数理解析研究所講究録
第630巻 1987年 34-45



# Mathieu-Witt systems の初等的・統一的記述

一橋大 商　岩崎 史郎
(Shiro Iwasaki)

今日まで多くの人によって，Mathieu-Witt systems に関する種々の興味深い研究が行われてきたが，まだ研究が十分とは言いがたい面も少なからずあり——たとえば，小さな system $W_{12}$ と大きな system $W_{24}$ とはあまり統一的に扱われていないようであり，blocks の正体もどこか不明で，その記述のしかたも必ずしも簡単とはいえないであろう——これらの systems には依然として神秘的で，研究対象としての魅力が漂っていると思われる．

本稿の目的：従来の研究の一部を整理しながら，Mathieu-Witt systems をできるだけ自然で，統一的かつ初等的に記述する一つの試みをする．特に，全ての blocks を記述する簡単な一つの方法を述べる．

記号

$q$ = 素数巾 $> 7$,　$q \equiv -1 \pmod 4$.

$F_q$ : $q$ 個の元からなる有限体.

$\Omega = \Omega(q) = \{\infty\} \cup F_q$ : $F_q$ 上の射影直線.

$Q = \{x^2 \mid x \in F_q \setminus \{0\}\}$.

$i \in F_q$ に対し

$Q_i = Q + i$,

$U_i = \{i\} \cup Q_i = U_0 + i$.

$G = PSL(2, q) = \{x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in F_q,\ ad - bc \in Q\}$.

他に, 次のような標準的な記号も使う.

$A, B \subset \Omega$ に対し

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ : $A, B$ の対称差.

$\overline{A} = \Omega \setminus A = \Omega \triangle A$.

$G$ は $\Omega$ 上の置換群であるが, $A \subset \Omega$; $a, b, \cdots \in \Omega$ に対し

$A^G = \{A^\sigma \mid \sigma \in G\}$,

$G_{(A)} = \{\sigma \in G \mid A^\sigma = A\}$,

$G_{a,b,\dots} = \{\sigma \in G \mid a^\sigma = a,\ b^\sigma = b, \cdots\}$.

$q \equiv -1 \pmod 4$ より, $G$ は $\Omega$ 上 3-斉次の置換群となる ( $\Omega$ の 3 個の元からなる任意の 2 つの部分集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ に対し, $A^\sigma = B$ なる $\sigma \in G$ が存在する ) が,

これから自然に，次のように 3-design が構成される：

任意の $A \subset \Omega$，$|A| = k \geqq 3$ に対し，$\Omega$ を点集合，$A^G$ を blocks 集合として

$$\underset{\sim\sim\sim}{\mathbf{D}(q, A)} = (\Omega, A^G)$$

は 3-$(q+1, k, \lambda)$ design である．ここに

$$\lambda = |G : G_{(A)}| \binom{k}{3} \Big/ \binom{q+1}{3}.$$

（一般に，$t$-斉次の置換群から $t$-design が構成できる．たとえば，Lane [4] を参照）

向題：どんな $q$ と A に対して，$\mathbf{D}(q, A)$ は興味ある design となるか？ を考えよう．

$A = U_0$ のときは，次の結果を得る．

定理 1 (i) $\mathbf{D}(q, U_0)$ は 3-$\left(q+1, \dfrac{q+1}{2}, \dfrac{(q+1)(q-3)}{8}\right)$ design であって，その blocks 集合は

$$U_0^G = \{U_i \mid i \in F_q\} \cup \{\overline{U_i} \mid i \in F_q\} \cup \{U_i \triangle U_j (= \overline{U_i} \triangle \overline{U_j}) \mid i \neq j \in F_q\}$$
$$\cup \{U_i \triangle \overline{U_j} (= \overline{U_i} \triangle U_j = \overline{U_i \triangle U_j}) \mid i \neq j \in F_q\}$$

である．（注．$q = 7$ のとき，$\mathbf{D}(7, U_0)$ は 3-$(8, 4, 1)$ design である．） 特に，$\mathbf{D}(q, U_0)$ が 4-design となるのは $q = 11$ のときのみで，実際

(ii) ( Beth の定理 [1] ) $\mathbf{D}(11, U_0)$ は 5-(12, 6, 1) design である.

証明の概略: (i) Frobenius 群の基本性質と G の部分群の表から $G_{(U_0)} = G_{\infty,0}$ がわかり, これより design $\mathbf{D}(q, U_0)$ のパラメータの値が求まる. 一方, G は Ω上の2重可移群より, $G = G_\infty \cup G_\infty \tau G_\infty$ $\left(\tau : x \mapsto -\frac{1}{x}\right)$ であるが, 次のことが容易に示される.

- $\sigma \in G_\infty,\ i \in F_q \Rightarrow U_i^{\sigma} = U_{i^\sigma}$.
- $U_0^{\tau} = \overline{U_0}$.
- $i \in Q \Rightarrow U_i^{\tau} = U_0 \triangle U_{i^\tau}$.
- $i \in F_q \setminus (\{0\} \cup Q) \Rightarrow U_i^{\tau} = \overline{U_0} \triangle U_{i^\tau}$.

これらから blocks 集合 $U_0^G$ を書き上げることができる.

(ii) $\mathbf{D}(11, U_0)$ の blocks 集合を $\mathbf{B} = U_0^{PSL(2,11)}$ とし, $\Omega(11)$ の任意の5点集合 T に対し, $\lambda(T) = |\{B \in \mathbf{B} \mid T \subset B\}|$ とおく. $\mathbf{B}$ の元 (= blocks) 同士の共通部分の濃度を調べ, $\{(T, B) \mid T \subset \Omega(11), |T| = 5, T \subset B \in \mathbf{B}\}$ を2通りにかぞえることによって, $\lambda(T) = 1$ $(\forall T)$ を得る.

定理1が示すように, $\mathbf{D}(q, U_0)$ の blocks は, $U_i, \overline{U_i}$ $(i \in F_q)$ の高々2つの △ による結合である. 次に, 3個以

上の結合を考える.

$\mathbf{U}(q)$ : $U_i, \overline{U}_i$ ($i \in F_q$) の $\triangle$ による有限個の結合の全体

$$= \{ U_i, \overline{U}_i, U_i \triangle U_j, U_i \triangle \overline{U}_j, U_i \triangle U_j \triangle U_k, \cdots \mid i, j, k, \cdots (\neq) \in F_q \}.$$

とすると, 次を得る.

命題. $A \in \mathbf{U}(q)$ とする.

(i) $|A| \equiv 0 \pmod 2$

(ii) $q \equiv -1 \pmod 8 \Rightarrow |A| \equiv 0 \pmod 4$.

(iii) $q \equiv -1 \pmod{24} \Rightarrow 8 \leqq |A|$.

上の命題を証明する際, 次の等式 —— 自明な式 $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ の一般化 —— が有効である.

- $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ($n \geqq 2$) を有限集合の部分集合とすると

$$\begin{aligned} |A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n| &= \sum_{1 \leqq i \leqq n} |A_i| - 2 \cdot \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 \leqq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &\quad + 2^2 \cdot \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < i_3 \leqq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \cdots\cdots \\ &\quad + (-2)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| . \end{aligned}$$

上の命題で, 特に $q = 23$ のときは

$$A \in \mathbf{U}(23) \Rightarrow |A| = 8, 12 \text{ or } 16$$

であるが, $|A| = 8$ なる A として, たとえば

$$U_0 \triangle U_1 \triangle U_4 = \{0, 4, 13, 14, 18, 19, 20, 22\}$$

がある．定理１(ii)と同様な証明で次を得る．

定理２．$\mathbf{D}(23, U_0 \triangle U_1 \triangle U_4)$ は $5$-$(24, 8, 1)$ *design* である．

以上の大半は既に知られているようであるが，こうしてある意味で —— $\mathbf{D}(q, A)$ に於て，適当な $q$ と $A$ をとることによって，あるいは対称差と群 $G$ を通して —— 統一的に，２つの Mathieu-Witt *systems*

$$\mathbf{W}_{12} = \mathbf{D}(11, U_0)$$

$$\mathbf{W}_{24} = \mathbf{D}(23, U_0 \triangle U_1 \triangle U_4)$$

を構成することができた．

これらの *systems* および $\mathbf{W}_{11} = (\mathbf{W}_{12})_\infty$，$\mathbf{W}_{23} = (\mathbf{W}_{24})_\infty$ —— 勿論，$(\mathbf{W}_i)_\infty$ は $\mathbf{W}_i$ から $\infty$ をとり除いてできる *design*，即ち，点 $\infty$ に関する $\mathbf{W}_i$ の内部構造 —— の全ての *blocks* を統一的・簡潔に記述するために，基型または代表 *blocks* という概念を導入する．

以下，$q = 11$ または $23$ とし，$\Omega(q)$ の元の間に

$$\infty < 0 < 1 < 2 < \cdots < q-1 .$$

という全順序を入れておくことにする．

**定義** $\Omega(q)$ の部分集合

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \quad (a_1<a_2<\cdots<a_k)$$

に対し，次のような $\widetilde{A}$ をAの差型または差輪という：

$\infty<a_1$ なら $\widetilde{A}=(a_2-a_1, a_3-a_2, \cdots, a_k-a_{k-1}, a_1-a_k)$

$=(a_3-a_2, \cdots, a_1-a_k, a_2-a_1)=\cdots=(a_1-a_k, a_2-a_1, \cdots, a_k-a_{k-1})$

$\infty=a_1$ なら $\widetilde{A}=(\infty, a_3-a_2, a_4-a_3, \cdots, a_k-a_{k-1}, a_2-a_k)$

$=(\infty, a_4-a_3, \cdots, a_2-a_k, a_3-a_2)=\cdots=(\infty, a_2-a_k, a_3-a_2, \cdots, a_k-a_{k-1})$

また，$i=11, 12, 23, 24$ として

$$\widetilde{W_i}=\{\widetilde{B} \mid B : W_i \text{ の } block\}$$

を $W_i$ の差型または差輪とよぶ．$d\in\widetilde{W_i}$ に対し，$\widetilde{B}=d$ なる $W_i$ の任意の *block* B を1つ定めておき，それを差型 $d$ に対応する代表 *block* ということにする．

すぐ分るように，A, B を $W_i$ の *blocks* とするとき，

$\widetilde{A}=\widetilde{B}$ （A, B は同一の差型をもつ）

$\Leftrightarrow \exists c\in F_q ; A=B+c$ （A, B は $F_q$ の元による平行移動で互いにうつることができる）

**定理3.** (i) $W_i(i=11, 12, 23, 24)$ の差型と代表 *blocks* は次の表のとおりである．

| | Difference pattern | Representative blocks | Number |
|---|---|---|---|
| $W_{12}$ | (∞,1,1,1,6,2), (∞,1,1,2,3,4), (∞,1,1,3,1,5)<br>(∞,1,2,1,4,3), (∞,1,2,2,2,4), (∞,1,3,2,3,2);<br>(1,1,1,1,2,5), (1,1,1,4,1,3), (1,1,2,1,3,3),<br>(1,1,3,2,2,2), (1,1,4,2,1,2), (1,2,2,1,2,3). | {∞,0,1,2,3,9}, {∞,0,1,2,4,7}, {∞,0,1,2,5,6},<br>{∞,0,1,3,4,8}, {∞,0,1,3,5,7}, {∞,0,1,4,6,9};<br>{0,1,2,3,4,6}, {0,1,2,3,7,8}, {0,1,2,4,5,8},<br>{0,1,2,5,7,9}, {0,1,2,6,8,9}, {0,1,3,5,6,8}. | 12 |
| $W_{11}$ | (1,1,1,6,2), (1,1,2,3,4), (1,1,3,1,5),<br>(1,2,1,4,3), (1,2,2,2,4), (1,3,2,3,2) | {0,1,2,3,9}, {0,1,2,4,7}, {0,1,2,5,6},<br>{0,1,3,4,8}, {0,1,3,5,7}, {0,1,4,6,9}. | 6 |
| $W_{24}$ | (∞,1,1,1,2,9,3,6), (∞,1,1,4,1,12,2,2), (∞,1,1,6,3,1,6,5)<br>(∞,1,1,7,1,5,5,3), (∞,1,2,1,7,8,1,3), (∞,1,2,3,2,2,3,10),<br>(∞,1,2,4,2,7,2,5), (∞,1,3,2,3,3,5,6), (∞,1,3,6,4,4,3,2),<br>(∞,1,4,4,2,2,8,2), (∞,1,4,5,2,4,3,4);<br>(1,1,1,1,3,3,2,11), (1,1,1,5,7,1,3,4), (1,1,1,10,5,2,1,2),<br>(1,1,2,1,4,9,1,4), (1,1,2,2,2,6,6,3), (1,1,2,7,4,2,4,2),<br>(1,1,3,1,6,1,2,8), (1,1,3,2,4,5,4,3), (1,1,4,4,6,1,1,5),<br>(1,1,7,3,2,2,5,2), (1,1,8,1,2,1,5,4), (1,2,2,3,1,3,8,3),<br>(1,2,2,5,1,4,3,5), (1,2,3,1,8,2,3,3), (1,2,3,6,2,4,1,4),<br>(1,2,4,1,3,3,7,2), (1,2,6,1,7,2,2,2), (1,3,1,5,3,4,3,3),<br>(1,3,2,1,4,2,5,5), (1,3,4,4,1,6,2,2), (1,5,2,1,6,3,3,2),<br>(2,2,4,2,3,2,3,5). | {∞,0,1,2,3,5,14,17}, {∞,0,1,2,6,7,19,21}, {∞,0,1,2,8,11,12,18},<br>{∞,0,1,2,9,10,15,20}, {∞,0,1,3,4,11,19,20}, {∞,0,1,3,6,8,10,13},<br>{∞,0,1,3,7,9,16,18}, {∞,0,1,4,6,9,12,17}, {∞,0,1,4,10,14,18,21},<br>{∞,0,1,5,9,11,13,21}, {∞,0,1,5,10,12,16,19};<br>{0,1,2,3,4,7,10,12}, {0,1,2,3,8,15,16,19}, {0,1,2,3,13,18,20,21},<br>{0,1,2,4,5,9,18,19}, {0,1,2,4,6,8,14,20}, {0,1,2,4,11,15,17,21},<br>{0,1,2,5,6,12,13,15}, {0,1,2,5,7,11,16,20}, {0,1,2,6,10,16,17,18},<br>{0,1,2,9,12,14,16,21}, {0,1,2,10,11,13,14,19}, {0,1,3,5,8,9,12,20},<br>{0,1,3,5,10,11,15,18}, {0,1,3,6,7,15,17,20}, {0,1,3,6,12,14,18,19},<br>{0,1,3,7,8,11,14,21}, {0,1,3,9,10,17,19,21}, {0,1,4,5,10,13,17,20},<br>{0,1,4,6,7,11,13,18}, {0,1,4,8,12,13,19,21}, {0,1,6,8,9,15,18,21},<br>{0,2,4,8,10,13,15,18}. | 33 |
| $W_{23}$ | (1,1,1,2,9,3,6), (1,1,4,1,12,2,2), (1,1,6,3,1,6,5),<br>(1,1,7,1,5,5,3), (1,2,1,7,8,1,3), (1,2,3,2,2,3,10),<br>(1,2,4,2,7,2,5), (1,3,2,3,3,5,6), (1,3,6,4,4,3,2),<br>(1,4,4,2,2,8,2), (1,4,5,2,4,3,4). | {0,1,2,3,5,14,17}, {0,1,2,6,7,19,21}, {0,1,2,8,11,12,18},<br>{0,1,2,9,10,15,20}, {0,1,3,4,11,19,20}, {0,1,3,6,8,10,13},<br>{0,1,3,7,9,16,18}, {0,1,4,6,9,12,17}, {0,1,4,10,14,18,21},<br>{0,1,5,9,11,13,21}, {0,1,5,10,12,16,19}. | 11 |

$W_{12} = D(11, U_0)$, $W_{11} = (W_{12})_\infty$; $W_{24} = D(23, U_0 \Delta U_1 \Delta U_4)$, $W_{23} = (W_{24})_\infty$

All the blocks of $W_{12}$, $W_{11}$ (respe., $W_{24}$, $W_{23}$) are obtained by translating the representative blocks by all elements of $F_{11}$ (resp., $F_{23}$).

(ii) $W_{12}, W_{11}$ ( $W_{24}, W_{23}$ ) の全ての blocks は，代表 blocks を $F_{11}$ ( $F_{23}$ ) の元で平行移動することによって得られる．( たとえば，$W_{24}$ の $759 = 33 \cdot 23$ 個の全 blocks は，33 個の代表 blocks を $F_{23}$ の元で平行移動して得られる．)

証明は，$W_{12}$ と $W_{24}$ の差型を直接計算で出すだけである．たとえば，$W_{24}$ の場合，

$$U = U_0 \triangle U_1 \triangle U_4 , \quad G = PSL(2,23) \ni \tau : x \mapsto -\frac{1}{x}$$

とすると，直接計算によって

$$W_{24} \text{ の blocks 集合} = U^G = \{ aU+b,\ a(U+b)^\tau + c \mid a \in Q;\ b, c \in F_{23} \},$$

$$\widetilde{W_{24}} = \{ \widetilde{aU},\ \widetilde{aU^\tau},\ \widetilde{a(U+6)^\tau} \mid a \in Q \}.$$

この $\widetilde{W_{24}}$ の元を具体的に書き表したのが定理 3 の表における $W_{24}$ の差型である．差型から代表 blocks は直ちに求まる．また，$\widetilde{W_{24}}$ の表の中で $\infty$ を含む 11 個のものから $\infty$ をとり除けば $\widetilde{W_{23}}$ が得られる．

差型の利点と応用

① 定理 3 で見たように，差型あるいは代表 blocks は，Mathieu-Witt systems $W_{24}, W_{23}, W_{12}, W_{11}$ の全ての blocks をある意味で統一的に記述する簡単な方法を与えて

いるといえる．（注．$W_{22}=(W_{23})_0$ はやや異質である．
$|\widetilde{W_{22}}|=77=W_{22}$ の blocks の個数で，$W_{22}$ の差型は無意味である．しかし，$W_{22}$ の全ての blocks も，$W_{23}$ の 11 個の代表 blocks を $F_{23}$ の適当な 7 個の元で平行移動すれば得られる．）

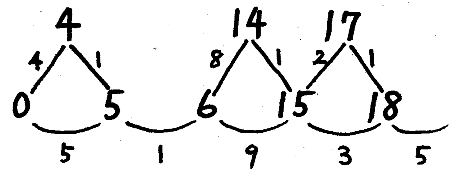
次の 2，3 は $W_{24}$ について述べるが，他の $W_i$ でも同様になりたつ．

②．$\Omega(23)$ の 8 点集合 A が $W_{24}$ の block かどうかの判定：

$$A : W_{24} \text{ の block} \iff \widetilde{A} \in \widetilde{W_{24}}$$

たとえば，$A=\{\infty,0,1,3,12,15,21,22\}$ とすると，
$\widetilde{A}=(\infty,1,2,9,3,6,1,1)=(\infty,1,1,1,2,9,3,6)\in\widetilde{W_{24}}$
より，A は $W_{24}$ の block である．

③．与えられた 5 点を含む $W_{24}$ の unique block の見つけ方：たとえば，$\Omega(23)$ の与えられた 5 点を $A=\{0,5,6,15,18\}$ とする．$W_{24}$ の差型表から，その適当な部分和が
$\widetilde{A}=(5,1,9,3,5)$ であるような差型を探すと，ただ 1 つの差型 $\quad(\underbrace{1}_{5},1,\underbrace{8,1}_{9},\underbrace{2,1}_{3},5,4)$
が見つかる．従って，求める block は



即ち，$\{0,4,5,6,14,15,17,18\}$．

なお，近藤武先生は，与えられた $s\ (\leqq 5)$ 個の点を含む全ての blocks を直ちに見つけるパソコンのプログラムを作って下さった．

最後に，2，3 の注意をつけ加える．

(1) これまでの全ての議論に於て，$U_i = \{i\} \cup Q_i$ の代りに $V_i = \{\infty\} \cup Q_i$ を用いても全く同様のことがなりたち，

$$\mathbf{D}(8, U_0) \cong \mathbf{D}(8, V_0)\ ;\quad \mathbf{D}(23, U_0 \triangle U_1 \triangle U_4) \cong \mathbf{D}(23, V_0 \triangle V_1 \triangle V_4)$$

(design として同型) である．Todd [5] に出ている $W_{24}$ の blocks の表や Curtis [2] の MOG によるものは，上の定理 3 (ii) による blocks の表 ($\mathbf{D}(23, U_0 \triangle U_1 \triangle U_4)$) と一致している．また，$\mathbf{D}(23, U_0 \triangle U_1 \triangle U_4)$ と $\mathbf{D}(23, V_0 \triangle V_1 \triangle V_4)$ の差型とは逆回りである：$(d_1, d_2, \cdots, d_8) \in \widetilde{\mathbf{D}(23, U_0 \triangle U_1 \triangle U_4)}$

$$\Longleftrightarrow\ (d_8, \cdots, d_2, d_1) \in \widetilde{\mathbf{D}(23, V_0 \triangle V_1 \triangle V_4)}.$$

(2) 定理 1 (i) の証明では，Frobenius 群の基本性質と $G = PSL(2, 8)$ の部分群の表を用いたが，その他の全ての議論は全く初等的である．特に，定理 1 (ii)，定理 2，3 の証明は完全に初等的である．

(3) Curtis の MOG [2] も差型も，その正体が私にはまだよく分らないが，差型に現われる数列はどのような規則で並んでいるのだろうか？ MOG や差型を決定ないしは

control している，より本質的な何かがあるのだろうか？

本稿の詳しい内容は [3] を参照されたい．

## 参考文献

[1] T. Beth: Some remarks on D.R. Hughes' construction of $M_{12}$ and its associated designs, in "Finite geometries and designs", London Math. Soc. Lect. Note Ser. 49, 22-30, Camb. Univ. Press, 1981.

[2] R.T. Curtis: A new combinatorial approach to $M_{24}$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 25-42.

[3] S. Iwasaki: An elementary and unified approach to the Mathieu-Witt systems, to appear.

[4] R.N. Lane: t-designs and t-ply homogeneous groups, J. Comb. Th. 10 (1971), 106-118.

[5] J.A. Todd: A representation of The Mathieu group $M_{24}$ as a collineation group, Ann. di Math. Pura. ed. Appl. 71 (1966), 199-238.