数理解析研究所講究録
第630巻 1987年 66-85

古典複素リー群のgeneralized exponents.

Young図形とuniversal characterとKostantのgeneralized exponents.

東大・理. 松沢淳一 (Jun-ichi Matsuzawa)

Reductiveな複素リー環上のSymmetric algebraを、adjoint群加群とみたとき，その構造はKostantによって決定されたわけであるが([Kos])，その際に導入されたgeneralized exponentsは，GLの場合はKostka-Foulkes多項式，一般の場合は'一般化された' Kostka-Foulkes多項式([Ka])と深く関係しており，またAffine Weyl群の或るKazhdan-Lusztig多項式とも密接に関係している([H], [Ka]).

一方，古典群の表現論はYoung図形によって語ることができるという特徴的な側面をもっており，一般の型のリー群の表現論とはまた違った世界がそこに展開している。この報告では，古典群のgeneralized exponentsをYoung図形によって記述し，Young図形的な方法によってあらわれるgeneralized exponentsの性質を示してみたい。その際、有限次元表現の指標を直接扱うのでは見通しが悪いので、無限変数の対称関数の理論を使って有限次元の表現論を記述するという論法

をとる。そうすることによって、$GL(n,\mathbb{C})$, $Sp(2n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{C})$ の generalized exponents の、Young 図形的な計算法に統一的な見通しを与えることができる。詳細については、[Ma] を参照されたい。

§1 準備、generalized exponents, Young図形。

G を複素連結 reductive リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環、S を $\mathfrak{g}$ 上の多項式環とする。G の S への作用を $(g\cdot f)(x) = f(g^{-1}\cdot x)$, $(g\in G,\ f\in S,\ x\in\mathfrak{g})$ で定める。ただし $g^{-1}\cdot x$ は adjoint 作用とする。S の G-部分加群 H を次のように定義する。

$H = \{ f\in S \mid \partial\cdot f = 0,\ {}^{\forall}\partial:\mathfrak{g}$ 上の定数係数微分作用素で $\partial\cdot 1 = 0$ かつ ∂ の作用は G-作用と可換$\}$.

H の元は G 調和多項式とよばれる。S^G を S の G 作用に関する不変式環とすると次の定理が成り立つ。

[定理] (Kostant, [Kos])

写像 $S^G\otimes H \to S$ $(f\otimes h \to f\cdot h)$ は G 加群としての同型を与える。

従って S の G 加群としての構造は、S^G の構造がわかっているので、H のそれを決めればわかることになる。

さて、ρ を G の有限次元複素既約表現とし、H の k 次同次

成分H^kに対し．$P_H(\rho,t):=\sum_{k=0}^{\infty}[H^k:\rho]t^k$ とする。ここで$[H^k:\rho]$はρのH^kにおける重複度とする。このとき，$P_H(\rho,t)$は多項式となり．その次数はρの最高ウェイトの単純ルートに関する高さに等しいことがわかっている.([Kos]).

[定義] (Kostant). ρをGの有限次元複素表現，$\rho=\sum_{i=1}^{r}c_i\rho_i$をその既約分解とし $P_H(\rho,t)=\sum_{i=1}^{r}c_iP_H(\rho_i,t)$ とする。$P_H(\rho,t)$を係数1の単項式の和で書いたとき，すなわち．

$$P_H(\rho,t)=t^{m_1(\rho)}+t^{m_2(\rho)}+\cdots\cdots+t^{m_s(\rho)}$$

としたとき巾 $m_1(\rho),m_2(\rho),\cdots,m_s(\rho)$を，$\rho$に関する generalized exponents という。

たとえば $P_H(\rho,t)=2t^2+t^3=t^2+t^2+t^3$ のときは，その generalized exponents は 2,2,3である。

[注] ρがadjoint表現のとき，そのgeneralized exponentsは，リー群Gのexponentsとなり，それを$m_1\leq m_2\leq\cdots\leq m_\ell$とすると次が成り立つ．

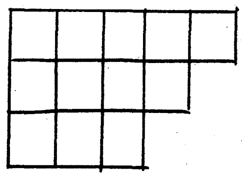
(1) $\prod_{i=1}^{\ell}(1+t^{2m_i+1})$ は GのBetti数から決まるPoincaré多項式となる。

(2) S^Gはℓ個の代数的に独立な同次多項式 $u_1,\cdots,u_\ell$ により生成される。$S^G=\mathbb{C}[u_1,\cdots,u_\ell]$. このとき$u_i$の次数は．$m_i+1$.

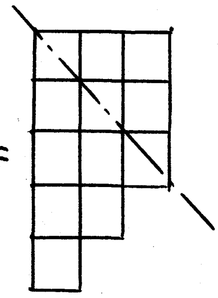
(3) G の Weyl 群 W の Coxeter-Killing 変換の位数 h は、$m_\ell+1$ で、その固有値は $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}\,m_i}{h}}$ である。

(4) W の位数は $\prod_{i=1}^{\ell}(m_i+1)$.

自然数 f の分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$, $(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r>0$, $f=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i)$ に対し正方形を第 i 行に λ_i 個、左端をそろえて並べた図形を Young 図形といい、これも λ であらわす。r を λ の深さ、f を λ の大きさといい、それぞれ $l(\lambda)$, $|\lambda|$ と書く。また、Young 図形 λ を対角線に関して折り返して得られる図形を $\bar{\lambda}$ と書き λ の転置という。



$\lambda=(5,4,3)$

$\bar{\lambda}=$ 

§2. $GL(n,\mathbb{C})$ の generalized exponents.

$GL(n,\mathbb{C})$ の既約多項式表現の同値類は深さ n 以下の Young 図形によりパラメトライズされる。Young 図形 λ に対応する表現を $\lambda_{GL(n)}$ と書くことにすると、$GL(n,\mathbb{C})$ の既約有理表現は $(\det)^e\otimes\lambda_{GL(n)}$ という形に書ける。ここで $e\in\mathbb{Z}$, $(\det)^e$ は $A\to(A\text{の行列式})^e$, $(A\in GL(n,\mathbb{C}))$ で与えられる $GL(n,\mathbb{C})$ の一次表現。この対応は表現の最高ウェイトの言葉で書くと次のようになる。対角行列 $H=\mathrm{diag}(h_1,\cdots,h_n)$ に対し、

一次形式 ε_i を $\varepsilon_i(H)=h_i$ で定めると，$\lambda_{GL(n)}$ の最高ウェイトは $\lambda_1\varepsilon_1+\cdots+\lambda_r\varepsilon_r$ となる。

[定義] (Littlewood-Richardson 係数). μ, ν を Young 図形とする。$l(\mu)+l(\nu)\le n$ のとき既約分解

$$\mu_{GL(n)}\otimes\nu_{GL(n)}=\sum_\lambda LR^\lambda_{\mu,\nu}\,\lambda_{GL(n)} .$$

の係数 $LR^\lambda_{\mu,\nu}$ を Littlewood-Richardson 係数という。

[注] (1) 条件 $l(\mu)+l(\nu)\le n$ をみたすかぎり，$LR^\lambda_{\mu,\nu}$ は n によらない。

(2) GL, Sp, SO の表現論には，この Littlewood-Richardson 係数が常に本質的にかかわってくるのであるが，$LR^\lambda_{\mu,\nu}$ には組合わせ論的な計算法があるため (cf [M])，具体的な計算が可能となっている。

[universal character]

$\Lambda_n(x)$ を，$\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n]$ 中の対称式全体のなす部分環とする。準同型 $\rho_{m,n}:\Lambda_m(x)\to\Lambda_n(x)$ $(m\ge n)$ を $\rho_{m,n}(x_i)=x_i$, $(i\le n)$, $\rho_{m,n}(x_j)=0$ $(j\ge n+1)$, で定め，$\Lambda(x)=\varprojlim\Lambda_n(x)$ を，次数付き環としての射影的極限とする。

$i\in\mathbb{Z}$ に対し $\Lambda(x)$ の元，i 次基本対称関数 $e_i(x)$ を次のように定める。$e_i=0$ $(i<0)$ で，

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+x_it)=\sum_{i=0}^{\infty}e_i(x)t^i .$$

$p_n : \Lambda \to \Lambda_n$ を Λ_n への射影とすると, $p_n(e_i(\alpha))$ は $GL(n,\mathbb{C})$ の交代テンソル表現の指標となる.

[定義] (GL の Universal Character ; [K_0]).

α, β を Young 図形とし, $\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_r)$, $\bar{\beta}=(\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_s)$ としたとき $S_{[\alpha,\beta]_\infty}(x,y)\in\Lambda(x)\otimes\Lambda(y)$ を次の行列式で定義する。

$$
\begin{vmatrix}
e_{\beta'_s}(y) & e_{\beta'_s-1}(y) & \cdots & e_{\beta'_s-s}(y) & \cdots & e_{\beta'_s-s-r+1}(y) \\
e_{\beta'_{s-1}+1}(y) & e_{\beta'_{s-1}}(y) & \cdots & e_{\beta'_{s-1}-s+1}(y) & \cdots & e_{\beta'_{s-1}-s-r+2}(y) \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
e_{\beta'_1+s-1}(y) & e_{\beta'_1+s-2}(y) & \cdots & e_{\beta'_1-1}(y) & \cdots & e_{\beta'_1-r}(y) \\
e_{\alpha'_1-s}(x) & e_{\alpha'_1-s+1}(x) & \cdots & e_{\alpha'}(x) & \cdots & e_{\alpha'_1+r-1}(x) \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
e_{\alpha'_r-s-r+1}(x) & e_{\alpha'_r-s-r+2}(x) & \cdots & e_{\alpha'_r-r+1}(x) & \cdots & e_{\alpha'_r}(x)
\end{vmatrix}
$$

また, 準同型 $\pi_{GL(n)} : \Lambda(x)\otimes\Lambda(y) \to$ ($GL(n,\mathbb{C})$ の指標環) を,

$\pi'(x_i)=\pi'(y_i)=0 \quad (i>n)$, $\pi'(y_j)=x_j^{-1}$, $\pi'(x_j)=x_j \quad (j\le n)$

$\pi_{GL(n)}(x_i\otimes y_j)=\pi'(x_i)\cdot\pi'(y_j)$ で定義し, これを specialization homomorphism という.

[例] $n=4$, $\alpha=(3,1,1)$, $\beta=(2,2,1)$ とする。

$\bar{\alpha}=(3,1,1)$, $\bar{\beta}=(3,2)$ だから.

$$S_{[\alpha,\beta]_\infty}(x,y)=\begin{vmatrix} e_2(y) & e_1(y) & e_0(y) & 0 & 0 \\ e_4(y) & e_3(y) & e_2(y) & e_1(y) & e_0(y) \\ e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & e_5(x) \\ 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) \end{vmatrix}$$

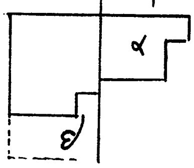
$e_n(x_1,\cdots,x_n)\,e_i(x_1^{-1},\cdots,x_n^{-1})=e_{n-i}(x_1,\cdots,x_n)$ に注意すると、

$$\pi_{GL(n)}\bigl(S_{[\alpha,\beta]_\infty}(x,y)\bigr)=(\det)^2\cdot\begin{vmatrix} e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & 0 & 0 \\ e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) \\ e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & 0 \\ 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) \end{vmatrix}$$

$$=-(\det)^2\begin{vmatrix} e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & 0 & 0 \\ e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) & 0 \\ e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) & e_3(x) & e_4(x) \\ 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) & e_2(x) \\ 0 & 0 & 0 & e_0(x) & e_1(x) \end{vmatrix}$$

$$=-(\det)^2\cdot S_{(5,3)}(x).$$

$S_{(5,3)}(x)$ は、4変数の Schur 関数で、Young 図形 $(5,3)$ に対応する $GL(4,\mathbb{C})$ の表現 $(5,3)_{GL(4)}$ の指標である。

[注] (1) $l(\alpha)+l(\beta)\leq n$ のとき $\pi_{GL(n)}(S_{[\alpha,\beta]_\infty}(x,y))$ は既約表現 $(\det)^{-l(\beta)}\otimes\lambda_{GL(n)}$ の指標となる。ここで、$\overline{\lambda}=(n-\overline{\beta_s},n-\overline{\beta_{s-1}},\cdots,n-\overline{\beta_1},\overline{\alpha_1},\cdots,\overline{\alpha_r})$ である。 $\lambda=$ 

(2) Specialization $\pi_{GL(n)}(S_{[\alpha,\beta]_\infty}(x,y))$ は、Young図形による簡単な求め方がある。([Ko])。

以下、$l(\alpha)+l(\beta)\le n$ のとき $\pi_{GL(n)}(S_{[\alpha,\beta]_\infty}(x,y))$ を指標にもつ $GL(n,\mathbb{C})$ の表現を $[\alpha,\beta]_{GL(n)}$ と書くことにする。 S に現われる表現の最高ウェイトは root lattice の元のみだから、$|\alpha|\ne|\beta|$ のとき $p_H([\alpha,\beta]_{GL(n)},t)=0$ となるので $|\alpha|=|\beta|$ のときのみを考えればよい。

S の k 次成分 S^k の $GL(n,\mathbb{C})$ の表現としての指標は、

$$\sum_{\substack{\mu:\text{Young図形},\\ |\mu|=k,\ l(\mu)\le n}} S_\mu(x_1,\cdots,x_n)\cdot S_\mu(x_1^{-1},\cdots,x_n^{-1})$$

で与えられる。ここで $S_\mu(x_1,\cdots,x_n)$ は n 変数の Schur 関数で 表現 $[\mu,\phi]_{GL(n)}$ の指標である。(cf [M])。 目標は、この式の Schur 関数への分解を知りたいのであるが、直接それを求めるのは大変なので、一度 $\Lambda(x)\otimes\Lambda(y)$ の中で、この式に対応する式の分解を調べ、その後で $\pi_{GL(n)}$ を施すという方法をとることにする。 対応する式の分解については、([Ko])、

$$S_\mu(x)\,S_\nu(y)=\sum_{\tau,\xi,\eta} LR^{\mu}_{\tau,\xi}\,LR^{\nu}_{\tau,\eta}\,S_{[\xi,\eta]_\infty}(x,y)$$

が成り立つので、$\nu=\mu$ として、両辺に $\pi_{GL(n)}$ を施すことにより次を得る。

[定理2.1] α, β を $|\alpha|=|\beta|$, $l(\alpha)+l(\beta)\le n$ なるYoung図形とし、
$P_{GL(n)}([\alpha,\beta]) = \{(\xi,\eta) \mid \xi, \eta$ はYoung図形で、$|\xi|=|\eta|$ かつ、
$\pi_{GL(n)}(S_{[\xi,\eta]_\infty}(x,y)) = sgn_{GL(n)}([\xi,\eta])\cdot \pi_{GL(n)}(S_{[\alpha,\beta]_\infty}(x,y))$,
$sgn_{GL(n)}([\xi,\eta]) = \pm 1\}$,

$$a_k = \sum_{(\xi,\eta)\in P_{GL(n)}([\alpha,\beta])} \sum_{\substack{\mu,\tau \\ |\mu|=k,\ l(\mu)\le n}} sgn_{GL(n)}([\xi,\eta])\, LR^{\mu}_{\tau,\xi} LR^{\mu}_{\tau,\eta}, \quad k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}.$$

とするとき、

$$P_H([\alpha,\beta]_{GL(n)}, t) = \left\{\prod_{i=1}^{n}(1-t^i)\right\}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

さて、$P_{GL(n)}([\alpha,\beta])$ は、以下のようにして求められる。
α, β をYoung図形とし、$l(\alpha)+l(\beta)\le n$ とする。
$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \cdots, \bar{\alpha}_r)$, $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \cdots, \bar{\beta}_s)$,
$(a_1, a_2, \cdots) = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2-1, \cdots, \bar{\alpha}_r-r+1, -r, -r-1, \cdots)$
$(b_1, b_2, \cdots) = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2-1, \cdots, \bar{\beta}_s-s+1, -s, -s-1, \cdots)$

$$\delta = (0, 1, 2, \cdots)$$

とおいて、$k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ と、自然数 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k$, $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k$ に対して、Young図形の対 $g_{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_k}(\alpha,\beta)_n = (\xi,\eta)$ を、

$$\bar{\xi} = (n+1-b_{j_k}, n+1-b_{j_{k-1}}, \cdots, n+1-b_{j_1}, a_1, a_2, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, \hat{a}_{i_2}, \cdots) + \delta$$
$$\bar{\eta} = (n+1-a_{i_k}, n+1-a_{i_{k-1}}, \cdots, n+1-a_{i_1}, b_1, b_2, \cdots, \hat{b}_{j_1}, \cdots, \hat{b}_{j_2}, \cdots) + \delta$$

で定める。(ただし"^"はその数字をぬくことを意味することとする)，このとき，

[命題2.2]

$$P_{GL(n)}([\alpha,\beta]) = \left\{ g_{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_k}(\alpha,\beta)_m \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ \begin{matrix} 1\leq i_1<\cdots<i_k, \\ 1\leq j_1<\cdots<j_k \end{matrix} \right\}.$$

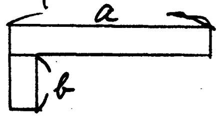
$$\pi_{GL(n)}\left(S_{g_{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_k}(\alpha,\beta)_m}(x,y)\right) = (-1)^m S_{[\alpha,\beta]_m}(x).$$

ここで $S_{[\alpha,\beta]_m}(x) = \pi_{GL(n)}\left(S_{[\alpha,\beta]_\infty}(x,y)\right)$，$m = k+\sum_{p=1}^{k}(i_p+j_p)$.

(例) $n=3$, $k=2$, $i_1=1$, $i_2=3$, $j_1=2$, $j_2=3$, $\alpha=$ , $\beta=$ 

のとき，$g_{1,3,2,3}([\alpha,\beta])_3 = \left((332221),(33331)\right)$.

以下，(1) α, β が hook の場合，(2) $\alpha=(a)$ の場合，(3) $\beta=(1^b)$ の場合，そして (4) $GL(n,\mathbb{C})/P$ (Pは parabolic 部分群) のコホモロジーと generalized exponents との関係について考える。

α, β が hook の場合，すなわち $\alpha=(a,1^b)$，$\beta=(c,1^d)$，$|\alpha|=|\beta|$，$\ell(\alpha)+\ell(\beta)\leq n$ のとき，(命題2.2) $\alpha=$ 

より

[補題2.3] α, β を上のようにとると，

$$\{(\xi,\eta)\in P_{GL(n)}([\alpha,\beta]) \mid \ell(\xi),\ell(\eta)\leq n\} = \{(\alpha,\beta),(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\}$$

ただし $\tilde{\alpha}=(a,1^{n-d-1})$，$\tilde{\beta}=(c,1^{n-b-1})$.

さて．α, βに対して．

$$Z(a,b,c,d;k) = \left\{\prod_{i=1}^{k}(1-t^i)\right\}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\mu,\tau \\ |\mu|=m,\ \ell(\mu)\le k}} LR^{\mu}_{\tau,\alpha} LR^{\mu}_{\tau,\beta}\Big)t^m\right\}$$

とおくと．$[\alpha,\beta]_{GL(n)}$ の generalized exponents は，定理2.1，命題2.2，補題2.3より次のように計算される。

[命題2.4] $\alpha=(a,1^b)$，$\beta=(c,1^d)$，$|\alpha|=|\beta|$．$\ell(\alpha)+\ell(\beta)\le n$ とすると．

$$P_H([\alpha,\beta]_{GL(n)},t) = Z(a,b,c,d;n) - Z(a,n-d-1,c,n-b-1;n).$$

さらに，$Z(a,b,c,d;k)$は次のような漸化式をみたす。

$$\begin{aligned} Z(a,b,c,d;k) &= Z(a,b,c,d;k-1) + tZ(a,b-1,c,d-1;k-1) \\ &\quad - t(1-t^{k-1})Z(a,b-1,c,d-1;k-2) \\ &\quad + t^k Z(a,b-1,c-1,d;k-1) + t^k Z(a-1,b,c,d-1;k-1) \\ &\quad + t^k Z(a-1,b,c-1,d;k). \end{aligned}$$

初期条件は，$Z(a,0,a,0;1)=t^a$，$Z(0,0,0,0;k)=1$．

$Z(1,0,1,0;k)=t(1-t^k)/(1-t)$，次のいずれかが成立つ時 $Z(a,b,c,d;k)=0$，$k\le b$，$k\le d$，$a=0$かつ$b>0$，$c=0$かつ$d>0$，$a<0$，$b<0$，$c<0$，$d<0$，$k<0$．

[例] (1) $\begin{bmatrix} n \\ a \end{bmatrix} = \dfrac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\cdots(1-t^{n-a+1})}{(1-t^a)(1-t^{a-1})\cdots(1-t)}$ とするとき，

$Z(a,0,a,0;k) = t^a\begin{bmatrix} k+a-1 \\ a \end{bmatrix}$，$Z(1,k-1,1,k-1;k)=t^k$．

従って．$P_H((\square,\square)_{GL(n)},t) = Z(1,0,1,0;n) - Z(1,n-1,1,n-1;n)$

$= t\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} - t^n = t+t^2+\cdots+t^{n-1}$．すなわち．$GL(n,\mathbb{C})$の

adjoint表現の generalized exponents である。

(2) $Z(1,1,1,1;k)=t^2\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}$, $Z(1,k-2,1,k-2;k)=t^{k-1}\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}$ より

$$P_H([\text{日},\text{日}]_{GL(n)},t)=t^2\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}-t^{n-1}\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}$$

(3) その他、簡単に求まるものとしては、$Z(a,0,a-1,1;k)$ $=t^{a+1}\begin{bmatrix}a-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k+a-2\\a\end{bmatrix}$, $Z(a,0,r,a-r;k)=t^{a+\frac{(a-r)(a-r+1)}{2}}\begin{bmatrix}a-1\\r-1\end{bmatrix}$ $\times\begin{bmatrix}k+r-1\\a\end{bmatrix}$. $Z(a,1,1,a;k)=t^{1+\frac{a(a+1)}{2}}\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\a+1\end{bmatrix}$,

$Z(a,1,a,1;k)=t^{a+1}\left\{\begin{bmatrix}k\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k+a-2\\a-1\end{bmatrix}+t^3\begin{bmatrix}a\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k+a-2\\a+1\end{bmatrix}\right\}$.

[命題2.5] $\alpha=(a)$, $\ell(\beta)=n-1$, $|\alpha|=|\beta|$, のとき

$$P_H([\alpha,\beta]_{GL(n)},t)=t^{[\frac{n}{2}]}\cdot P_H([(a-n),\beta]_{GL(n)},t).$$

[命題2.6] $\beta=(1^b)$, $|\alpha|=|\beta|$, $\ell(\alpha)+\ell(\beta)\leq n$ のとき、すなわち P7, [注] (1) に従って言い換えると、$[\alpha,\beta]_{GL(n)}$ が $(\det)^{-1}\otimes\lambda_{GL(n)}$, $(|\lambda|=n)$ に同値なとき,

$$P_H((\det)^{-1}\otimes\lambda_{GL(n)},t)=P_{H(\mathfrak{S}_n)}(\overline{\lambda}_{\mathfrak{S}_n},t)$$
$$=\prod_{a\in\overline{\lambda}}\frac{t^{f(a)}}{1-t^{h(a)}}\cdot\prod_{i=1}^{n}(1-t^i)$$

ここで $P_{H(\mathfrak{S}_n)}(\overline{\lambda}_{\mathfrak{S}_n},t)$ は、対称群の自然表現に対して、$GL(n,\mathbb{C})$ の場合と同様に定義された、$\overline{\lambda}$ に対応する対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の generalized exponents により定まる多項式。第二の等式は、Kirillov ([K]) による公式で、$f(a)$, $h(a)$ は,

λ の cell a を角とする hook の foot length および hook length である。(hook μ の foot length とは $l(\mu)-1$ のこと).

この命題により次のことがわかる ([B-G-G])

[系 2.7] $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$, $|\lambda|=n$ とし、$GL(n,\mathbb{C})$ の parabolic 部分群 P_λ を、

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} GL(\lambda_1,\mathbb{C}) & & & \\ & GL(\lambda_2,\mathbb{C}) & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & GL(\lambda_r,\mathbb{C}) \end{pmatrix},$$

$X_\lambda = GL(n,\mathbb{C})/P_\lambda$ とする。e_i を $GL(n,\mathbb{C})$ の i 次交代テンソル表現とし、$e_{\lambda_1}\otimes e_{\lambda_2}\otimes\cdots\otimes e_{\lambda_r} = \bigoplus_\mu c_\mu\cdot\mu_{GL(n)}$ とすると、X_λ の Betti 数より決まる Poincaré 多項式 $P_{X_\lambda}(t)$ は、

$$P_{X_\lambda}(t) = \sum_\mu c_\mu\cdot P_H\left((\det)^{-1}\otimes\mu_{GL(n)}, t^2\right).$$

§3. $Sp(2n,\mathbb{C})$ の generalized exponents.

$$Sp(2n,\mathbb{C}) = \left\{ A\in GL(2n,\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^tAJA = J,\ J = \begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & 1\ \ {-1} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とする。$Sp(2n,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現の同値類は、深さが n 以下の Young 図形と1対1対応する。それを、GL の場合と同様に $\lambda_{Sp(2n)}$ と書くことにする。$Sp(2n,\mathbb{C})$ の adjoint 表現は self dual であって、$GL(2n,\mathbb{C})$ の 2 次対称テンソル表現 $(2)_{GL(2n)}$ を $Sp(2n,\mathbb{C})$ に制限して得られる。従って $Sp(2n,\mathbb{C})$ のリー環上の k 次対称テンソル空間は、$Sp(2n,\mathbb{C})$ 加群として

plethysm $(k)_{GL(2n)} \circ (2)_{GL(2n)}$ を $Sp(2n, \mathbb{C})$ に制限して得られる。
ところで、この plethysm は次のように分解する（[L]）

$$(k)_{GL(2n)} \circ (2)_{GL(2n)} = \bigoplus_{\substack{\kappa \\ |\kappa|=k,\ \ell(2\kappa)\le 2n}} (2\kappa)_{GL(2n)}$$

ここで $\kappa = (k_1, \cdots, k_r)$ としたとき $2\kappa = (2k_1, \cdots, 2k_r)$.
また、$\lambda_{GL(2n)}$ の $Sp(2n, \mathbb{C})$ への制限は次のように分解する。
（[K-T]）.

$$\lambda_{GL(2n)}\downarrow_{Sp(2n)} = \sum_{\mu} \Big(\sum_{\kappa} LR^{\lambda}_{2\kappa, \mu} \Big) \pi_{Sp(2n)}(\mu_{Sp}).$$

ここで，μ_{Sp} は universal character ring Λ の元で，Sp の universal character，$\pi_{Sp(2n)} : \Lambda \to$ （$Sp(2n, \mathbb{C})$ の指標環）は specialization homomorphism である（[K-T]）．$\pi_{Sp(2n)}(\mu_{Sp})$ は 0 又は、ある Young 図形 ν があって $\pm\nu_{Sp(2n)}$ になる。
その求め方のアルゴリズムについては [K-T] を参照されたい。
上記の二式より次が導かれる。

[定理 3.1] $\ell(\lambda) \le n$ のとき，

$$P_H(\lambda_{Sp(2n)}, t) = \Big\{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{2i})\Big\}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{\mu \in \rho_{Sp(2n)}(\lambda)} sgn_{Sp(2n)}(\mu)\Big(\sum_{\substack{\kappa, \nu \\ |\kappa|=k,\ \ell(2\kappa)\le 2n}} LR^{2\kappa}_{2\nu, \mu}\Big)\Big) t^k\Big\}.$$

ここで $\rho_{Sp(2n)}(\lambda) = \{\mu \mid \pi_{Sp(2n)}(\mu_{Sp}) = sgn_{Sp(2n)}(\mu)\lambda_{Sp(2n)},\ sgn_{Sp(2n)}(\mu) = \pm 1\}$.

$\rho_{Sp(2n)}(\lambda)$ は次のようにして求められる。

$\ell(\lambda) \le n$，$\bar{\lambda} = (k_1, k_2, \cdots, k_{\lambda_1}, 0, 0, \cdots)$，$\delta = (0, 1, 2, 3, \cdots)$，

$(a_0, a_1, \cdots) = \overline{\lambda} - \delta = (k_1, k_2-1, k_3-2, \cdots)$とし，整数 $0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ に対し，

$$g^{Sp(2n)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda) = \big(2(n+1)-a_{i_r}, 2(n+1)-a_{i_{r-1}}, \cdots, 2(n+1)-a_{i_1}, a_0, a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots \cdots, \hat{a}_{i_r}, \cdots\big) + \delta .$$

とする。"∧"は，その数字をぬくことを意味する。さて，

$$p^{Sp(2n)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda) = \overline{g^{Sp(2n)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda)}$$

とすると，

[命題3.2]

$$P_{Sp(2n)}(\lambda) = \{ p^{Sp(2n)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda) \mid r \ge 0,\ 0 \le i_1 < \cdots < i_r \} .$$

$$\pi_{Sp(2n)}\big(p^{Sp(2n)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda)\big) = (-1)^{r+\sum_{j=1}^{r} i_j} \cdot \lambda_{Sp(2n)} .$$

さて次にλがhookの場合を考える。$\lambda = (a, 1^b)$に対し，

$$\chi_{a,b,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{\kappa \\ |\kappa| = i,\ \ell(\kappa) \le k}} \sum_{\nu} LR^{2\kappa}_{\overline{2\nu},\lambda} \Big) t^i$$

とすると，上の命題より，

[命題3.3] $\lambda = (a, 1^b)$，$\ell(\lambda) \le n$ のとき，

$$P_H(\lambda_{Sp(2n)}, t) = \Big\{ \prod_{i=1}^{n} (1 - t^{2i}) \Big\} (\chi_{a,b,2n} - \chi_{a,2n-b,2n}) .$$

$\chi_{a,b,k}$は次のような漸化式をもつ。

[命題3.4] (1) kが偶数のとき，

$$(1-t^k)\chi_{a,b,k} = \chi_{a,b,k-1} + t^k \chi_{a-1,b-1,k-1} + t^2 \chi_{a,b-2,k-2}$$

$- t^2 \chi_{a,b-2,k-3}$.

(2) k が奇数のとき，$(a,b) \neq (1,1)$ ならば．

$$\chi_{a,b,k} = \chi_{a,b,k-1} + t^k \chi_{a-2,b,k} + t\chi_{a-1,b-1,k-1} - t\chi_{a-1,b-1,k-2}.$$

$$\chi_{1,1,k} = \chi_{1,1,k-1} .$$

初期条件は，$\chi_{0,0,0} = 1$，$\chi_{0,0,k} = \prod_{i=1}^{[\frac{k}{2}]} (1-t^{2i})^{-1}$ $(k>0)$，$a<0$ 又は $b<0$ 又は $k<0$ の時 $\chi_{a,b,k} = 0$，$b+1 > k$ のとき $\chi_{a,b,k} = 0$，$\chi_{a,b,0} = 0$ $((a,b) \neq (0,0))$，$\chi_{0,b,k} = 0$ $(b>0)$.

§4. $SO(2n+1,\mathbb{C})$，$SO(2n,\mathbb{C})$ の generalized exponents.

$\lambda_{SO(m)}$ $(m = 2n+1, 2n, \ell(\lambda) \leq n)$ を．Young 図形 λ に対応する $SO(m,\mathbb{C})$ の表現とする。$SO(m,\mathbb{C})$ の coadjoint 表現は，$GL(m,\mathbb{C})$ の2次交代テンソル表現 $(1,1)_{GL(m)}$ を $SO(m,\mathbb{C})$ に制限して得られるから，plethysm $(k)_{GL(m)} \circ (1,1)_{GL(m)}$ の $SO(m,\mathbb{C})$ への制限を考えることになる。

$$(k)_{GL(m)} \circ (1,1)_{GL(m)} = \sum_{\substack{\kappa \\ |\kappa|=k,\ \ell(\overline{2\kappa}) \leq m}} (\overline{2\kappa})_{GL(m)} \quad , \quad ([L]).$$

$$\lambda_{GL(m)} \downarrow_{SO(m)} = \sum_{\mu} \Big(\sum_{\kappa} LR^{\lambda}_{2\kappa,\mu} \Big) \pi_{O(m)}(\mu_{SO}), \quad ([K-T])$$

ただし．μ_{SO} は．universal character ring Λ の元で．SO の universal character，$\pi_{O(m)} : \Lambda \to (SO(m,\mathbb{C})$ の指標環$)$ は specialization homomorphism である ([K-T])。 Sp の場合と同様に $\pi_{O(m)}$ の像は 0 になるか，又はある Young 図形 ν があ

って $\pm \nu_{SO(m)}$ となるかのいずれかである。ν は、Young図形を用いた簡単なアルゴリズムによって求められる。

上記の二式より、

[定理 4.1] $\ell(\lambda) \leq n$ のとき、

$$P_H(\lambda_{SO(m)}, t) = F(m,t) \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu \in P_{SO(m)}(\lambda)} sgn_{SO(m)}(\mu) \left(\sum_{\substack{\kappa \\ |\kappa|=k,\ \ell(2\kappa) \leq m}} \sum_{\nu} LR^{\overline{2\kappa}}_{2\nu,\mu} \right) \right) t^k \right\}.$$

ここで $F(m,t)$ は、$m = 2n+1$ のとき $\prod_{i=1}^{n}(1-t^{2i})$、$m = 2n$ のとき、$(1-t^n)\prod_{i=1}^{n-1}(1-t^{2i})$ で、$P_{SO(m)}(\lambda) = \{\mu \mid \pi_{O(m)}(\mu_{SO}) = sgn_{SO(m)}(\mu)\ \lambda_{SO(m)}\}$.

$P_{SO(m)}(\lambda)$ は次のようにして求められる。

$\overline{\lambda} = (k_1, k_2, \cdots, k_{\lambda_1}, 0, 0, \cdots)$, $\delta = (0, 1, 2, \cdots)$

$(a_0, a_1, \cdots\ ) = \overline{\lambda} - \delta$ とし、整数 $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ に対し、

$$g^{SO(m)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda) = (m-a_{i_r}, m-a_{i_{r-1}}, \cdots, m-a_{i_1}, a_0, a_1, \cdots, \hat{a}_{i_1}, \cdots, \hat{a}_{i_r}, \cdots) + \delta.$$

$$p^{SO(m)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda) = \overline{g^{SO(m)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda)}.$$

としたとき、

[命題 4.2].

$$P_{SO(2n+1)}(\lambda) = \{ p^{SO(2n+1)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda) \mid r \geq 0,\ 0 \leq i_1 < \cdots < i_r \}$$

$$P_{SO(2n)}(\lambda) = \{ p^{SO(2n)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda) \mid \ell(\lambda) < n \text{ の時 } r \geq 0,\ \ell(\lambda) = n \text{ の時 } r \geq 1,\ 0 \leq i_1 < \cdots < i_r \}.$$

$$\pi_{SO(m)}\left(p^{SO(m)}_{i_1,\cdots,i_r}(\lambda) \right) = (-1)^{\sum_{j=1}^{r} i_j} \cdot \lambda_{SO(m)}.$$

λ が hook の時，Sp と同様の事が成り立つ。$\lambda=(a,1^b)$ に対し，

$$y_{a,b,k}=\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\kappa\\ |\kappa|=i,\ \ell(\overline{2\kappa})\le k}}\sum_{\nu} LR^{\overline{2\kappa}}_{2\nu,\lambda}\Big)t^i$$

とすると

[命題4.3] $\lambda=(a,1^b)$，$\ell(\lambda)\le n$ のとき，$(n=[\frac{m}{2}])$

$$P_H(\lambda_{SO(m)},t)=F(m,t)\{y_{a,b,2[\frac{m}{2}]}+y_{a,m-2-b,2[\frac{m}{2}]}\}.$$

ここで $F(2n+1,t)=\prod_{i=1}^{n}(1-t^{2i})$，$F(2n,t)=(1-t^n)\prod_{i=1}^{n-1}(1-t^{2i})$．

また，$y_{a,b,k}$ の漸化式については，

[命題4.4] (1) k が偶数の時，$(a,b)\neq(1,1)$ ならば．

$$(1-t^k)y_{a,b,k}=y_{a,b,k-2}+t^k(1-t^k)y_{a-2,b,k}$$
$$+t\cdot y_{a,b-2,k-2}-t\cdot y_{a,b-2,k-4}+t^{k-1}(1+t)y_{a-1,b-1,k-2}.$$

$$(1-t^k)y_{1,1,k}=y_{1,1,k-2}+t^{k-1}y_{0,0,k-2}.$$

(2) k が奇数のときは，$y_{a,b,k}=y_{a,b,k-1}$．

初期条件は，$y_{0,0,0}=1$，$y_{0,0,k}=\prod_{i=1}^{[k/2]}(1-t^{2i})^{-1}$ $(k>0)$，

$a<0$ 又は $b<0$ 又は $k<0$ 又は $b+1<k$ のとき $y_{a,b,k}=0$，

$y_{a,b,0}=0$ $((a,b)\neq(0,0))$，$y_{0,b,k}=0$ $(b>0)$．

参考文献

[B-G-G] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand and S.I. Gelfand : Schubert cells and cohomology of the space G/P ; Russian

Math. Surveys, 28 (1973), 1-26.

[H] W. H. Hesselink : Characters of the Nullcone ; Math. Ann., 252 (1980), 179-182.

[K] A. A. Kirillov : Polynomial covariants of the symmetric group and some of its analogs ; Functional Anal. appl., 18 (1984), 63-64.

[Ko] K. Koike : On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups ; to appear in Adv. Math.

[K-T] K. Koike and I. Terada : Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n ; J. Algebra, 107 (1987) 466-511.

[Ka] S. Kato : Spherical functions and a q-analogue of Kostant's weight multiplicity formula. ; Invent. Math., 66 (1982) no.3, 461-468.

[Kos] B. Kostant : Lie group representations on polynomial rings ; Amer. J. Math., 85 (1963), 327-404.

[L] D. E. Littlewood : The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups ; 2nd. ed., Oxford Univ. Press, London, 1950.

[M] I. G. Macdonald : Symmetric Functions and Hall Polynomials ; Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.

[Ma] J. Matsuzawa : On the generalized exponents of classical Lie groups ; to appear in Comm. Alg.