数理解析研究所講究録
第630巻 1987年 46-54

$\mathcal{L}$-collineation 群について

大阪大学 教養部　平峰 豊

Ostrom-Wagner [7] によって点上2重可移な自己同型群をもつ有限射影平面はデザルグ平面に限るが affine 平面についてはこのことは成り立たない。すなわち、非デザルグ affine 平面でその自己同型群が点上2重可移なものが存在する。

$\pi=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ を affine 平面（$\mathcal{P}$ は点全体，$\mathcal{L}$ は直線全体）とするとき affine 平面とその collineation の定義より次が言える。

命題　$\mathrm{Aut}\,\pi \geq G$ とするとき次の (a) (b) は同値

(a) G は $\mathcal{P}$ 上2重可移

(b) (i) $G(l)$ は l 上2重可移 ($\forall l \in \mathcal{L}$) かつ

(ii) G は $\mathcal{L}$ 上可移

（ここで $G(l)$ は l を不変にする G の元全体のなす部分群）

条件 (b i) (b ii) についてはそれをみたす affine 平面の研究が古くからある。[cf. 4, 11章〜16章]

ここでは (b i) をみたす affine 平面についての結果をのべる。

以下では考える集合はすべて有限集合とする。

次が基本的である。

<u>定理</u>（Lüneburg 1973 [5], Johnson-Kallaher 1974 [2]）

すべての line $l \in \mathcal{L}$ について $G(l)$ が l 上2重可移ならば π は translation plane であり，G は translation group T を含む．

この定理により π はある vector space $V = V(2n, K)$ $K = GF(q)$ 上定義された order q^n の translation plane で．$G = TH$ とかける。ここで H は G の元で zero vector を固定するもの全体がつくる G の部分群である。zero vector 0 を含む π の line はちょうど $q^n + 1$ 個あってすべて n次元 K-subspace であり，この全体を $\mathcal{S}$ で表わし．π の <u>spread</u> と言う。V の 0 でない vector は唯一つのある $W \in \mathcal{S}$ に属する。

先の条件 (b i) は次のように言い換えることができる。

(＊) $\forall W \in \mathcal{S}$ について $H(W)$ は $W^* = W - \{0\}$ 上 transitive に作用する。（一般には faithful ではない）

<u>定義</u>. translation plane π の collineation group H ($\leq (\mathrm{Aut}\,\pi)_0$) が (＊) をみたすとき <u>$\mathcal{L}$-collineation 群</u>という。（一般に $(\mathrm{Aut}\,\pi)_0 \leq \Gamma L(2n, K)$ が知られている [6]）

$\mathcal{L}$-coll. 群をもつ知られた affine 平面を次に書く.

(I) generalized Andre plane:

$V = \{(x, y) \mid x, y \in F = GF(q^n)\}$ を $K = GF(q)$ 上の $2n$ 次元 vector space とみる。 θ を

$$F^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$ なる ある写像とし

Fでの和(+)は通常のものとし Fの乗法を

$$x \circ y = x^{q^{\theta(y)}} \cdot y \qquad (\cdot \text{ は F での積}) \quad y \neq 0$$

$$x \circ 0 = 0$$ によって定義する。

このとき "$x = 0$" や "$y = x \circ m$" ($m \in F$) は

Vの n 次元 K-subspaces を定めるが.

$$x^{q^{\theta(m_1)} - q^{\theta(m_2)}} \neq m_1^{-1} m_2 \qquad \forall m_1, m_2 \in F^\times$$

なら $\mathcal{S} = \{“x = 0”\} \cup \{“y = x \circ m” : m \in F\}$

は spread となることが容易に分かる。$\mathcal{S}$ により定まる translation plane を generalized Andre plane という。

(II) rank 3 の自己同型群をもつ semifield plane:

$D = D(+, \cdot)$ が semifield とは Dが+に関して abelian gp で ・に関して単位元をもつ loop で $\{+, \cdot\}$ に関して左右の分配律をみたすことを言う. このとき Dを用いて $V = \{(x, y) \mid x, y \in D\}$, $\mathcal{S} = \{“x = 0”\} \cup \{“y = x \cdot m” \mid m \in D\}$ により得られる平面を semifield plane と言うが. これの自己同型群

が V上 rank 3 の群として作用するのが II の場合である。

(III) order 27 の Hering plane [1]:
自己同型群の中に $SL(2,13)$ ($\leq GL(6,3)$) を含み点上2重可移に作用する

(IV) order p^2 ($p \in \{11, 19, 29, 59\}$) の $R*p$-plane:
自己同型群の中に $SL(2,5) \times SL(2,5)$ を含み $p=11$ のとき1個, $p=19$ のとき3個, $p=29$ のとき9個, $p=59$ のとき1個合計14種類ある。([6] §18)

(V) order p^2 ($p \in \{5, 7, 11, 23\}$) の $F*p$-plane:
自己同型群の中に $SL(2,3) \times SL(2,3)$ を含み, $p=5, 23$ のとき1個, $p=7$ のとき2個, $p=11$ のとき4個, 合計8種類ある。([6] §19)

上の(I)と(II)が $\mathcal{L}$-coll. 群をもつ平面として標準的なもので(III)(IV)(V)が例外的なものと考えられる。n が奇数の時は実際にそうであることが Kallaher-Ostrom [3] によって得られている。

定理（[3]）Π が $V(2n, q)$ 上定義された translation plane で n が奇数かつ $\mathcal{L}$-coll. 群をもてば (I), (II) 又は (III) のいずれかのものに同型である。

n が偶数の時は (I)(II) の一部と (IV)(V) の全部がその例を与えている。(IV), (V) は $n=2$ の場合である。

以下 $\Pi = \pi(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ を $V(2n, q)$ ($q=p^m$, p=素数) 上定義された $\mathcal{L}$-coll. 群 G をもつ translation plane でその spread を $\mathcal{S}$ とおく。

Zsigmondy の定理により (i) $p=2$, $mn=6$ 又は (ii) $mn=2$, $p+1=2^{\mu}$ の時を除けば $p^{mn}-1$ $(=q^n-1)$ は prime p-primitive divisor をもつ。これを u とおく。仮定より $W \in \mathcal{S}$ に対して $G(W)$ は $GF(p)$-vector space とみて W 上の transitive linear group (一般に faithful でない) であり従って $q^n-1 = p^{mn}-1 \mid |G(W)|$ が成りたつ。特に $G(W)$ や G の u-Sylow 群は trivial でない。

次の補題は $\mathcal{L}$-coll. 群をもつ平面を考える場合に基本的であり その証明には gen. Andre planes の特徴付け（[6] Theorem 11.5 参照）を用いる。

補題　u を $p^{mn}-1$ の(存在すると仮定して) prime p-primitive divisor とし，R を G の Sylow u-群とする。このとき $R \neq 1$ である。さらに $G \rhd R$ ならば (i) π はデザルグ平面又は (ii) R は noncyclic で π は generalized Andre plane である。

一般には $G \leq \Gamma L(2n, q)$ であるが．$L = G \cap GL(2n, q)$ とおく。V が L-可約のとき次のことが成りたつ。

補題　L がある K-submodule W $(0 \subsetneqq W \subsetneqq V)$ を不変にすれば $W \in \mathcal{S}$ である。

(証明) U を $U_1 := U \cap W \neq 0$ となる $\mathcal{S}$ の元の一つとする。$G(U) \rhd L(U)$ かつ U_1 は $L(U)$-不変。さらに $G(U)/L(U) \simeq G(U)L/L \leq G/L \leq \mathbb{Z}_{2mn}$．これと $\mathcal{L}$-coll.群の定義より $G(U)$ が $U^{\#} (= U - \{0\})$ 上可移だから．
U_2 $(0 \subsetneqq U_2 \subset U_1)$ を $L(U)$-不変な minimal な submodule として選んでおけば　$r = \dim_K U_2$ に対して
$(q^n-1)/(q^r-1) \mid 2mn$ である。これが可能となるのは $r = n$ の場合だけで．$U \subseteq W$ であることが分かる。$U \neq W$ なら別の U' $(U \neq U', U' \cap W \neq 0)$ に対して同様に $U' \subseteq W$ となり

$U \cap U' = 0$, $\dim U = \dim U' = n$ 故 $W = V$となり矛盾を得る。つまり $W = U \in \mathcal{S}$。

<u>命題</u> Lが可解で Vに可約に作用すれば、次のいずれかが起る。

(i) π は generalized Andre plane

(ii) $n = 3$ かつ $K = GF(4)$

(iii) $n = 2$

(証明) (ii),(iii) でないとし (i)を導く。Wを補題のようにとる。$G-L$の元 x で $Wx \neq W$ となるものがあるとして $W' = Wx$ とおく。$W' \in \mathcal{S}$ かつ W'は L-不変であることは明らか。Zsigmondy より一つの prime p-primitive divisor of $p^{rn}-1$ uをとり Rを Gの u-Sylow群 としておけば、$R \leq L$である。Huppert の可解可移線型群の分類定理を用いて

$$G(W)/G_W, \quad G(W')/G_{W'} \leq \Gamma L(1, q^n)$$

故に $[R, R] \leq L_W \cap L_{W'} = 1$ 。さらに R^W は $(L_{W'} L_W)^W$ を normalize するので $R \leq L_{W'} L_W$ 又は $[R, L_{W'}] \leq L_W$ 従って $L \triangleright R$ となり 先の補題を用いて π は generalized Andre plane となる。次に $WG = W$の ときは $G_W = 1$ なら $G \triangleright R$となるので $G_W \neq 1$ としてよいが、

W'をGwのcoaxisとすれば W'はG－不変である。
従って前半と同様の方法が適用できて、再びπは
gen. Andre planeとなることが分かる。

一般の偶数nについては完全に決定することはむつかしい
問題であるが、$n=2$のときはGが既約に作用するGが
決定できることから次の補題と定理を証明することが
できる。

<u>補題</u> $n=2$かつLが非可解でVに既約に作用
すればπはある$R{*}p$-平面に同型である。

<u>定理</u> $n=2$のとき次のいずれかが起る。
(1) $\pi \simeq$ gen. Andre plane
(2) $\pi \simeq$ rank 3のcoll.群をもつsemifield plane
(3) $q \leq 59$.（先の例で(IV),(V)型はすべてこの場合に相当する。）

(3)については全部を決定はしていないが、$R{*}p$-平面、
$F{*}p$-平面の他に多少の新しいものが入っているかも
しれない。

参考文献

1. C. Hering : Eine nicht-desarguessche zweifach transitive affine Ebene der Ordnung 27, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 34 (1964) 203-208.

2. N.L. Johnson – M.J. Kallaher : Transitive collineation groups on affine planes, Math. Z. **135** (1974), 149–164

3. M.J. Kallaher and T.G. Ostrom : Collineation groups irreducible on the components of a translation plane, Geom. Dedicata 9 (1980), 153-194

4. M.J. Kallaher : Affine Planes with Transitive Collineation Groups, North Holland, 1982.

5. H. Lüneburg : Affine Ebenen, in denen der Stabilisator jeder Geraden weifach transitive ist. Arch. Math. 24. (1973), 663-668

6. H. Lüneburg : Translation Planes, Springer-Verlag, 1980

7. T.G. Ostrom – A. Wagner : On projective and affine planes with transitive collineation groups, Math. Z. (1959) 71, 186-199.