数理解析研究所講究録
第 630 巻 1987 年 86-104

On the irreducible representations of the finite classical groups with non-connected centers

奈良教育大学　浅井照明 (Teruaki Asai)

0° 序. 中心が連結である有限 reductive 群の指標の分類に関しては、周知の如く、G. Lusztig [8] によって決定され又連結でない場合に関しても彼による短いコメントがある [9]。しかしながら一応見やすいとは言えない。
parabolic 部分群の Levi 部分群の cuspidal 表現からの誘導表現の自己準同形環 H に関しては、Howlett-Lehrer による一般的記述 [6] があり、それによれば、H にはある Coxeter 群に付随するヘッケ環 (Bourbaki [4] の意味) を部分環として含み、それを有限群で拡大したものであって (群の拡大と類似の方法で) 2-cocycle を介在させて、定式化される。

この稿では、Dynkin 図式が連結で且つ B, C, D の時 ($^3D_4$ は一応除く)、その具体的記述が、ほぼ、群の中心が連結である場合に帰着させられることを示す。特に上記 2-cocyle が自明なものとなることがわかる。(注意、群の中心が連結である時は、subcusp. rep の比が ≠ 1 であることから、2-cocycle が自明なものとなるのは直接的。) 以外な事に、論点は実は双対群における半単純な元の中心化群の連結成分の成す群が位数 1 or 2 であることに集約されることが判明

する。

猶、この稿は本来筆者が得た中心が連結の場合の結果[ ]を中心が連結でない場合に拡張することを目的としていたが、紙面の都合上 Hecke-代数に限ることにしたい。

1° 双対群の半単純元の中心化群の連結成分の成す群。

以下 G は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された連結 reductive 群とする。その中心 $Z(G)$ は必らずしも連結でないとする。Deligne-Lusztig [5] によれば、次の様な $\mathbb{F}_q$ 上定義された連結 reductive 群 $\tilde{G}$ で、その中心が連結であるものが存在する：

$$G \hookrightarrow \tilde{G} \ , \quad DG = D\tilde{G} \qquad (D : \text{derived gr.})$$

さて埋め込み $\iota : G \hookrightarrow \tilde{G}$ はその双対群の全射を誘導し：

$$\iota^* : \tilde{G}^* \longrightarrow G^* \qquad\qquad (F = \text{Frobenius 写像})$$

且つ、その核 $\mathrm{Ker}\,\iota^*$ は連結なトーラスと成る。今 G^* の F-固定な半単純元 s を与えよう。その時 $\tilde{G}^*$ の F-固定な半単純元 $\tilde{s}$ が定まり

$$s = \iota^*(\tilde{s})$$

となる。便宜上 s を含む G^* の F-固定な極大トーラス T^* を 1 つ定め、$\tilde{T}^* = \iota^{*-1}(T^*)$ と置く。今 W を T^* に関しての G^* の Weyl 群とすれば、それは $\tilde{T}^*$ に関しての $\tilde{G}^*$ の Weyl 群と自然に同一視される。

ここで W の部分群 W_s, $W_{\tilde s}$ を次の様に定めよう。

$$W_s = \{ w \in W \,;\ \dot w s \dot w^{-1} = s \}$$

$$W_{\tilde s} = \{ w \in W \,;\ \dot w \tilde s \dot w^{-1} = \tilde s \}$$

今、$\tilde G$ の中心が連結であることから、$D\tilde G^*$ が単連結となり、従って $\tilde s$ の中心化群 $Z_{\tilde G^*}(\tilde s)$ は連結となり、$W_{\tilde s}$ は $\tilde T^*$ に関しての $Z_{\tilde G^*}(\tilde s)$ の Weyl 群となる。又同時に T^* に関しての $Z^0_{G^*}(s)$ $(= Z_{G^*}(s)$ の単位元成分$)$ の Weyl 群でもある。更に

$$Z_{G^*}(s)/Z^0_{G^*}(s) \cong W_s/W_{\tilde s}$$

が成立する。(この箇所は Springer-Steinberg [10] より示すことが出来る) そこで $w \in W_s$ に対して、その代表元 $\dot w \in N_{\tilde G^*}(\tilde T^*)$ をえらべば、自然な写像

$$w \in W_s \longmapsto \dot w \tilde s \dot w^{-1} \tilde s \in \operatorname{Ker} \iota^*$$

が定まるが これは $W_{\tilde s}$ を核とする準同形である。従って

$$Z_{G^*}(s)/Z^0_{G^*}(s) \cong \{ z \in \operatorname{Ker} \iota^* \,;\ \tilde s \underset{W}{\sim} \tilde s z \}$$

が成立する。ここで $\underset{W}{\sim}$ は W-共役を意味する。

さて $\tilde G$ の F-固定な parabolic 部分群 $\tilde P$ を1つ定め、その F-固定な Levi 部分群 $\tilde L$ を定め、

$$L = \tilde L \cap G, \quad P = \tilde P \cap G$$

と置く。L 及び $\tilde L$ の双対群を L^*, $\tilde L^*$ とすれば、$L^* \hookrightarrow G^*$, $\tilde L^* \hookrightarrow \tilde G^*$ と見なせ、且つ $\iota^*(\tilde L^*) = L^*$ と思って差し支えない。そこで、$L^* \supset T^*$ とし、W_L を T^* に関しての L^* の Weyl 群と

しよう。その時

$$Z_{L^*}(s)/Z^{\circ}_{L^*}(s) \cong \{z \in \operatorname{Ker}\iota^* ;\ \tilde{s} \underset{\widetilde{W}_L}{\sim} \tilde{s}z\}$$

が先の議論より成立し、次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
Z_{L^*}(s)/Z^{\circ}_{L^*}(s) & \cong & \{z \in \operatorname{Ker}\iota^* ;\ \tilde{s} \underset{\widetilde{W}_L}{\sim} \tilde{s}z\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z_{G^*}(s)/Z^{\circ}_{G^*}(s) & \cong & \{z \in \operatorname{Ker}\iota^* ;\ \tilde{s} \underset{\widetilde{W}}{\sim} \tilde{s}z\}
\end{array}$$

右側の縦の写像は injection であり、従って

<u>lemma 1.</u> 自然な写像 $Z_{L^*}(s)/Z^{\circ}_{L^*}(s) \to Z_{G^*}(s)/Z^{\circ}_{G^*}(s)$ は injection である。

2° 中心が連結の群に帰着される自己準同形環

Lusztig [7] に従い $\mathcal{E}(\tilde{L}^F, \{\tilde{s}\})$ を $\tilde{s}$ に付随する $\tilde{L}^F$ の既約表現の類として、$\mathcal{E}(\tilde{L}^F, \{\tilde{s}\})$ に属する $\tilde{L}^F$ の既約表現の geometric conjugacy class は $\{\tilde{s}\}$ であると言うことにしよう。$\mathcal{E}(L^F, \{s\})$ の cuspidal 表現を与えると、$\iota^*(\tilde{s}) \underset{L^*}{\sim} s$ となる $\tilde{s} \in \tilde{L}^{*F}_{s.s}$ がえらべ、$\mathcal{E}(\tilde{L}^F, \{\tilde{s}\})$ の cuspidal 表現の L^F への制限の中に含まれる。そこで代表元 $s, \tilde{s}$ を取り換えて、1° の状況になっている (i.e. $\iota^*(\tilde{s}) = s$) としてよい。当初の目的は B. C. D の系列を問題とする為 差し支えない限り以下の仮定をする（条件 (C1)−(C4)）:

(C1) $\mathcal{E}(\tilde{L}^F, \{\tilde{s}\})$ には唯一つの cuspidal 表現 $\tilde{\rho}$ が存在する。

(C2) 自然な埋め込み $Z_{L^*}(\omega)/Z^{\circ}_{L^*}(\omega) \to Z_{G^*}(\omega)/Z^{\circ}_{G^*}(\omega)$ は同形である（lemma 1 参照）。

(C3) (C1) の $\tilde{\rho}$ に関して、$\tilde{P}$ を含む任意の F-stable parabolic Q に対し、又 $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{Q}^F} \tilde{\rho}$ に実現される任意の Q^F の既約表現 $\tilde{\mu}$ に対し、$\tilde{\mu} | (\tilde{Q} \cap G)^F$ は multiplicity free である。

(C3) は次の条件が満されれば良い（Remark 6 でもう少し良い条件を与える）。

(C3)′ $\tilde{L}^F/L^F$ ($\cong \tilde{G}^F/G^F$) は巡回群である。

さて

$$\underline{W} = \{ w \in N_{\tilde{G}}(\tilde{L})^F/\tilde{L}^F \ ; \ \tilde{\rho} \cong \tilde{\rho} \cdot \mathrm{ad}\, w \}$$

と置く。ad は adjoint 作用である。その時 $\tilde{G}$ の中心が連結であることから $\underline{W}$ は自然に Coxeter 群と成る。煩雑さを避ける為、次を仮定する。

(C4) $\underline{W}$ の既約成分には E_7 or E_8 の Coxeter 群はない。

以下、中心が連結の時の ($\tilde{G}^F$-) 自己準同形環の記述が既にされていることを前提に置く。$\tilde{\rho}$ を (C1) のものとする時、

$$(*) \qquad \mathrm{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho}$$

の $\tilde{G}^F$-自己準同形環は $\underline{W}$ に関しての Hecke-岩堀代数の形で記述され、その既約成分は $\underline{W}$ の既約 指標で、

parameterize される：

$$\chi \in \underline{W}^\wedge \longleftrightarrow \tilde{\rho}_\chi \in \mathrm{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho}$$

従って $m_\chi = \dim \chi$ とすれば、

$$\mathrm{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho} \cong \sum_\chi m_\chi \tilde{\rho}_\chi \qquad (\tilde{G}^F\text{-加群として})$$

が成立する。今 $\mathrm{Ker}\{\iota^*: \tilde{G}^* \to G^*\} = \mathrm{Ker}\{\iota^*: \tilde{L}^* \to L^*\}$

であり、これを単に $\mathrm{Ker}\,\iota^*$ と書いて紛れがない。そこで、

$$\Gamma = \{\mathfrak{z} \in (\mathrm{Ker}\,\iota^*)^F ; \tilde{s} \underset{W_L}{\sim} \tilde{s}\mathfrak{z}\} \; (= \{\mathfrak{z} \in (\mathrm{Ker}\,\iota^*)^F ; \tilde{s} \underset{W}{\sim} \tilde{s}\mathfrak{z}\})$$

と置く。（但し 2番目の等号成立は、(C2) による。$\underline{1}^\circ$ 参照。）

<u>lemma 2</u> (i) $A = \{\theta \in (\tilde{L}^F/L^F)^\wedge ; \tilde{\rho} \cong \tilde{\rho} \otimes \theta\}$ と置けば、

$A \cong \Gamma$

(ii) $\tilde{L}^F/L^F = \tilde{G}^F/G^F$ により、A を $(\tilde{G}^F/G^F)^\wedge$ の部分群と見なす。

その時、

(iia) $\forall \theta \in A, \forall \chi \in \underline{W}^\wedge$ に対して $\tilde{\rho}_\chi \otimes \theta \cong \tilde{\rho}_\chi$

(iib) $\forall \chi_1 \neq \chi_2 \in \underline{W}^\wedge, \forall \theta \in A$ に対して、$\tilde{\rho}_{\chi_1} \otimes \theta \not\cong \tilde{\rho}_{\chi_2}$

<u>証明</u> 条件 (C4) より、Benson-Curtis [3] が使用可であり、

通常の帰納法で事が足りる。 <u>Q.E.D.</u>

(C3) 及び lemma 2 より、$\tilde{\rho}$ 及び $\{\tilde{\rho}_\chi ; \chi \in \underline{W}^\wedge\}$ を

L^F 及び G^F に制限すると

$$\tilde{\rho}|L^F = \rho^{(1)} \oplus \cdots \oplus \rho^{(r)} \qquad (\text{既約分解})$$

$$\tilde{\rho}_\chi|G^F = \rho_\chi^{(1)} \oplus \cdots \oplus \rho_\chi^{(r)} \qquad (\;〃\;)$$

と書ける。但し $r = |A|$ である。

<u>lemma 3</u>　$N_G(L)^F/L^F \cong N_{\tilde{G}}(\tilde{L})^F/\tilde{L}^F$ により、$\underline{W}$ $(< N_{\tilde{G}}(\tilde{L})^F/\tilde{L}^F)$ を $N_G(L)^F/L^F$ の部分群と思う。その時、$\forall w \in \underline{W}$ に対して、$\rho^{(i)} \cong \rho^{(i)} \circ \mathrm{ad}\, w$ $(1 \leq i \leq r)$。

<u>証明</u>　$\tilde{L}^F$ は adjoint で $\{\rho^{(1)}, \cdots, \rho^{(r)}\}$ に推移的に作用する。各 $1 \leq i \leq r$ に対して、

$$\underline{W}^{(i)} = \{ w \in W \ ; \ \rho^{(i)} \cong \rho^{(i)} \circ \mathrm{ad}\, w \}$$

と置けば、$\underline{W}$ と $\tilde{L}^F$ の $\{\rho^{(1)}, \cdots, \rho^{(r)}\}$ における作用が、可換となることから、$\underline{W}^{(i)}$ が i に依存しないことがわかる。そこで、

$$\underline{W}^* = \underline{W}^{(i)}$$

と置く。その時 $\{\rho^{(1)}, \cdots, \rho^{(r)}\}$ の中から適当に $\{\mu^{(1)}, \cdots, \mu^{(s)}\}$ を選べば、

$$\{\rho^{(1)}, \cdots, \rho^{(r)}\} = \{ \mu^{(i)} \circ \mathrm{ad}\, w \mid 1 \leq i \leq s, \ w \in \underline{W}/\underline{W}^* \}$$

と書ける。今、$\mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F} \mu^{(i)} = \mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F} \mu^{(i)} \circ \mathrm{ad}\, w$ に注意すれば、$\mathrm{Ind}_{P^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho} = \bigoplus_{x \in \underline{W}^\wedge} m_x \tilde{\rho}_x$ によって、

$$(*) \qquad \mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F} (\mu^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mu^{(s)}) = |\underline{W}/\underline{W}^*|^{-1} \bigoplus_{x \in \underline{W}} m_x (\rho_x^{(1)} \oplus \cdots \oplus \rho_x^{(r)})$$

そこで、$\underline{W} \neq \underline{W}^*$ とすれば、$(*)$ の右辺は $\mathbb{Z}$－係数でなくなる。($\because$ lemma 2，$x = 1 \Rightarrow m_x = 1$)。従って $\underline{W} = \underline{W}^*$ でなければならない。　<u>Q.E.D.</u>

<u>Prop 4.</u> $1 \leq i \leq r$ に対して、

$$\underline{W} = \{ w \in N_G(L)^F/L^F \ ; \ \rho^{(i)} \cong \rho^{(i)} \circ \mathrm{ad}\, w \}$$

<u>証明</u> $w \in N_G(L)^F/L^F$ に対して、$\rho^{(i)} \cong (\mathrm{ad}\, w)^* \rho^{(i)}$ ($\underset{\mathrm{def}}{=}$ $\rho^{(i)} \circ \mathrm{ad}\, w$) とすれば、$(\mathrm{ad}\, w)^* \tilde{\rho}|L^F$ と $\tilde{\rho}|L^F$ は共に、$\rho^{(i)}$ を既約成分にもつ。従って $\tau \in (\tilde{L}^F/L^F)^\wedge$ が存在して、

$$(\mathrm{ad}\, w)^* \tilde{\rho} \cong \tilde{\rho} \otimes \tau \qquad (\tilde{L}^F\text{-加群として})$$

が成立し $(\mathrm{ad}\, w)^* \tilde{\rho}$ と $\tilde{\rho} \otimes \tau$ の geo. conj. class が同じ。そこで $\tau \in (\tilde{L}^F/L^F)^\wedge \longleftrightarrow z \in (\mathrm{Ker}\, i^*)^F$ とすれば、$\dot{w}^{-1} \tilde{s} \dot{w}$ と $\tilde{s} z$ が $\tilde{L}^*$ で共役であり、W_L-共役となり、$z \in P$ となる (lemma 2. (i))。これは、$w \in \underline{W}$ を意味する。

lemma 3 と併せて、prop を得る。 <u>Q.E.D.</u>

$$\tilde{\Xi} = \mathrm{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F} \tilde{\rho}, \quad \Xi^{(i)} = \mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F} \rho^{(i)} \quad (1 \leq i \leq r)$$

と置けば、$\tilde{\Xi}|G^F = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \Xi^{(i)}$ である。

<u>Theorem 5</u> ${}^\forall 1 \leq i \leq r$、及び ${}^\forall T \in \mathrm{End}_{\tilde{G}^F} \tilde{\Xi}$ に対して、$T(\Xi^{(i)}) = \Xi^{(i)}$ であり、

$$\mathrm{End}_{\tilde{G}^F} \tilde{\Xi} \rightarrow \mathrm{End}_{G^F} \Xi^{(i)} \quad (T \longmapsto T|\Xi^{(i)})$$

が $\mathbb{C}$ 上の多元環としての同形を与える。

<u>証明</u> $\mathrm{End}_{G^F} \Xi^{(i)}$ が $\{ w \in N_G(L)^F/L^F \mid \rho^{(i)} \cong \rho^{(i)} \circ \mathrm{ad}\, w \}$ を添字とした基底を持つことは、良く知られたことであり、prop 4 より、$\mathrm{End}_{G^F} \Xi^{(i)}$ のベクトル空間としての次元は

わかったことになる。あとは、その間の関係式を見出せば、良いのであるが、G^F-自己準同形の自然な構成から $\forall T \in \mathrm{End}_{\tilde{G}^F}\tilde{Z}$ に対し、$T(Z^{(i)}) = Z^{(i)}$ が確され、所期の定理を得る。 Q.E.D.

Remark 6. 上記の定理は (C1)–(C4) を仮定しているが、その中で条件 (C3) について述べる。$\tilde{Q}$ を $\tilde{G}^F$ の F-固定な任意の parabolic 部分群で $\tilde{P}$ を含み、$\tilde{M}$ をその Levi 部分群で $\tilde{L}$ を含むものとする。$\tilde{Q}\cap G = Q$, $\tilde{M}\cap G = M$ とする。

(I) $|Z_{G^*}(s)/Z^0_{G^*}(s)| \leq 3$ であれば、(C3) は成立する。
実際 $\forall \tilde{\mu} \in \mathcal{E}(\tilde{M}^F, \{\tilde{s}\})$ に対して、$\tilde{M}^F/M^F$ が Abel 群であることから、適当な自然数 m があり、

$$\tilde{\mu}|M^F = m(\mu_1 + \cdots + \mu_r)$$

と書ける。但し $\{\mu_1, \cdots, \mu_r\}$ は互いに同値でない。そこで $\langle \tilde{\mu}|M^F, \tilde{\mu}|M^F \rangle = m^2 r$ となる。ところが

$$\langle \tilde{\mu}|M^F, \tilde{\mu}|M^F \rangle = \langle \tilde{\mu}, \mathrm{Ind}_{M^F}^{\tilde{M}^F}(\tilde{\mu}|M^F) \rangle$$
$$= \langle \tilde{\mu}, \sum_{\theta \in (\tilde{M}^F/M^F)^\wedge} \tilde{\mu}\otimes\theta \rangle \leq 3$$

最後の不等号は $|Z_{M^*}(s)/Z^0_{M^*}(s)| \leq |Z_{G^*}(s)/Z^0_{G^*}(s)|$ による。(lemma 1 参照)。従って $m^2 r \leq 3$ であり、ここから $m=1$ でなければならない。即ち $\tilde{\mu}|M^F$ は multiplicity free である。($|Z_{G^*}(s)/Z^0_{G^*}(s)| = 1$ のときは、$\tilde{\mu}|M^F$ は既約)。

(II) (I)の条件について更に見てみよう。G^*_{ad} を G^* の adjoint群とし、$\pi : G^* \longrightarrow G^*_{ad} = \pi(G^*)$ を自然な写像とする。更に G^*_{ad} の単連結 Covering $\pi_1 : G^*_{sp} \longrightarrow G^*_{ad}$ を考える。すると、

$$Z_{G^*}(\rho)/Z^0_{G^*}(\rho) \hookrightarrow Z_{\pi(G^*)}(\pi(\rho))/Z^0_{\pi(G^*)}(\pi(\rho)) \hookrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi_1$$

が得られる。G^* (の閉体上のDynkin図形) が B_n, C_n, D_n の時は、$\underline{3^\circ}$ で述べる様に $Z_{\pi(G^*)}(\pi(\rho))/Z^0_{\pi(G^*)}(\pi(\rho)) = \{1\}$ or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり (I) の状況になり (C3) が成立。又 G^* が E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 の時は $\mathrm{Ker}\,\pi_1 = \{1\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ でやはり (C3) が成立することになる。群 G が A_n の時は (C3) 以前に (C2) に的合する場合が少く省略する。

$\underline{3^\circ}$ <u>Endomorphism algebra の記述</u>. $\underline{3^\circ}$ では G の Dynkin図形は B_n, C_n, D_n のいずれかとし、又 $^3D_4$ は除外する。
更に char $\mathbb{F}_q \neq 2$ とする。G^* の半単純元を見る為に、G^* からその adjoint 群 G^*_{ad} への自然な写像

$$\pi : G^* \longrightarrow G^*_{ad} = \pi(G^*)$$

を考える。G^* が B_n, C_n, D_n の場合に応じて $G_1^* = CSp_{2n}$, SO_{2n+1}, $CO^{\pm,0}_{2n}$ を選び、自然な写像

$$\pi_1 : G_1^* \longrightarrow G^*_{ad}$$

を考える。半単純元の中心化群の連結成分の群を G^*_{ad} or G_1^* で見る

ことにしよう。

s, L を②のように選び、$L_1^* = \pi_1^{-1}(\pi(L^*))$ とする。
すると L_1^* の F ー固定な半単純元 s_1 で

$$\pi_1(s_1) = \pi(s)$$

となるものがある。

<u>Lemma 7</u> 次の図式が可換。

$$\begin{tikzcd}
Z_{L^*}(s)/Z_{L^*}^{\circ}(s) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Z_{\pi(L^*)}(\pi(s))/Z_{\pi(L^*)}^{\circ}(\pi(s)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & Z_{L_1^*}(s_1)/Z_{L_1^*}^{\circ}(s_1) \arrow[d, hook] \\
Z_{G^*}(s)/Z_{G^*}^{\circ}(s) \arrow[r, hook] & Z_{\pi(G^*)}(\pi(s))/Z_{\pi(G^*)}^{\circ}(\pi(s)) \arrow[r, "\simeq"] & Z_{G_1^*}(s_1)/Z_{G_1^*}^{\circ}(s_1)
\end{tikzcd}$$

しかも、$Z_{L_1^*}(s_1)/Z_{L_1^*}^{\circ}(s_1) \to Z_{G_1^*}(s_1)/Z_{G_1^*}^{\circ}(s_1)$ が同形であれば、$Z_{L^*}(s)/Z_{L^*}^{\circ}(s) \longrightarrow Z_{G^*}(s)/Z_{G^*}^{\circ}(s)$ も同形である。

<u>証明</u> 連結成分の代表元をある F ー固定な極大トーラスの Weyl 群の中に選べば自明である。 <u>Q.E.D</u>

$Z_{G_1^*}(s_1)/Z_{G_1^*}^{\circ}(s_1) = \{1\}$ or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるから、次のいずれかが可能である。

(i) $Z_{L^*}(s)/Z_{L^*}^{\circ}(s) = Z_{G^*}(s)/Z_{G^*}^{\circ}(s) = \{1\}$

(ii) $Z_{L^*}(s)/Z_{L^*}^{\circ}(s) = Z_{G^*}(s)/Z_{G^*}^{\circ}(s) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(iii) $Z_{L^*}(s)/Z_{L^*}^{\circ}(s) = \{1\}$, $Z_{G^*}(s)/Z_{G^*}^{\circ}(s) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

もしも、G が B_n であれば ($G^* = Sp_{2n}$) 常に (i) であり、問題がない。

$\tilde{\rho}$を$\mathcal{E}(\tilde{L}^F, \{\tilde{s}\})$のcuspidal表現とする。Lusztig ([7], [8])により、$\tilde{\rho}$は$\mathcal{E}(\tilde{L}^F, \{\tilde{s}\})$の中の唯一つのcuspidal表現である。上の(i), (ii)の場合 2° の(c1)−(c4)が満たされ(Remark 6 参照)、Theorem 5 によって、$\tilde{\rho}|L^F$の任意の既約成分ρに対して、$\mathrm{End}_{G^F}(\mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F}\rho) \simeq \mathrm{End}_{\tilde{G}^F}(\mathrm{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F}\tilde{\rho})$となり問題がない。そこで残りの(iii)の場合について考えよう。簡単の為に$\{s\}$は孤立共役類であるとする。従って、$G_1^* = SO_{2n+1}$の時、s_1の固有値は1 or −1であり、$G_1^* = CO_{2n}^{\pm,0}$の時、s_1の固有値は1 or −1もしくは、s_1の最小多項式は$x^2-\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$, $\notin \mathbb{F}_q^{\times 2}$)である。($s_1$の最小多項式が$x^2-\lambda$の時は、閉体上では固有値が1 or −1の元と modulo center で共役である)。いずれの場合も取り扱いは全く同じ為$G_1^* = SO_{2n+1}$の時を例として以下述べることにしよう。

さてs_1の固有値−1の固有空間の次元を$2n_1$とし、固有値1の固有空間の次元を$2n_2+1$とする ($n = n_1 + n_2$)。その時、

$$Z_{G_1^*}^0(s_1) = SO_{2n_1}^{\varepsilon} \times SO_{2n_2+1} \qquad (\varepsilon = + \text{ or } -)$$

である。さてL_1^*は次の様に分解する。

$$L_1^* = A \times SO_{2n'+1}$$

但しAは$\mathbb{F}_q$上分解するトーラスである。$s_1 \in L_1^*$は次の様に書ける。

$$s_1 = (a, s_1') \qquad a \in A, \quad s_1' \in SO_{2n'+1}$$

s_1'もs_1と同じく孤立な役類を定め、s_1'の固有値-1の固有空間の次元を$2n_1'$とし、固有値1の固有空間の次元を$2n_2'+1$とする$(n'=n_1'+n_2')$。仮に$n_1'>0$とすれば

$$Z_{L^*}(s_1)/Z^0_{L^*}(s_1)=Z_{G_1^*}(s_1)/Z_{G_1^*}^0(s_1)\quad(=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

従って lemma 7より、$Z_{L^*}(s)/Z^0_{L^*}(s)=Z_{G^*}(s)/Z^0_{G^*}(s)$ $(=\{1\}$ or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ であり、Theorem 5より、群の中心が連結の場合に帰着され問題がない。従って$n_1'=0$としてよい。この時、$Z_{L_1^*}(s_1)/Z^0_{L_1^*}(s_1)=\{1\}$, $Z_{G_1^*}(s_1)/Z^0_{G_1^*}(s_1)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$であり、従って、

$$Z_{L^*}(s)/Z^0_{L^*}(s)=\{1\}\quad,\quad Z_{G^*}(s)/Z^0_{G^*}(s)=\{1\}\text{ or }\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

そこで、$Z_{G^*}(s)/Z^0_{G^*}(s)=\{1\}$とすると、やはり群の中心が連結である場合に帰着される。従って、問題となるのは次の場合である。

$$n_1'=0,\ Z_{L^*}(s)/Z^0_{L^*}(s)=\{1\},\quad Z_{G^*}(s)/Z^0_{G^*}(s)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

この時　$\tilde{\rho}|L^F$ は既約である。そこで

$$\rho=\tilde{\rho}|L^F$$

と置き、$\mathrm{End}_{G^F}(\mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F}\rho)$を考察しよう。$(L^*,s)$を$G^{*F}$共役でおきかえて、$s_1$が次の形をしているとしてよい。

$$s_1=(a,s_1')\ \in L_1^*=A\times SO_{2n'+1}$$

$$a=(\underbrace{-1,\cdots,-1}_{n_1},\ \underbrace{1\cdots,1}_{n_2-n_2'}\ )\quad,\ s_1'=\text{identity}$$

ルート系の正系を定める為 $\tilde{G}$ の F－固定な Borel 部分群 $\tilde{B}$ $(\subset \tilde{P})$ ないその F－固定な極大トーラス $\tilde{T}$ $(\subset \tilde{L})$ をえらぶ。$T = \tilde{T} \cap G$ とし，T^* をその L^* における双対トーラスとする。そして

$$T_1^* = \pi_1^{-1}(\pi(T^*))$$

と置く。$T_1^* \ni s_1$ であるから，$T^* \ni s$ である。W を T^* に関しての G^* の Weyl 群とし，T_1^* に関しての G_1^* の Weyl 群と同一視する。従って W は $\{1, \cdots, n, -n, \cdots, -1\}$ の符号付き置換群 W_n (cf. Lusztig [ ]) と同一視される。W の simple reflection は $\{(1,2), \cdots, (n-1, n), s_n\}$ となる。但し (i, j) は互換，s_n は n 番目の符号変換である。W_s, $W_{\tilde{s}}$ を $\underline{1}^{\circ}$ と同じ様に定め，

$$W_{\pi(s)} = \{w \in W \ ; \ w\pi(s)w^{-1} = \pi(s) \ \text{in} \ \pi(T^*)\}$$

とする。すると，

$$W_{\tilde{s}} \subset W_s \subset W_{\pi(s)}$$

である。$W_{\tilde{s}}$ が $Z_{G^*}(s)$ の Weyl 群であることから，又 $Z_{G_1^*}(s_1)$ の Weyl 群と思え，このことから

$$W_{\tilde{s}} = \tilde{W}_{n_1} \times W_{n_2} \hookrightarrow W = W_n$$

がわかる。一方

$$W_{\pi(s)} = W_{n_1} \times W_{n_2} \hookrightarrow W = W_n$$

であることが，s_1 の具体的形からわかる ($\pi(s) = \pi_1(s_1)$ に注意)。

今、$Z_{G^*}(s)/Z_{G^*}^{\circ}(s)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるから、$W_{\tilde{s}}$ は W_s の指数2の部分群であり、$|W_{\pi(s)}/W_{\tilde{s}}|=2$ に注意すれば、

$$W_s = W_{\pi(s)}$$

を得る。従って、

$$W_s = W_{n_1}\times W_{n_2}$$

である。さて

$$\underline{W}=\{w\in N_{\tilde{G}}(\tilde{L})^F/\tilde{L}^F\ ;\ \tilde{\rho}\cong\tilde{\rho}\cdot \mathrm{ad}\, w\}$$

$$\underline{W}'=\{w\in N_G(L)^F/L^F\ ;\ \rho\cong\rho\cdot \mathrm{ad}\, w\}$$

とする。$\tilde{\rho}$ 及び ρ が $\mathcal{E}(\tilde{L}^F,\{\tilde{s}\})$ 及び $\mathcal{E}(L^F,\{s\})$ の唯一の cuspidal 表現であることから

$$\underline{W}=\{w\in W_{\tilde{s}}\ ;\ w\Phi_L^+=\Phi_L^+\},\quad \underline{W}'=\{w\in W_s\ ;\ w\Phi_L^+=\Phi_L^+\}$$

と書ける。但し Φ_L^+ は L のルート系の正系である。群 G_1^* で考えれば、

$$\underline{W}=\tilde{W}_{n_1}\times W_{n_2'}\hookrightarrow \underline{W}'=W_{n_1}\times W_{n_2}$$

であることがわかる。一般に $\underline{W}$ には（$Z(\tilde{G})$ が連結であることから）自然に Coxeter群としての構造が入るが、上の場合、$\underline{W}'$ は $\underline{W}$ の鏡映部分群であることがわかり、たまたまCoxeter 群としての構造が入る。その simple reflection は

$$\{(i,i+1)\ ;\ 1\le i\le n_1-1 \text{ or } n_1+1\le i\le n_1+n_2'-1\}$$

$$\cup\{s_{n_1},\ s_{n_1+n_2'}\}$$

である（但し s_k は k 番目の符号変換とする）。

$l_{\underline{W}'}$ を $\underline{W}'$ の length function とする。

<u>Theorem 8.</u> (G : type C_n, s : isolated, $Z_{L^*}(s)/Z^{\circ}_{L^*}(s)=\{1\}$, $Z_{G^*}(s)/Z^{\circ}_{G^*}(s)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 仮定は上記のものとする。$K'$を$\underline{W}'$の$N_G(L)^F$における逆像とする。その時 cuspidal 表現ρはK'の既約表現μに拡張される。表現空間をVとする。$w\in\underline{W}'$に対して、$a_w\in \mathrm{End}_{G^F}(\mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F}\rho)$を次の様に定める。

$$a_w v = \sum_{u\in U_w^F} u\dot{w}^{-1}\mu(\dot{w})\, v \qquad v\in V$$

その時．$\mathrm{End}_{G^F}(\mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F}\rho)$は$\{a_w ; w\in\underline{W}'\}$を$\mathbb{C}$-基底にもち．次の関係式で記述される。

(i) $w_1, w_2\in\underline{W}'$, $l_{\underline{W}'}(w_1 w_2)=l_{\underline{W}'}(w_1)+l_{\underline{W}'}(w_2)$

$\Longrightarrow a_{w_1 w_2}=a_{w_1}a_{w_2}$

(ii) $s\in\underline{W}'$が simple reflection の時．

(iia) $s=(i, i+1)$の時．　$a_s^2 = q\pm(q-1)a_s$

(iib) $s=s_{n_1}$の時　　$(a_s/q^{n_2-n_3})^2 = q^{2n_3}$

（但し $2n_3$は$s_{n_1+n_2}$のWにおける長さ）

(iic) $s=s_{n_1+n_2}$の時　$(a_s/q^{t^2}) = q^{2t+1}\pm(q^{2t+1}-1)(a_s/q^{t^2})$

（但し $t\geqq 0\in\mathbb{Z}$は$n_2=t(t+1)$をみたす。）

<u>証明</u> ρがK'に拡張できるか否か，どうかは，最初の時点

では、わからない為、 $\mu: K' \to \mathrm{End}\, V$ を

$$\left.\begin{array}{l}\mu(a)\rho(x)\mu(a)^{-1} = \rho(axa^{-1}) \\ \mu(ax) = \mu(a)\rho(x)\end{array}\right\} a \in K', \ x \in L^F$$

を満たす様にえらび、a_w を定理の中における様に定義する。すると

$$\mathrm{End}_{G^F}(\mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F}\rho) \supseteq \mathrm{End}_{\tilde{G}^F}(\mathrm{Ind}_{\tilde{P}^F}^{\tilde{G}^F}\tilde{\rho})$$

によって (iia), (iic) は O.K であり、又類似のギロンより (iib) も O.K である ことがわかる (Howlett-Lehrer 参照のこと)。問題は (i) で w_1, w_2 が両方とも $\underline{W}$ の元でない時である。σ_1, σ_2 を $\underline{W}'$ の simple reflection とし、$\sigma_1 \neq \sigma_2$ とする。r を $\sigma_1\sigma_2$ の位数とする。その時

(**) $$\underbrace{\sigma_1\sigma_2\sigma_1\cdots}_{r\text{個}} = \underbrace{\sigma_2\sigma_1\sigma_2\cdots}_{r\text{個}}$$

であり、

$$\underbrace{a_{\sigma_1}a_{\sigma_2}a_{\sigma_1}\cdots}_{r\text{個}} = \eta\underbrace{a_{\sigma_2}a_{\sigma_1}a_{\sigma_2}\cdots}_{r\text{個}}$$

が成立する。η は μ を適当にえらべば ± 1 であり、示さねばならないのは $\eta = 1$ である。仮に $\eta = -1$ とする。$r = 3$ のときは a_{σ_1} のかわりに $-a_{\sigma_1}$ をえらべば (〜 μ を取り換えれば) $\eta = 1$ となる。$r = 4$ とする。$\sigma_1 \neq \rho_{m_1}$ と思ってよい。その時

$$a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} = -a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1}$$

よって.

$$(a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}) a_{\sigma_1} = a_{\sigma_1} (a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1})$$
$$= a_{\sigma_1} (-a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2})$$

従って

$$(a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}) a_{\sigma_1} (a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} a_{\sigma_1} a_{\sigma_2})^{-1} = -a_{\sigma_1}$$

これにより. a_{σ_1} と $-a_{\sigma_1}$ の最小多項式が等しくなければならないが, $\sigma_1 \neq \rho_{n_1}$ であるから (iia) or (iic) に矛盾する。よって $r=1$。同様の議論が $r=2$ の場合にも適用される.

Q.E.D.

References

[1] T. Asai ; On the twisting operators on the finite classical groups, in Algebraic and topological theories, Kinokuniya, Tokyo, 1986, 239–282

[2] T. Asai ; Twisting operators on the space of class functions of finite special linear groups, preprint.

[3] C.T. Benson – C.W. Curtis ; On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups, Trans. Amer. Math Soc 165 (1972), 251–273 & 202 (1975),

405–406.

[4] N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, Ch 4. 5 et 6, Paris, Herman 1968.

[5] P. Deligne – G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math (2) 103 (1976), 103–161

[6] R.B. Howlette – G.I. Lehrer, Induced cuspidal representations and generalized Hecke algebra, Inv. Math 58 (1980), 37–64

[7]. G. Lusztig, Irreducible representations of finite classical groups, Inv. Math 43 (1977), 125–175

[8]. ———, Characters of reductive groups over a finite field, Ann. Math. Study 107, Princeton 1984.

[9] ———, Characters of reductive groups over finite fields, Proceedings of ICM, 877–879, 1983 Warszawa

[10] T.A. Springer – R. Steinberg, Conjugacy classes, in Springer Lecture Note 131.