数理解析研究所講究録
第 630 巻 1987 年 105-116

Weighted Dynkin diagrams and nilpotent orbits of a graded semisimple Lie algebra

阪大・理 川中宣明 (Noriaki Kawanaka)

§1. 問題. Gを, 代数的閉体K上の連結な半単純代数群とし, $\mathfrak{g}$をその Lie 環, Lie G, とする. K上の対角化可能群DがGに代数群の自己同型として作用している, とする. $X(D)$をDの指標加群 $\mathrm{Hom}_{alg}(D, K^\times)$とすると, $\mathfrak{g}$の$X(D)$-gradation

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in X(D)} \mathfrak{g}(\lambda) \quad , \quad \mathfrak{g}(\lambda) = \{X \in \mathfrak{g} ;\ d \cdot X = \lambda(d) X, \forall d \in D\}$$

が得られる. (一般に, 加群Mに関するLie環$\mathfrak{g}$のM-gradationとは, $\mathfrak{g}$の linear subspaces への直和分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m \in M} \mathfrak{g}(m)$$

で, 条件

$$[\mathfrak{g}(l), \mathfrak{g}(m)] \subset \mathfrak{g}(l+m) \quad , \quad l, m \in M$$

を, 満たすもののことである.) $G(0)$を部分Lie環$\mathfrak{g}(0)$に対応する連結な reductive 部分群($\subset G$)とすると, $G(0)$は$\mathfrak{g}(\lambda)$に adjoint-action により作用する. この状況のも

とで，$G(0)$-軌道 $G(0)\cdot A$，固定化群 $Z_{G(0)}(A)$，$A\in\mathfrak{g}(\lambda)$，の記述を与えることを，問題にする．D-作用が自明な場合と同様に，$A\in\mathfrak{g}(\lambda)$ の Jordan 分解を考えることにより，問題を，Aが半単純な場合と巾零な場合の２つに分けて考えることができる．半単純軌道については，Vinberg の研究[1]がある．Vinberg [2]，[3] は，巾零な場合も扱っている．ここでは，少し違った方法で巾零軌道を，調べてみたい．基本的な方針は，D-作用が自明な場合への帰着である．その場合には，Dynkin，Kostant，Springer，Steinberg，Elashvili，Alekseevsky，Mizuno … 等の詳しい研究のお蔭で，巾零元の軌道や固定化群について，非常に多くの情報が手に入る．それらの情報が，そっくりそのまま利用できて，一般の D-作用の場合の $(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$ についても，巾零元の軌道や固定化群について，D-作用が自明な場合と同程度に詳しいことが，わかる，というのが，我々の結論である．

この問題に興味を持つ理由，他分野との関連などについて述べる．まず，次の一般的な結果がある．

定理（Richardson [4]）　$(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$ の巾零軌道は，有限個である．

特に D が トーラス（$\cong (K^\times)^n$）のときは，$\mathfrak{g}(\lambda)$，$\lambda\neq 0$，の

任意の元が巾零になる．従って，このとき，$(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$ は，概均質ベクトル空間になる［5］，［6］，［7］．$K=\mathbb{C}$ で D が $\mathfrak{g}$ の実形式の Cartan 対合から生成されるとき，$(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$，$\lambda \neq 0$，の巾零軌道は，実 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の巾零軌道と（「Cayley 変換」を通して）1対1に対応する，という Kostant－関口［8］の結果により，我々の結果は，実半単純 Lie 環の巾零軌道の分類をも与えていることになる．代数的組み合せ論との関係も予想される（［9；P.297］）．筆者自身が，この問題（D が1次元トーラスの場合）に興味を持つに至ったきっかけは，generalized Gelfand-Graev 表現（［10］－［12］）の研究であった．

§2．重みつき Dynkin 図形．　Σ を抽象ルート系，Π をその単純ルート系とし，

$$H(\Sigma, \Pi) = \{ f : \Pi \longrightarrow \mathbb{Z} \},$$

$$H(\Sigma, \Pi)_+ = \{ f \in H(\Sigma, \Pi) ;\ f(\alpha) \geqq 0,\ \alpha \in \Pi \}$$

と置く．$H(\Sigma, \Pi)$ の元を「重みつき Dynkin 図形」と呼ぶ．$h \in H(\Sigma, \Pi)$ に対して，Weyl 群 $W(\Sigma)$ の元 w を適当にとれば $h_+ = h \circ w \in H(\Sigma, \Pi)_+$ とできる．このような h_+ が h により一意的に定まることに注意する．さて，Σ を，複素半単純代数群 G の極大トーラス T に関するルート系とすると，$h \in H(\Sigma, \Pi)$ は，$\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}$-gradation

$$(*)_h : \begin{cases} \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)_h , \\ \mathfrak{g}(i)_h = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in \Sigma,\, h(\alpha)=i} \mathfrak{g}_\alpha & (i \neq 0) \\ \mathrm{Lie}\, T \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Sigma,\, h(\alpha)=0} \mathfrak{g}_\alpha \right) & (i = 0) \end{cases} \end{cases}$$

を与える．（但し，$\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Sigma)$ は $\mathfrak{g}$ のルート部分空間とし，各 $h \in H(\Sigma, \Pi)$ は，線型に拡張することにより $h : \Sigma \to \mathbb{Z}$ と見做す．）逆に，$\mathfrak{g}$ の任意の $\mathbb{Z}$-gradation は，適当な極大トーラスを選ぶことにより $(*)_h$ の形に書けることがわかる．従って，h_+ の定義の所で述べたことにより，

補題． $H(\Sigma, \Pi)_+ \ni h \longmapsto (*)_h \in \{\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}$-gradation の G-共役類$\}$ なる対応は bijection である．

§3. D-作用が自明な場合（Dynkin-Kostant 理論）．やはり，G，$\mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ 上で考えておく． $\mathfrak{g}$ の巾零軌道の研究には，次の Jacobson-Morozov および Dynkin の定理が基本的である．

定理（Jacobson-Morozov）． N を $\mathfrak{g}$ の巾零元とすると Lie 環の準同型 $f_N : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{g}$ で $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto N$ となるものが存在し，$Z_G(N)$-共役を除き一意的である．

このとき $H_N = H = f_N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を N の characteristic という．

定理(Dynkin). $\mathfrak{g}$の2つの巾零元が共役であるための必要十分条件は、それらのcharacteristicsが共役であることである.

Hをある巾零元のcharacteristicとする. 次のようにして$\mathfrak{g}$の$\mathbb{Z}$-gradation (Dynkin-Kostant gradation)が作れる:

$$(*)_H : \begin{cases} \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)_H , \\ \mathfrak{g}(i)_H = \{ X \in \mathfrak{g} ; \ [H, X] = iX \} . \end{cases}$$

このとき, Dynkinの定理は、次のように言い換えられる:
「N, N'を巾零元, H, H'をそれらのcharacteristicとする. NとN'が共役となる必要十分条件は、2つの$\mathbb{Z}$-gradation $(*)_H$と$(*)_{H'}$が共役であること.」

従って§1の補題により, $\mathfrak{g}$の巾零軌道の全体とbijectiveに対応するような$H(\Sigma, \Pi)_{nil}$ $(\subset H(\Sigma, \Pi)_+)$が存在する. $H(\Sigma, \Pi)_{nil}$は、すべて具体的に決定されている([13; 13.1]).

定理. K, Gを§1の通りとし, $p = \mathrm{char}(K)$は、Gに関し"good" [14; I, 4.3]である, とする. TをGの極大トーラスとし, ΣをGのTに関するルート系とする. $h \in H(\Sigma, \Pi)_{nil}$に対し, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$の$\mathbb{Z}$-gradation $(*)_h$を考える.

$G(0)_h$ を $\mathfrak{g}(0)_h$ に対応する連結 reductive 部分群（$\subset G$）とする．

(i)　$(G(0)_h, \mathfrak{g}(2)_h)$ は open, dense な軌道 $\mathcal{O}_h$ を持つ．$N_h \in \mathcal{O}_h$ とする．

(ii)　$h \longrightarrow G\cdot N_h = G\cdot \mathcal{O}_h$ は．$H(\Sigma, \Pi)_{nil}$ から $\mathfrak{g}$ の巾零軌道全体への bijection．

(iii)　U_h を $\bigoplus_{i\geq 1} \mathfrak{g}(i)_h$ に対応する巾単部分群とすると，

$$Z_G(N_h) = Z_{G(0)_h}(N_h)\, Z_{U_h}(N_h) \quad (\text{semi-direct product})$$

かつ，$Z_{U_h}(N_h)$, $Z_{G(0)_h}(N_h)$ は．それぞれ左辺の巾単根基，reductive 部分群である．特に $Z_G(N_h) \subset G(0)_h U_h$．

注意 1．　$p=0$ のとき，この定理は Dynkin と Kostant による．$p>0$ で，G が classical groups のときは，Springer と Steinberg [14]，G が E_6, E_7, E_8 型のときは，水野 [15] が調べた．

注意 2．　$Z_{G(0)_h}(N_h)$ の具体的構造は．分かっている．（Alekseevsky [16]，水野 [15]，Springer－Steinberg [14]）

注意 3．　$\mathcal{O}_h$ の代表元 N_h のとり方は．具体的に分かっている．

注意 4．　p が good という条件は．落とせない．

§4. 一般の D-作用の場合． G, $\mathfrak{g}$, D は，最初，$\mathbb{C}$上で考え，§3と平行して話を進める．

定理（Jacobson-Morozov の定理の一般化）． $\lambda \in X(D)$ とし，N を $\mathfrak{g}(\lambda)$ の巾零元とする．このとき，Lie 環の準同型：$f_N : sl_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{g}$ で， $f_N\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N$， $f_N\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(0)$， $f_N\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$ となるものが存在し $Z_{G(0)}(N)$-共役を除き一意的である．

このとき $H_N = H = f_N\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を，N の normalized characteristic と呼ぶ．

定理（Dynkin の定理の一般化）． $\mathfrak{g}(\lambda)$ の２つの巾零元が $G(0)$-共役であるための必要十分条件は，それらの normalized characteristics が $G(0)$-共役であることである．

従って， $\mathfrak{g}(\lambda)$ の巾零軌道の全体から，$\mathfrak{g}$ の $\mathbb{Z}$-gradations の $G(0)$-共役類全体の中への injection が存在する．この像を，記述することを考える． G は，D-stable な極大トーラス T を持つこと，$T \cap G(0)$ は，$G(0)$ の極大トーラスとなることが，知られている．従って，Σ を T に関する G のルート系，$W(G(0))$ を，$G(0) \cap T$ に関する $G(0)$ の Weyl 群とすると，

$$\{\mathfrak{g} \text{ の } \mathbb{Z}\text{-gradation}\} \Big/ \underset{G(0)}{\sim} \quad \underset{1対1}{\longleftrightarrow} \quad H(\Sigma, \Pi) \Big/ \underset{W(G(0))}{\sim} .$$

ここまでを，まとめると次のようになる．$\mathfrak{g}(\lambda)$の巾零元Nの normalized characteristic Hを，使って$\mathfrak{g}$の$\mathbb{Z}$-gradation $(*)_H$を，作る．$h \in H(\Sigma, \Pi)$を，$(*)_H = (*)_h$となるように，とると，hは modulo $(h \to h \circ w,\ w \in W(G(0)))$を除いて，一意的に決まる，という訳である．後は，このようにして得られるhを特徴づければよい．まず，Hが巾零元の characteristic であることから

(i) $h = k \circ w$，$k \in H(\Sigma, \Pi)_{nil}$，$w \in W(\Sigma)/W(G(0))$.

また，Hが normalized, i.e. $H \in \mathfrak{g}(0)$，であることから

(ii) hはD-invariant.

である．(DがΣに作用すること，従って$H(\Sigma, \Pi)$に作用することに注意する．Dがトーラスのとき，この作用は，自明なものになってしまう．) さて (ii) を満たす$h \in H(\Sigma, \Pi)$に対しては，

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\substack{\mu \in X(D) \\ i \in \mathbb{Z}}} \left(\mathfrak{g}(\mu) \cap \mathfrak{g}(i)_h\right)$$

となり，これは$\mathfrak{g}$の$(X(D) \oplus \mathbb{Z})$-gradation を与える．この「対角線部分」を，抜き出して，

$$(*)_{\lambda,h} \quad \bar{\mathfrak{g}}_{\lambda,h} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{g}}_{\lambda,h}(i),\quad \bar{\mathfrak{g}}_{\lambda,h}(i) = \begin{cases} \mathfrak{g}((i/2)\lambda) \cap \mathfrak{g}(i)_h, & i/2 \in \mathbb{Z} \\ \{0\}, & \text{その他} \end{cases}$$

と置くと，明きらかに，$\bar{\mathfrak{g}}_{\lambda,h}$は reductive な部分環で，

$\{\mathfrak{g}_{\lambda,h}(i)\ ;\ i\in\mathbb{Z}\}$ は、その $\mathbb{Z}$-gradation を与える。もし、$(*)_H = (*)_h$ となるなら、h は次の条件を満たさなければならない。

(iii) $(*)_{\lambda,h}$ は、$\bar{\mathfrak{g}}_{\lambda,h}$ の Dynkin-Kostant gradation.

(iv) S_h を、T の 1 次元部分トーラスで、その作用により得られる $\mathfrak{g}$ の gradation が $(*)_h$ と一致するようなものとする。また $\bar{G}_{\lambda,h}$ を $\bar{\mathfrak{g}}_{\lambda,h}$ に対応する連結 reductive 部分群 $(\subset G)$ とする。S_h は $\bar{G}_{\lambda,h}$ の半単純部分 $[\bar{G}_{\lambda,h}, \bar{G}_{\lambda,h}]$ に含まれる。

実は、条件 (i)–(iv) が、我々の求める条件であることがわかる。即ち

$$H(\Sigma, \Pi, \lambda)_{nil} = \{\, h\in H(\Sigma,\Pi)\ ;\ (i)\sim(iv)\,\}$$

と置けば、$(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$ の巾零軌道全体と $H(\Sigma,\Pi,\lambda)_{nil}$ が 1 対 1 に対応することがわかる。$H(\Sigma,\Pi,\lambda)_{nil}$ は、p が good であれば、意味を持つことに注意する。

定理. K, G, D を、§1 の通りとし、$p = char(K)$ は、G に関し good であるとする。T を G の D-stable な極大トーラスとし、Σ を G の T に関するルート系とする。$\lambda\in X(D)$, $h\in H(\Sigma,\Pi,\lambda)_{nil}$ とする。条件 (iii) より $\bar{\mathfrak{g}}_{\lambda,h}(2)$ の $\bar{G}_{\lambda,h}(0)$-軌道 $\mathcal{O}_{\lambda,h}$ で open, dense なものが

存在する．$N_{\lambda,h} \in \mathcal{O}_{\lambda,h}$ とする．

(i) $h \longmapsto G(0)\cdot N_{\lambda,h}$ は $H(\Sigma,\Pi,\lambda)_{nil}$ から，$(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$ の巾零軌道全体への bijection である．

(ii) $Z_{G(0)}(N_{\lambda,h}) = Z_{\overline{G}(0)_{\lambda,h}}(N_{\lambda,h}) \cdot Z_{G(0)\cap U_h}(N_{\lambda,h})$ (semi-direct product),

で，$Z_{G(0)\cap U_h}(N_{\lambda,h})$，$Z_{\overline{G}(0)_{\lambda,h}}(N_{\lambda,h})$ は，それぞれ，左辺の巾単根基，および reductive 部分群である．

注意1．D-作用が自明な場合（§3）の注意2から $Z_{\overline{G}(0)_{h,\lambda}}(N_{h,\lambda})$ の構造がわかる．また，$\dim Z_{G(0)}(N_{h,\lambda}) = \sum_{j\geq 0} \dim \mathfrak{g}(0)\cap\mathfrak{g}(j)_h - \sum_{j\geq 2} \dim \mathfrak{g}(\lambda)\cap\mathfrak{g}(j)_h$ である．

注意2．やはり，§3の注意3から，代表 $N_{\lambda,h}\in\mathcal{O}_{\lambda,h}$ は具体的に選ぶことができる．

注意3．上の定理は，$(G(0), \mathfrak{g}(\lambda))$ の巾零軌道の決定と巾零元 N の固定化群 $Z_{G(0)}(N)$（の reductive 部分，と次元）の決定についての，十分に実行可能なアルゴリズムを与えている．

さらに詳しいことについては文献表の [17] を見て頂ければ幸いです．

文献

[1] Vinberg, E. B., The Weyl group of a graded Lie algebra, Math. USSR-Izv. 10 (1976), 463-495

[2] ———, On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras, Soviet Math. Dokl. 16 (1975), 1517-1520.

[3] ———, Classification of homogeneous nilpotent elements of semisimple graded Lie algebras, (ロシア語), Trudy Seminar vector & tensor analysis 19 (1979), 155-177.
(英訳も Selecta Math. Sovietica から近く出るらしい。)

[4] Richardson, R.W., Finiteness theorems for orbits of algebraic groups, Indag. Math. 88 (1985), 337-344.

[5] Sato, M. and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. 100 (1974), 131-170.

[6] Sato, M. and T. Kimura, A classification of irred. prehomogeneous vector spaces…, Nagoya Math. J. 65 (1977), 1-155.

[7] Kimura, T., S. Kasai, and O. Yasukura, A classification of the repr. of red. alg. gps…, Amer. J. Math. 108 (1986), 643-692.

[8] Sekiguchi, J., Remarks on nilpotent orbits of a symmetric pair, J. Math. Soc. Japan 39 (1987), 127-138.

[9] Bannai, E., and T. Ito, Current research on algebraic combinatorics, Graphs and combinatorics 2 (1986), 287–308.

[10] Kawanaka, N., Generalized Gelfand-Graev repr. and Ennola duality, Alg. Groups and Related Topics, Kinokuniya, 1985, pp.

[11] ——, Generalized Gelfand-Graev repr. of exceptional simple alg. gps -I, Invent. Math. 84 (1986), 575–616.

[12] ——, Shintani lifting and Gelfand-Graev repr., to appear in Proc. Symp. Pure Math.

[13] Carter, R., Finite Groups of Lie Type: Conjugacy classes and complex characters, Wiley-Interscience, 1985.

[14] Springer, T. and R. Steinberg, Conjugacy classes, Part E in Springer L.N.M. vol. 131, 1970.

[15] Mizuno, K., The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7, E_8, Tokyo J. Math. 3 (1980), 391–459.

[16] Alekseevsky, A.V., Component groups of centralizer for unipotent elem. ··· (ロシア語), Trudy Tbiliss. Math. Inst. 62 (1979), 5–27.

[17] Kawanaka, N., Orbits and stabilizers of nilpotent elements of a graded semisimple Lie algebra, preprint.