数理解析研究所講究録
第630巻 1987年 9-13

Paths in k-edge-connected graphs

大阪市立大学工学部 岡村治子
(Haruko Okamura)

$G=(V(G),E(G))$ を辺に向きのない有限グラフ(多重辺を含んでもよい)とし、$V(G)$を点の集合、$E(G)$を辺の集合とする。

定義 1. Gがk-辺連結(k-edge-connected)
$\Longleftrightarrow$ k本以上の辺を除去しないとGは非連結にならない。

2. Gの辺連度がk($\lambda(G)=k$ であらわす)
$\Longleftrightarrow$ Gはk-辺連結だが、$(k+1)$-辺連結ではない。

3. Gが weakly k-linked
$\Longleftrightarrow$ Gの任意の点の対の組 $(s_1,t_1),(s_2,t_2),\cdots(s_k,t_k)$ に対して(s_iとt_jは同じ点でもよい)、辺素な(i.e. 互いに辺を共有しない)パス $P_1,\cdots,P_k$ が存在し、P_iはs_iとt_iを結ぶ。

例 1. 図-1のグラフをG_1とする。$\lambda(G_1)=3$ であり、G_1は weakly 3-linked である。図-2は辺素な3本のパス P_1,P_2,P_3の例を与えている。

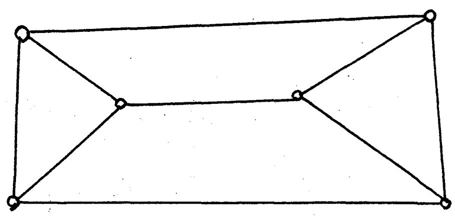

図-1

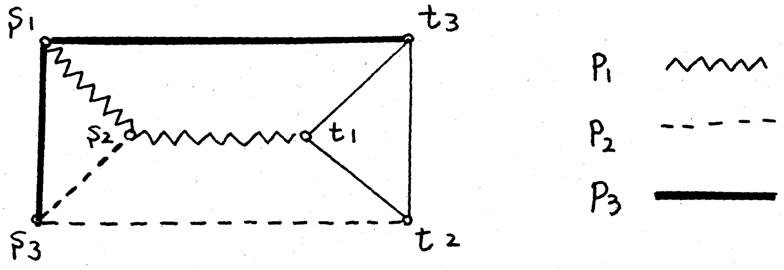

図-2

$$\left[\ \lambda(G) \geq n \ \Rightarrow\ G \text{ は weakly } k\text{-linked}\ \right]$$

となるnの値を考察する。

定義 4. $g(k) := \min\{n \mid \lambda(G) \geq n \Rightarrow G \text{ は weakly } k\text{-linked}\}$.

予想 1 (Thomassen [4]). $g(k) = \begin{cases} k & \text{if } k \text{ is odd,} \\ k+1 & \text{if } k \text{ is even.} \end{cases}$

次のことが既知である。

$g(k) \geq \begin{cases} k & \text{if } k \text{ is odd,} \\ k+1 & \text{if } k \text{ is even,} \end{cases}$

$g(1) = 1$, $g(2) = 3$, $g(3) = 3$ (Okamura [3]),

$g(4) = 5$, $g(k) \leq 2k-3$ $(k \geq 4)$ (Hirata Kubota and Saito [1], Mader [2]).

次の結果がえられた。

定理 1. $g(k) \leq \begin{cases} \frac{3}{2}(k-1) & \text{if } k(\geq 3) \text{ is odd,} \\ \frac{3}{2}k - 1 & \text{if } k(\geq 4) \text{ is even.} \end{cases}$

Mader [2] は次の定理を使い、$g(3)=3$ を帰納法の最初に用いて $g(k) \leq 2k-3$ を証明し、同時に予想2を与えている。

定理2 (Mader). $k \geq 4$, $\lambda(G) \geq k$ のとき、G の任意の2点 s, t に対して、s と t を結ぶパス P が存在して、

$$\lambda(G-E(P)) \geq k-2.$$

(ここで $G-E(P)$ は G から P の辺を除いてえられるグラフをあらわす。)

予想2 (Mader). $k \geq 4$, $\lambda(G) \geq k$ のとき、G の任意の2点 s, t に対して、s と t を結ぶ2本の辺素なパス P_1、P_2 が存在して $\lambda(G-E(P_1)-E(P_2)) \geq k-2$.

(Mader [2] は $k=4$ のとき予想2を証明した)。

ここでは、k が偶数のとき予想2を証明し、定理1の証明に用いている。

定理3. $k \geq 4$ even, $\lambda(G) \geq k$, f_1, f_2, g は G の辺で $g \neq f_i$ $(i=1,2)$, s と t は G の点、

$\Rightarrow$ (1) f_1 と f_2 を通って g を通らないサイクル C が存在して、 $\lambda(G-E(C)) \geq k-2$.

(2) hを通り、gを通らないsとtを結ぶパスPが存在して、
$$\lambda(G-E(P)) \geq k-2.$$
(ここでPとCは同じ点を2回以上通ってもよいが、辺は高々1回しか通れない。)

(定理1の証明の方針)

$\lambda(G) \geq n\ (\geq 4)$で点の対の組$(s_1, t_1), \cdots, (s_k, t_k)$が与えられているとき、定理3を用いて、適当な2組の点の対$(s_i, t_i), (s_j, t_j)\ (i \neq j)$に対して、それらを結ぶ辺素なパス$P_1, P_2$があって、$G$から$P_1$と$P_2$の辺を除いたグラフから少し変形してグラフ$G'$を作り、$\lambda(G') \geq n-3$とできることを示す。$g(3)=3$を帰納法の最初に用いると定理1の結果がえられる。

定理1と定理3の証明は、J. Combinatorial Theory Ser. B に掲載予定である。

References

1. T. Hirata, K. Kubota, and O. Saito, A sufficient condition for a graph to be weakly k-linked, J. Combin. Theory Ser. B 36 (1984), 85-94.

2. W. Mader, Paths in graphs, reducing the edge-connectivity only by two, Graphs and Combin. 1 (1985), 81-89.

3. H. Okamura, Multicommodity flows in graphs II, Japan. J. Math. 10 (1984), 99-116.

4. C. Thomassen, 2-linked graphs, European J. Combin. 1 (1980), 371-378.