \end{array}$$

次の次元列の等しい非同型な直既約加群をもつ。

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{1} & K \\
 1 \downarrow & \swarrow 0 & \downarrow 1 \\
 K & \xrightarrow{1} & K
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{0} & K \\
 0 \downarrow & \swarrow 1 & \downarrow 1 \\
 K & \xrightarrow{1} & K
 \end{array}$$

次の定理は上のサイクルを規制するものであるが、条件は十分に昇華されていらない。

サイクル $\alpha = \alpha_0 \xrightarrow{d_1} \alpha_1 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_n} \alpha_n = \alpha$ に対し

$$F = \{y \in Q_R \mid \exists t \text{ に対し } \alpha_t R y R \alpha \neq 0\} \cup \{y \in Q_R \mid \alpha R y \neq 0, y R \alpha \neq 0\}$$

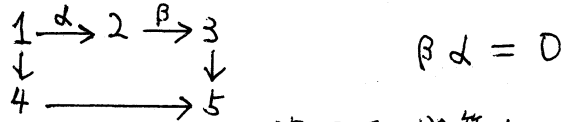
かつ任意の t に対し $\alpha_t R y R \alpha = 0$

$$G = F - \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \quad \text{とおく。}$$

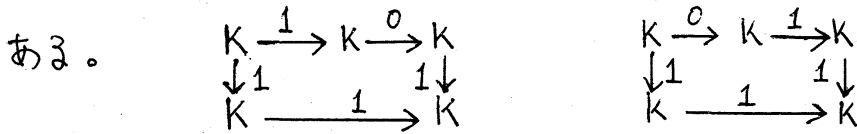
定理4 $\exists R \alpha_i \neq 0$ なる α ($\neq \alpha$) は常に $\alpha R \alpha_i \neq 0$ を満たすサイクル $\alpha = \alpha_0 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_n} \alpha_n = \alpha$ があつたとする。このとき (1) $y R d_n \cdots d_2 = 0$ あるいは (2) ある $z \notin F$ があつて任意の $y \in G$ に対し $0 \neq y R d_n \cdots d_2 \in y R z R \alpha_1$ の一方が成立する。

第4章真鎖 原始中等元で非同型な e と f は $\dim_k eRf \leq 1$ を満たすので、 Q_R で e から f へ至る道筋 (Pass) は零かある特定の道筋を固定してその定数倍と一致する。2つの道筋よりなる図形は四角形の重ね合わせになっている。その場合、一方の道筋が零で他方が零でないとき、その零を与える関係式の道筋が(*)の成立に大きな関わりをもっている。(第2章の例参照)

例 (定理1から定理4の結論を満たすか(*)を満たさない例)



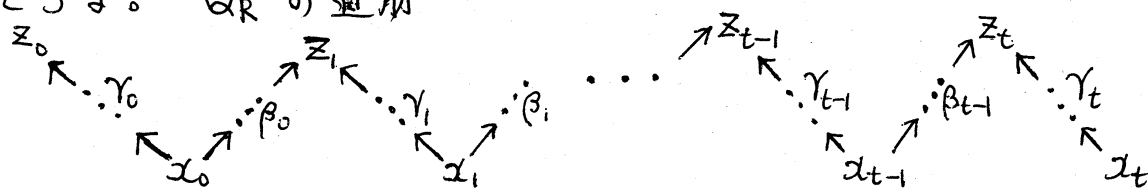
次元列が等しい直既約加群として次のものが



零かある方の道筋上の一点でこの道筋を分けると零でない2つの道筋にわけられる所が(*)を満たさない原因である。

その際、考える図形は真の直列形である必要がある。上の例の図形は明らかに真の直列形であるが、直観的には明らかでも正しく定義するのは案外面倒である。ここでは、それを真鎖 (True chain) と呼ぶ次のように定義する。

[定義] 多元環 R は非同型な原始中等元 e, f に対し $\dim_k eRf \leq 1$ とする。 Q_R の道筋



が真鎖とは次の条件を満たすことをいう。

(1) 各 γ_p, β_p ($p \geq 0$) は零でない。

(2) $\gamma_p R \alpha_{p-1} = 0$ かつ $\beta_{p-1} R \alpha_p = 0$ ($p \geq 1$)

(3) $z_p R u R \alpha_p \neq 0$ ($p \geq 0$) なる Q_R の点 u に対し、すべての k (下の場合を除く) に対し、 $z_k R u = 0$ 。

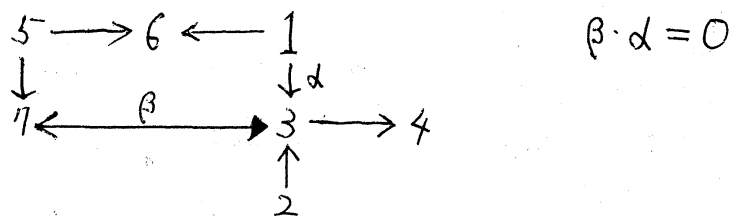
除く場合は、 $u = \alpha_p$ かつ $p < t$ のときは $k \neq p, p+1$ 、それ以外は $k \neq p$ かつ $(p, k) \neq (0, t)$ とするとき。

(4) $z_p R u R \alpha_{p+1} \neq 0$ ($p \geq 1$) なる Q_R の点 u に対し、 $z_k R u = 0$ がすべての k (但し、 $u \neq \alpha_{p-1}$ のときは $k \neq p$) に対して成立。

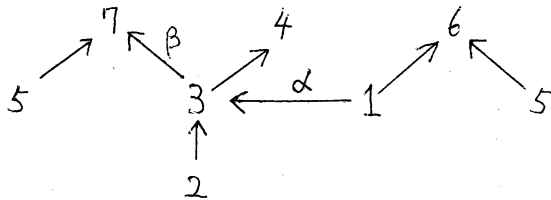
上の双方の条件を満たすとき、双対真鎖 (True co-chain) とよぶ。また真鎖(あるいは双対真鎖)が閉じているとは、 $z_0 = \alpha_t$ かつ $\beta_0 R \alpha_t = 0$ を満たしているときをいう。

これに類似したもので鎖(Chain)が Gabriel 等[Ba]によって定義されているが、次の例からわかるように若干意味するところが違っている。

例 次の有向グラフと関係式を考える。



この場合



は閉鎖 $5 \rightarrow 7 \leftarrow 2 \rightarrow 4 \leftarrow 1 \rightarrow 6 \leftarrow 5$ をなしているが真鎖でない。閉真鎖とは $5 \rightarrow 6 \leftarrow 1$ の部分を呼ぶたいの

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \alpha \\ & & 3 \\ & \beta & \rightarrow \\ & 7 & \end{array}$$

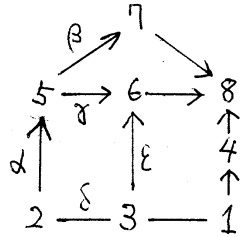
である。従って定義が複雑になってしまう。

真鎖に関する性質として次のものがある。

定理5 \mathbb{Q}_R の道筋 $\alpha: y_0 \xrightarrow{d_1} y_1 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{A+2}} y_{A+2}$ ($A \geq 0$) とする。 $d_a \dots d_1$ と $d_{A+2} \dots d_{a+1}$ ($A+1 \geq a \geq 1$) を各々左端, 右端にもつ真鎖(または双対真鎖)を用いたものがあれば $d_{a+2} \dots d_1 \neq 0$

[注] 誤解を招かないよう、次の例を上げる。上の真鎖は部分環(subcategory)的に捉えては存在しないという事である。即ち、次の例で 6 以外で生成される環として、 $\begin{array}{cccc} 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 4 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & 5 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 8 \end{array}$ が出現し、真鎖のようにみえるがこれは真鎖でない。なぜなら途中に 6 がありその間にバイパスが通っているからである。(*)の性質は部分環に依らず近傍の微妙な状況に大きく影響を受けてくる。これが問題を複雑にしているのである。

例 次の有向グラフと関係式で決まる多元環は(*)を満たす。



$$\beta\alpha = \gamma\alpha = \varepsilon\delta = 0$$

各矩形は可換。

道筋 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 8$ は零でなく $2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ は零で 5 が切断すると $2 \rightarrow 5$ と $5 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ と零でない 2 つの道筋に分断され、定理の結論に及ぶように見える。しかし、2 から 8 への道筋には 6 を通るバイパスがあり、真鎖にはない。(あるいは真の四角形がないからと言ってもよい。) 従って定理 5 の対象にはないのがある。

第 5 章 ルーゴの解消

この章では \mathbb{Q}_R にルーゴ (自分自身へ向かう矢) のある多元環の考察がルーゴのない多元環をこの多元環から構成することで、こゝにその考察が帰着できることを解説する。

その原理は、定理 2 とそれから導かれた次の補題である。

補題 非同型な原始中等元 e, f に対し、 $\dim_k eRf \leq 1$ とする。

このとき各 R -加群 M に対し次のことが成立する。

(1) 右 eRe -加群として $M \cdot fRe \subset \text{Soc}(Me)$ 。

(2) 右 eRe -加群として $\text{Rad}(Me)eRf = 0$ 。

ただし、 Soc は Socle を Rad は Radical を意味する。

とする。これにより、自然に M は左- $R/\text{Re}R$ 右- A_{m+1} -加群、
 N は左- A_{m+1} 右- $R/\text{Re}R$ -加群と考えられる。ただし、 A_{m+1} は
 K 上の $(m+1)$ 次下三角行列環とする。

そこで、 R の置換環を次の変形を何回か繰り返して得ら
 れる環とする。

$$m=0 \text{ のとき } \bar{R}(e, 0) = R/\text{Re}R$$

$$m > 0 \text{ のとき } \bar{R}(e, m) = \begin{bmatrix} R/\text{Re}R & M \\ N & A_{m+1} \end{bmatrix}$$

後者は $R/\text{Re}R$ の自明拡大環 (Trivial Extension) $[F]$ と呼ば
 れるものである。

置換環 (Replacing Algebra) の例を上げよう。

例 次の有向グラフと関係式で決まる多変環を考えよ。

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \xrightarrow{\beta} & 4 & \xrightarrow{\gamma} & 5 \\ \uparrow \alpha & & & & \uparrow \tau \\ 1 & \xrightarrow{\varepsilon} & 3 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \textcircled{\mathbb{Q}} \delta \\ \gamma\beta\alpha = \tau\varepsilon, \\ \delta^2 = \delta\beta = \gamma\delta = 0. \end{array}$$

$\bar{R}(4, 0)$ と $\bar{R}(4, 1)$ の有向グラフは次のようになる。

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \xrightarrow{\beta} & 4 & \xrightarrow{\gamma} & 5 \\ \uparrow \alpha & & & & \uparrow \tau \\ 1 & \xrightarrow{\varepsilon} & 3 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma\beta\alpha = \tau\varepsilon \\ \tau\varepsilon = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \xrightarrow{\beta} & 4' & \xleftarrow{\bar{\delta}} & 4'' & \xrightarrow{\gamma} & 5 \\ \uparrow \alpha & & & & & & \uparrow \tau \\ 1 & \xrightarrow{\varepsilon} & & & & & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \tau\varepsilon = 0 \end{array}$$

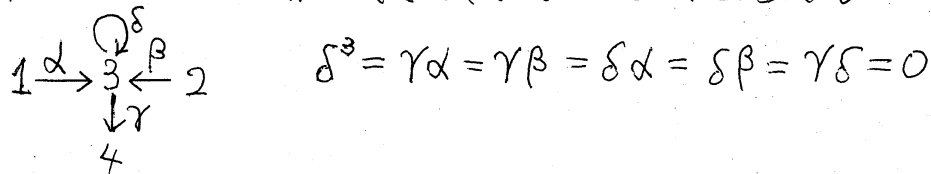
先の定理 5 のループがある場合の扱いは、置換環におき直
 し定理 5 のそれと同様に存する。それが次の定理 6 である。

定理 6 R のいかなる置換環に対し定理 5 の主張が成立する。

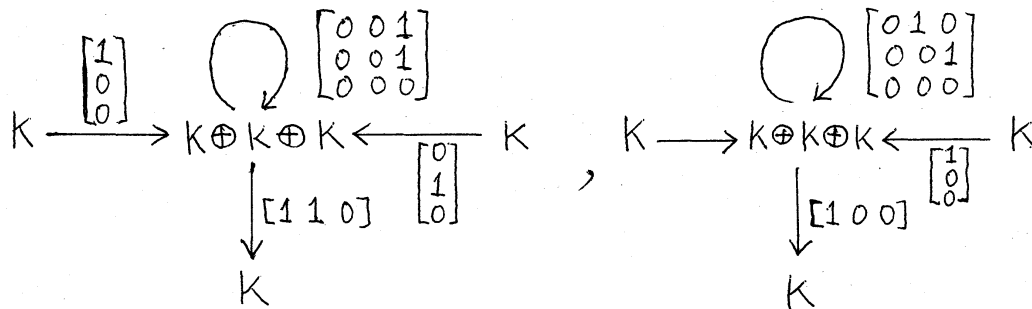
最後に、 $\mu - \nu$ の nilpotency について考察する。

次の例は $\mu - \nu$ が $\delta^2 \neq 0$ であるが為に (*) を満たさない例がある。

例 次の有向グラフと関係式で決まる多元環を考える。

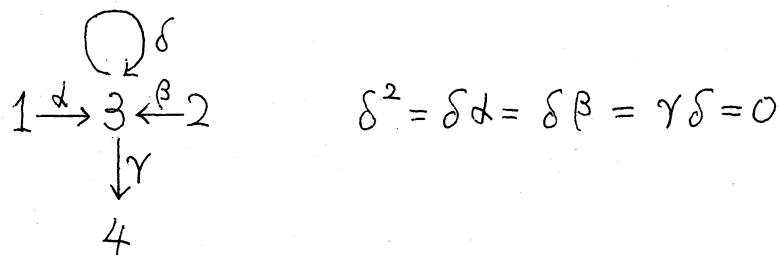


次元列の等しい非同型な直既約加群が次のように存在する。



さらに $\delta^2 = 0$ の場合でも周辺の道筋の様子によってそれを規制する関係式が存在する。その例を次に示す。

例 次の有向グラフと関係式で決まる多元環を考える



次元列の等しい非同型な直既約加群として次のものがある。

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & K \oplus K \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} K \\
 & & \downarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & & K
 \end{array}
 \quad , \quad
 \begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & K \oplus K \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} K \\
 & & \downarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 & & K
 \end{array}$$

これらを総合して次の定理をうる。

定理7 次のような道筋 $\alpha \xrightarrow{a} z_0 \xrightarrow{d_1} z_1 \cdots \xrightarrow{d_n} z_n \rightrightarrows \gamma$
 あるいは $\alpha \xrightarrow{a} z_0 \xrightarrow{d_1} z_1 \cdots \xrightarrow{d_n} z_n \rightrightarrows \gamma$ で、線型部分

$z_0 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_n} z_n$ および $y \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_n} z_n$ が真鎖ある
 いは双対真鎖をなしているとする。このとき次が成立する。

- (1) $\gamma^2 = 0$ 。
- (2) z_n から矢 $z_n \xrightarrow{\varepsilon} z_{n+1}$ が出ると、その右或
 $z_0 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_n} z_n \xrightarrow{\varepsilon} z_{n+1}$ および $y \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_n} z_n \xrightarrow{\varepsilon} z_{n+1}$
 が真鎖あるいは双対真鎖に存しているとする。 ε は d_n と
 同じ向きに存している、 $\varepsilon \cdots d_p = 0$ あるいは $d_p \cdots d_n \varepsilon = 0$ 。
 (ただし右或を左向きのみを考えるものとする。)

記号 \rightarrow は矢を表わし、 \rightarrow または \leftarrow の一対を示している。

また $p = \max\{i \mid d_n, d_{n-1}, \dots, d_i \text{ は同じ向き}\}$ とする。

文献

- [A] M. Auslander, I. Reiten : Modules determined by their composition factors, Illinois Journal of Math. 29, 280-301 (1985).
- [Ba] R. Bautista, P. Gabriel, A.V. Roiter, L. Salmeron: Representation finite algebra and and multiplicative bases, Invention Math. 81, 217-285 (1985).
- [Bo] K. Bongartz, P. Gabriel : Covering spaces in representation theory, Invention Math. 65, 331-378 (1982).
- [F] M. Fossum, A. Griffith, I. Reiten : Trivial extension of abelian group, Lecture Notes in Mathematics 456, Springer Verlag, Berlin·Heidelberg·New York.
- [H] D. Happel, C.M. Ringel : Tilted algebras, Trans. of A.M.S. 274, 399-443 (1982).
- [S] M. Sato : On algebras over which every indecomposable module is determined by dimension type I, preprint
- [Y] 山形邦夫 : 「多元環の表現論」シンポジウム報告集 p1-p57 (1986)