数理解析研究所講究録
第630巻 1987年 117-131

有限代数群のShintani descent

東京理科大　庄司俊明
(Toshiaki Shoji)

0. 序．　Gを有限体$\mathbb{F}_q$上定義された(affine)連結代数群，$F: G \to G$を対応するFrobenius mapとする。任意の正整数mに対し，G^{F^m}の表現とG^Fの表現は"Shintani descent"を通じて互いに関連している。特にGがreductiveでcenterが連結な場合には，拡大$\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q$を十分大きく(i.e., m: sufficiently divisible)取る事によりG^{F^m}のF-stableな既約指標は，Shintani descentにより，Lusztigの意味でのG^Fのalmost characterに移される事が分っている。G^Fのalmost characterは，Gの幾何学的性質を反映していると考えられるが，この様なobjectが，Shintani descentの枠組の中で，ある意味で自然にとらえられるわけである。一方で，Shintani descentは，一般の(reductiveとは限らない)連結代数群に対しても意味を持つので，Shintani descentを通じて，Lusztigの理論と，より一般の代数群の表現論の

枠組の中で，とらえ直すという事が考えられる．本稿では．その第一歩（半歩？）として，一般の代数群に対して，almost character の類似物が構成できる事を示す．その性質は．まだ良く分らないが，少くとも，twisting operator の作用に関しては．類似の性質が成りたつ事が分る。

1. <u>Shintani</u> <u>descent</u>. G を $\mathbb{F}_q$ 上定義された（affine）連結代数群とする．G の Shintani descent は次の様に定義される．$F^m: G \to G$ を $\mathbb{F}_{q^m}$ に対応する Frobenius map とし，$G^{F^m}/\sim_F$ を G^{F^m} の F-twisted class（$x \sim_F y$: F-twisted conj $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists z$ s.t. $y = z^{-1}xF(z)$）の集合，$G^F/\sim$ を G^F の共役類の集合とする．Norm map $N_{F^m/F}$ を

$$N_{F^m/F} : G^F/\sim \longrightarrow G^{F^m}/\sim_F \ , \quad x = F^m(a)a^{-1} \longmapsto \hat{x} = a^{-1}F(a)$$

（但し，$x \in G^F$, $\hat{x} \in G^{F^m}$, $a \in G$）

により定義する．$N_{F^m/F}$ は．$G^F/\sim$ から $G^{F^m}/\sim_F$ への bijection になる。ここで，$C(G^{F^m}/\sim_F)$（resp. $C(G^F/\sim)$）を $G^{F^m}/\sim_F$（resp. $G^F/\sim$）上の $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-valued function のなす vector space として．induced map

$$N^*_{F^m/F} : C(G^{F^m}/\sim_F) \longrightarrow C(G^F/\sim)$$

を考える．$N^*_{F^m/F}$ を G^{F^m} から G^F への Shintani descent という。

$\widehat{G^F}$: G^F の既約指標の集合.

$(\widehat{G^{F^m}})^F$: G^{F^m} の F-stable 既約指標の集合.

とする。よく知られている様に $\widehat{G^F}$ は $C(G^F/\sim)$ の基底を構成するが、次の様にして $(\widehat{G^{F^m}})^F$ から $C(G^{F^m}/\sim_F)$ の基底が構成できる。 $\sigma = F|G^{F^m}$ (G^{F^m} への制限) とし、$\tilde{G}^{F^m} = G^{F^m}\cdot\langle\sigma\rangle$ を σ で生成される巡回群と G^{F^m} の半直積とする。 $\rho \in (\widehat{G^{F^m}})^F$ に対し、$\tilde{G}^{F^m}$ への extension $\tilde{\rho}$ を1つ選ぶ。 bijection $G^{F^m}\sigma/\sim \longleftrightarrow G^{F^m}/\sim_F$, $(x\sigma \leftrightarrow x)$ により、$\tilde{\rho}$ の $G^{F^m}\sigma$ への制限 $\tilde{\rho}|G^{F^m}\sigma$ は $C(G^{F^m}\sigma/\sim) \simeq C(G^{F^m}/\sim_F)$ の元とみなす事ができる。この時 $\tilde{\rho}|G^{F^m}\sigma$ は、スカラー倍を除いて $\tilde{\rho}$ の選び方によらずに決まり $\{\tilde{\rho}|G^{F^m}\sigma \,;\, \rho \in (\widehat{G^{F^m}})^F\}$ が $C(G^{F^m}/\sim_F)$ の基底となる。

$m=1$ の場合は、特に重要で、$t_1 = N_{F/F}^{-1}$ とおき、$t_1^* : C(G^F/\sim) \longrightarrow C(G^F/\sim)$ を G^F の twisting operator という。

2. Reductive 群の場合. G が reductive の場合, Shintani descent は Lusztig の理論と密接に関係している。この節では、G を center が連結な connected reductive 群とする。Lusztig [3] により、或る parameter set $X(G,F)$ が存在し、各 $x \in X(G,F)$ に対し G^F の almost character $R_x \in C(G^F/\sim)$ が定まり、$C(G^F/\sim)$ の正規直交基底になる事が知られて

いる。従って $X(G, F)$ は $\hat{G}^F$ と個数は一致するが，直接 $\hat{G}^F$ の parameter set にはなっていない。しかし，G が $\mathbb{F}_q$ 上 split の場合には，$\{\rho \in \hat{G}^F \mid \rho : \text{unipotent}\} \xrightarrow[\text{injection}]{} X(G, F)$ があり，$R_x = R_\rho$ は $\rho = \rho_x$ の"Fourier 変換"として得られる。特に $\rho = \rho_x$ が $(\chi \in W^\wedge)$，$\mathrm{Ind}_{B^F}^{G^F}(1)$ の既約成分の場合には，

$$R_\rho = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \chi(w) R_{T_w}^G(1)$$

となっている。但し，B は G の F-stable Borel subgroup，W は G の Weyl 群，$R_{T_w}^G(1)$ は $w \in W$ に対応する G^F の Deligne-Lusztig virtual character である。

一方，[3] により，各 $x \in X(G, F)$ に対し，1 の巾根 λ_x が対応付けられる。特に G が split で $\rho = \rho_x$ が unipotent character の場合には，λ_x は以下の様に与えられる。各 $w \in W$ に対し，$X_w = \{gB \in G/B \mid g^{-1}F(g) \in BwB\}$ を G/B の locally closed subvariety とし $\mathbb{H}^i(\overline{X}_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ をその Intersection cohomology とする．$\mathbb{H}^i(\overline{X}_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は G^F-module で，各 $\rho \in \hat{G}^F$，unipotent に対し，ρ-isotypic subspace $\mathbb{H}^i(\overline{X}_w, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\rho$ に自然に F が作用する。この時，F の固有値は $\lambda_\rho \cdot q^{i/2}$ となり，1 の巾根 λ_ρ は i，w の取り方によらず，ρ のみで定まる。この λ_ρ が λ_x に他

ならない。一般の場合は、G^F の Jordan 分解を通じて、unipotent character の場合に帰着する。

注意. Almost character の重要性は、次の Lusztig の予想にある。

予想 (Lusztig) $\hat{G}$ を G の character sheaf, $A \in \hat{G}$, $F^*A \simeq A$ に対し、χ_A を A の特性関数として得られる G^F の class function とする。この時、

$$\{ R_x \mid x \in X(G, F) \} = \{ \chi_A \mid A \in \hat{G},\ F^*A \simeq A \}$$
(up to const.)

Character sheaf は、体の拡大によらないので、この予想を通じて、G^F の almost character は、G の幾何学的性質を反映しているとみる事ができる。ところで、Lusztig による almost character の定義は、かなり人工的な感じを受けるが、次の結果が示す様に Shintani descent の観点からは、almost character は、極めて自然に得られる。

定理 1. ([4], [5]). G を center が連結な connected reductive 群とする。この時、sufficiently divisible な m (即ち、m はある $m_0 \gg 0$ の倍数) に対し、自然な parametrization $(\hat{G}^{F^m})^F \longleftrightarrow X(G,F)$ が存在し，次の性質を持つ。$\rho_x \in (\hat{G}^{F^m})^F$ を $x \in X(G,F)$ に対応する既約指標とし，$\tilde{\rho}_x$ を $\tilde{G}^{F^m}$ への extension とする。この時，

$$N^*_{F^m/F}(\mu_{\tilde{\rho}_x} \cdot \tilde{\rho}_x|_{G^{F^m}_{\sigma}}) = R^\vee_x ,$$

但し，$\mu_{\tilde{\rho}_x}$ は，extension $\tilde{\rho}_x$ の取り方に依存する 1 の巾根，$R^\vee_x$ は，x に対応する "modified" almost character $(= R_{\tau(x)}$，τ：$X(G,F)$ のある permutation）である。更に $\mu_{\tilde{\rho}_x}$ は，

$$(*) \qquad (\mu_{\tilde{\rho}_x})^m = \lambda_x^{-1}$$

を満たす。

一方，twisting operator の作用に関しては，浅井により，次の事実が分っている。

<u>定理</u> 2（浅井 [1]，[2]）．G を center が連結な connected reductive 群（p：任意）又は，SL_n（$p > n$）とする。この時，

$$t_1^* R^\vee_x = \lambda_x R^\vee_x \qquad (x \in X(G,F)).$$

但し，G が古典群の場合は x．任意，G が例外群の場合は，$\rho = \rho_x$ は unipotent character とする。

<u>注意</u>. 定理1は例外群の場合，少しambiguityが残っている。又，D型の古典群でderived subgroupがSpin群になる場合，(ホ)は確かめられず，μ_{ρ_x}は単に絶対値1ということしか分らない。定理2は，G^Fがsplit，$\rho=\rho_x$がunipotent characterの場合には，この形だが，一般の場合には，t_1^*の定義を少し変更する必要がある。即ち，F_0，FをGのsplit，non-splitなFrobeniusとして，$t_1: G^F/\sim_{F_0} \xrightarrow{\sim} G^{F_0}/\sim_F$を考える。勿論$t_1^*$はいつでも定義できるが，Lusztigの理論を適用する為には$(t_1')^*$の方が都合が良い。実際，浅井は，$(t_1')^*$（unip. characterでない場合は，Jordan分解に従って考える）を決定した。

3. <u>一般の代数群の場合</u>. この節では，始めの設定に戻って，Gをconnected affine代数群とする。m，kを正の整数とし，F-twisted classes $G^{F^m}/\sim_F$，$G^{F^{mk}}/\sim_F$を考える。これらの間のbijection $M_{F^m/F^{mk}}$を

$$M_{F^m/F^{mk}} = N_{F^{mk}/F} \cdot N_{F^m/F}^{-1} : G^{F^m}/\sim_F \longrightarrow G^{F^{mk}}/\sim_F$$

により定義する。

以下，Gに対し，次の仮定を設ける。

仮定. G の F-stable maximal unipotent subgroup U に対し, exponential map $\exp: \mathrm{Lie}\, U \to U$ が存在し, Campbell-Hausdorff formula を満たす (特に p は十分大きい).

この時, 次の定理が成立する。

定理 3. G を上の様な群とする。この時 sufficiently divisible な m に対し. ($k \geq 1$ は任意)

$$M^*_{F^m/F^{mk}} : C(G^{F^{mk}}/\sim_F) \longrightarrow C(G^{F^m}/\sim_F)$$

は character correspondence を与える。即ち, 任意の $\rho \in (\widehat{G^{F^{mk}}})^F$ に対し, $\tilde{\rho}$ を $\tilde{G}^{F^{mk}}$ $(= G^{F^{mk}} \cdot \langle \sigma' \rangle,\ \sigma' = F|_{G^{F^{mk}}})$ への extension とすると,

$$M^*_{F^m/F^{mk}}(\tilde{\rho}|_{G^{F^{mk}}\sigma'}) = \mu \cdot \tilde{\rho}_0|_{G^{F^m}\sigma}$$

と表わされる。ここに $\rho_0 \in (\widehat{G^{F^m}})^F$ で $\tilde{\rho}_0$ は $\tilde{G}^{F^m} = G^{F^m} \cdot \sigma$ $(\sigma = F|_{G^{F^m}})$ への extension, μ は $\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho}_0$ の extension の取り方に依存する 1 の $|\tilde{G}^{F^{mk}}|$-乗根である. $\rho \to \rho_0$ は bijection $(\widehat{G^{F^{mk}}})^F \xrightarrow{\sim} (\widehat{G^{F^m}})^F$ を与える。

定理 3 により, sufficiently divisible な各 m に対し, $(\widehat{G^{F^m}})^F$

の間に自然な対応のある事が分る。即ち，ある parameter set $X(G,F)$ が存在し，$(\hat{G}^{F^m})^F \longleftrightarrow X(G,F)$ とできる。$x \in X(G,F)$ に対応する G^{F^m} の既約指標を $\rho_x^{(m)}$ と表わす事にしよう。すると各 $x \in X(G,F)$ に対し，ある $R_x \in C(G^F/\sim)$ がスカラー倍を除いて定まり，sufficiently divisible な m に対し

$$N^*_{F^m/F}\left(\mu_{\tilde{\rho}_x^{(m)}} \cdot \tilde{\rho}_x^{(m)}\big|_{G^{F^m}\sigma}\right) = R_x$$

と表わされる。但し，$\tilde{\rho}_x^{(m)}$ は $\rho_x^{(m)}$ の $\tilde{G}^{F^m}$ への extension，$\mu_{\tilde{\rho}_x^{(m)}}$ は，extension に依存する1の $|\tilde{G}^{F^m}|$ 乗根である。そこで，定理1の類似として R_x を G^F の <u>almost</u> <u>character</u> と呼ぶ事にする。$\{R_x \mid x \in X(G,F)\}$ は，$C(G^F/\sim)$ の自然な内積に関して正規直交基底となる。

定理2に対応して次の事実が成りたつ。

<u>定理</u>4. G は定理3と同様とする。各 $x \in X(G,F)$ に対し，1の巾根 λ_x が存在して，

$$t_1^* R_x = \lambda_x R_x$$

と表わされる。

<u>注意</u>. 定理3の証明は，Brauer の一般指標の判定

条件（の σ-version）を使う。但し．その際 algebraic subgr. として連結群だけを考えていては．うまくいかず，不連結群も必要となる。その場合，勿論 $N^{*}_{F^m/F}$ は定義できないが，$M^{*}_{F^m/F^{mk}}$ は．不連結の場合にも，しかるべく定義でき，連結群との間の制限に関して compatible になる。これにより．最終的には，U と $N_G(T)$，T: maximal torus の場合に帰着させる。

定理4の証明には．次の Lemma が基本的である。

<u>Lemma</u>．G を connected affine 代数群とする（定理3の仮定は不要）．この時 sufficiently divisible な m に対し，次の可換図式が成りたつ。

$$
\begin{array}{ccc}
G^{F^m}/\sim_F & \xrightarrow{\ \tau_1\ } & G^{F^m}/\sim_F \\
{\scriptstyle N_{F^m/F}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle N_{F^m/F}} \\
G^F/\sim & \xleftarrow{\ t_1\ } & G^F/\sim
\end{array}
$$

ここに，$\tau_1 : G^{F^m}/\sim_F \longrightarrow G^{F^m}/\sim_F$ は．$G^{F^m}/\sim_F \approx G^{F^m}\sigma/\sim$ のもとに $x\sigma \longmapsto (x\sigma)^{1-m}$ で与えられる写像である。

τ_1 を twisting operator t_1 の G^{F^m} への lift という。

定理3により，定理4は．特殊な m に対して示せば

よく、又、上記 Lemma によって、その時 $\tau_1^*: C(G^{F^m}/\sim_F) \to C(G^{F^m}/\sim_F)$ が各 $\rho_x^{(m)} \in (\widehat{G^{F^m}})^F$ に対し、$\tilde{\rho}_x|G^{F^m}\sigma$ を (up to scalar で) stabilize する事をみればよい。これは実際、m を $(m-1, |G^{F^m}|)=1$ と取る事により τ_1 の定義を使って確かめられる。

4. Applications. 一般の群に対して、R_x、λ_x については何も分っていないが、Reductive 群の場合、定理4はかなり役に立つ。実際、

(a) $G = SL_n$ の場合。$p > n$ ならば、定理4は成立する。この場合、定理1に対応する事は、まだ証明できないが、浅井の結果（定理2）とあわせると、Shintani descent に対しかなりの情報が得られる。（但し、完全に決定するには、まだ不十分である）。

(b) 例外群の例外指標の問題。E_7 型 Weyl 群の degree 512 の2個の既約指標、E_8 型 Weyl 群の degree 4096 の4個の既約指標を例外指標という。G^F の unipotent principal series character ρ_x ($x \in \hat{W}$, 例外型) に関しては、他の場合と異って、完全に決めるのが難しく、定理1、定理2でも ambiguity

が残っている。例えば G を E_7 型とし，χ_1, χ_2 を W の例外指標とすると，定理1，定理2で証明できる事は，$R_{\chi_i} = R_{\rho_{\chi_i}}$ とおいて，

$$N^*_{F^m/F} : \{\tilde{\rho}^{(m)}_{\chi_1}, \tilde{\rho}^{(m)}_{\chi_2}\} \longrightarrow \{R_{\chi_1}, R_{\chi_2}\}$$

$$t_1^* \quad : \{R_{\chi_1}, R_{\chi_2}\} \longrightarrow \{R_{\chi_1}, R_{\chi_2}\}$$

（この場合 $\lambda_{\rho_{\chi_i}} = 1$）

であって，R_{χ_i} を permute する可能性が残っていた。しかし，定理4を apply する事により，この場合にも，$N^*_{F^m/F}$，t_1^* を決定する事ができる（この場合，p は任意でよい）。

(c) non-split G^F に対する twisting operator．2節の注意で述べた様に，G^F が non-split の場合 $t_1^* : C(G^F/\sim) \to C(G^F/\sim)$ は，Lusztig の理論とうまくかみ合わない（Frobenius action が cohomology 上に定義できない）ので，決定する事が難しい。しかし，定理4は，$p \gg 0$ の時，t_1^* も良い性質を持っている事を示しており，実際，ある程度まで決める事ができる。例えば $G = PSO_{2n}$，F : non-split の場合，各 $\chi \in X(G, F)$ に対し $\lambda_\chi = \pm 1$，即ち $t_1^* R_\chi = \pm R_\chi$ となる事が分る。

5. <u>Examples</u>. 最後に、non-trivial な almost character (一般の場合) の例をあげておこう。まず $G = SL_2$, q: odd とする。ξ, ξ' を G^F の degree $\frac{1}{2}(q+1)$ の既約指標、η, η' を degree $\frac{1}{2}(q-1)$ の既約指標、又、$\xi^{(m)}, \xi'^{(m)}, \eta^{(m)}, \eta'^{(m)}$ を $(\hat{G}^{F^m})^F$ の同様の elements (degree $\frac{1}{2}(q^m+1)$, ...) とする。この時 sufficiently divisible な m に対し、$N^*_{F^m/F}$ により、

$$
\begin{aligned}
\xi^{(m)} &\longmapsto \tfrac{1}{2}(\xi + \xi' + \eta + \eta') \\
\xi'^{(m)} &\longmapsto \tfrac{1}{2}(\xi + \xi' - \eta - \eta') \\
\eta^{(m)} &\longmapsto \tfrac{1}{2}(\xi - \xi' + \eta - \eta') \\
\eta'^{(m)} &\longmapsto \tfrac{1}{2}(\xi - \xi' - \eta + \eta')
\end{aligned}
\qquad (\text{up to const.})
$$

となる。

次に、$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \overline{\mathbb{F}}_q^{\times},\ b \in \overline{\mathbb{F}}_q \right\}$: G の Borel subgroup とする。この時、

$$\xi^{(m)}|_{B^{F^m}} = \psi_0^{(m)} + \xi_1^{(m)}$$

$$\xi'^{(m)}|_{B^{F^m}} = \psi_0^{(m)} + \xi_1'^{(m)},$$

で、$\psi_0^{(m)}$ は linear character, $\xi_1^{(m)}, \xi_1'^{(m)} \in (\hat{B}^{F^m})^F$、又 $\eta^{(m)}|_{B^{F^m}} = \eta_1^{(m)}$, $\eta'^{(m)}|_{B^{F^m}} = \eta_1'^{(m)}$ とおくと、$\eta_1^{(m)}, \eta_1'^{(m)} \in (\hat{B}^{F^m})^F$ となる。$\xi_1^{(m)}, \xi_1'^{(m)}, \eta_1^{(m)}, \eta_1'^{(m)}$ は degree $\frac{1}{2}(q^m-1)$ の B^{F^m} の既約指標である。同様に、B^F の degree $\frac{1}{2}(q-1)$ の既約指標 ξ_1, ξ_1', η_1, η_1', linear character ψ_0 が定義できる。この時、$N^*_{F^m/F}$ に

より．
$$\xi_1^{(m)} \longmapsto \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_1' + \eta_1 + \eta_1')$$
$$\xi_1'^{(m)} \longmapsto \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_1' - \eta_1 - \eta_1')$$
$$\eta_1^{(m)} \longmapsto \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_1' + \eta_1 - \eta_1')$$
$$\eta_1'^{(m)} \longmapsto \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_1' - \eta_1' + \eta_1)$$

と．G^Fと同様のpatternで分解する．右辺がB^Fのalmost char. である。

References.

1. T. Asai; The unipotent class functions of exceptional groups over finite fields, Comm. in Alg, 12 (1984), 2729 – 2857.
2. T. Asai; On the twisting operators on the finite classical groups, in Algebraic and Topological theories, Kinokuniya, Tokyo, 1985, 234 – 282.
3. G. Lusztig; Characters of reductive groups over a finite field, Ann. of Math. Studies 107, Princeton Univ. Press 1984.
4. T. Shoji; Some generalization of Asai's result for classical groups, Advanced Studies in pure Math. 6, 1985, Algebraic groups and related topics, 207 – 229,

Kinokuniya and North Holland.

5. T. Shoji; Shintani descent for exceptional groups over a finite field, to appear.