数理解析研究所講究録
第 630 巻 1987 年 132-150



# 基本アーベル群の群環のゼータ関数

北大理　竹ヶ原　裕元
(Yugen Takegahara)

## §1 序文

$\Lambda$を有限次元$\mathbb{Q}$-algebra $A$の中の$\mathbb{Z}$-order または$\mathbb{Z}_p$-order とする。ここで$\mathbb{Z}_p$は$\mathbb{Z}$の素数$p$での局所化を示す。module や lattice はそれぞれ left module, left lattice とする。$L$を有限生成 $A$-module $V$の中の full $\Lambda$-lattice とする。すなわち$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} L = V$ を満たす。このとき Solomon のゼータ関数

$$\zeta_\Lambda(L;s) = \sum_{M \subseteq L} [L:M]^{-s}$$

が定義される。ここで$s$は複素変数, $M$は$L$に含まれる$V$の中の full $\Lambda$-lattices 全体を動く。特に$A$を$\mathbb{Q}$の代数的拡大体, $\Lambda$を$A$の代数的整数の環, $A=V$, $\Lambda=L$ とすると$\zeta_\Lambda(\Lambda;s)$は Dedekind のゼータ関数である。Solomon のゼータ関数の重要な性質として, $\Lambda$を$\mathbb{Z}$-order, $\Lambda_p = \mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}}\Lambda$, $L_p = \mathbb{Z}_p\otimes_{\mathbb{Z}} L$ とすると Euler product formula

$$(1,1) \qquad \zeta_\Lambda(s) = \prod_p \zeta_{\Lambda_p}(L_p;s)$$

が成り立つ(L. Solomon[5])。

ここでは $A$ が群環の場合を問題とする。$G$ を有限群，$A=V=\mathbb{Q}G$，$\Lambda=L=\mathbb{Z}G$ のとき次の問題を考える。以後，簡単のため $\zeta_\Lambda(\Lambda;s)$ を $\zeta_\Lambda(s)$ と書く。

問題　具体的に有限群 $G$ を与えると $\zeta_\Lambda(s)$ はどのような関数か。特にその explicit formula はどうなっているか。

一般の有限群 $G$ についての $\zeta_{\mathbb{Z}G}(s)$ の性質に関しては C.J. Bushnell と I. Reiner による多くの文献がある。また $\zeta_{\mathbb{Z}G}(s)$ の Explicit formula が知られている例として，$p$ を素数とするとき，i) $G$ は位数 $p$ または $p^2$ の巡回群([1], [4], [5])，ii) $G$ は位数 $2p$, $p\neq 2$, の2面体群([2], [3])，iii) $G$ は位数 $3p$, $p\neq 3$, の metacyclic group，等がある。

さて，Solomon のゼータ関数を研究する上で必要な関数として次に定義する部分ゼータ関数がある。$A, \Lambda, V, L$ は前の頁で考えたものとする。$L$ に含まれる $V$ の中の full $\Lambda$-lattice $M$ に対して

$$(1,2)\quad Z_\Lambda(L,M;s)=\sum_{N\subseteq L,\,N\cong M}[L:N]^{-s}$$

とおく。ここで $N$ は $L$ に含まれる $V$ の中の full $\Lambda$-lattices で，$M$ と同型なもの全体を動く。特に $L=\Lambda$ のときは $Z_\Lambda(\Lambda,M;s)$ を $Z_\Lambda(M;s)$ と書く。いま $\{L_1,\cdots,L_n\}$ を $V$ の中の full $\Lambda$-

lattices の同型類の完全代表系とすると,

$$\zeta_\Lambda(L;s)=\sum_{i=1}^{n} Z_\Lambda(L,L_i;s)$$

となる。ここで各$L_i$は$L$に含まれるものから選べることに注意する。また任意の$V$の中のfull $\Lambda$-lattice $L'$について,或る$L$に含まれる$V$の中のfull $\Lambda$-lattice $M$があるので,

$$Z_\Lambda(L,L';s)=Z_\Lambda(L,M;s)$$

と定義しておく。この場合も$L=\Lambda$なら$Z_\Lambda(L';s)$と書く。

この報告では§2で$G$が位数$p^2$の基本アーベル群の場合に$\mathbb{Z}_pG$のfull ideals, すなわち$\mathbb{Z}_pG$に含まれる$\mathbb{Q}G$の中のfull $\mathbb{Z}_pG$-lattices, の同型類の数,さらにそれぞれの同型類の代表$I$について$Z_{\mathbb{Z}_pG}(I;s)$を計算する方法を示す。実際に同型類の数とすべての$Z_{\mathbb{Z}_pG}(I;s)$が完全に得られるのは$p=2$と$p=3$のときで,§3でこの場合の§2の結果の例を示す。§3で得られる結果をまとめると次のようになる。

定理(1,3) $G$を位数$p^2$の基本アーベル群とする。

(1) $p=2$のとき$\mathbb{Z}_2G$のfull idealの同型類の個数は27で,相異なる部分ゼータ関数の個数は9である。また

$$\zeta_{\mathbb{Z}G}(s)=(1-2^{-s}+5\cdot2^{-2s}+3^2\cdot2^{-3s}+5\cdot2^{1-4s}-2^{2-5s}+2^{3-6s})(1-2^{1-s}+2^{1-2s})\{\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\}^4.$$

ここで$\zeta_{\mathbb{Z}}(s)$はRiemannのゼータ関数である。

(2) $p=3$のとき$\mathbb{Z}_3G$のfull idealの同型類の個数は252で

相異なる部分ゼータ関数の個数は36である。また

$$\zeta_{\mathbb{Z}G}(s) = (1 - 2^2\cdot 3^{-s} + 2\cdot 3^{2-2s} - 7\cdot 3^{-3s} + 2^6\cdot 3^{-4s} - 19\cdot 3^{1-5s}$$
$$+ 151\cdot 3^{1-6s} - 23\cdot 3^{2-7s} + 151\cdot 3^{2-8s} - 19\cdot 3^{3-9s} + 2^6\cdot 3^{3-10s}$$
$$- 7\cdot 3^{4-11s} + 2\cdot 3^{7-12s} - 2^2\cdot 3^{6-13s} + 3^{7-14s})\cdot \zeta_{\mathbb{Z}}(s)\cdot \{\zeta_{\mathbb{Z}(\omega)}(s)\}^4。$$

ここで $\omega$ は1の原始3乗根，$\zeta_{\mathbb{Z}(\omega)}(s)$ は $\mathbb{Q}$ の代数的拡大体 $\mathbb{Q}(\omega)$ のDedekindのゼータ関数である。

本論にはいる前にC.J Bushnell, I. Reiner [1] によって得られたゼータ関数の2,3の性質を群環の場合に述べる。$G$ を有限群とし，$L$ を有限生成 $\mathbb{Q}G$-module $V$ の中のfull $\mathbb{Z}G$-lattice，$\Gamma$ を $\mathbb{Z}G$ を含む $\mathbb{Q}G$ のmaximal orderとする。このとき，$|G|$ を割らない素数 $p$ について $\Gamma_p = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma = \mathbb{Z}_p G$，すなわち $\mathbb{Z}_p G$ は $\mathbb{Q}G$ のmaximal orderとなる。したがって，(1,1)より

$$\zeta_{\mathbb{Z}G}(L;s) = \zeta_{\Gamma}(\Gamma L;s) \prod_{p\,|\,|G|} \zeta_{\mathbb{Z}_pG}(L_p;s)/\zeta_{\Gamma_p}(\Gamma_p L_p;s)$$

を得る。ここで $L_p = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L$，$\Gamma L = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} L$，$\Gamma_p L_p = \Gamma_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} L_p$。
$\zeta_{\Gamma}(\Gamma L;s)$ はHeyのformulaによりDedekindのゼータ関数で記述されることが知られていて，しかもそれは $\Gamma$ の取り方に依らずに決まる（C.J. Bushnell, I. Reiner [1]）。したがって $\zeta_{\mathbb{Z}G}(L;s)$ を得るには $|G|$ を割る素数 $p$ について $\zeta_{\mathbb{Z}_pG}(L_p;s)/\zeta_{\Gamma_p}(\Gamma_p L_p;s)$ がわかればよい。ところでこの関数について次のことが成り立つ。

定理(1.4) ([1]) (1.2)で$\Lambda$を$\mathbb{Z}_p$-orderとし，$\Delta$を$\Lambda$を含む$A$のmaximal orderとする。$\Delta L = \Delta \otimes_{\mathbb{Z}_p} L$とおくと，

$$Z_\Lambda(L, M; s) / \zeta_\Delta(\Delta L; s) \in \mathbb{Z}[p^{-s}]。$$

次に，これまでの記号で$V = \mathbb{Q}G$とする。すなわち$L_p$は$\mathbb{Q}G$の中のfull $\mathbb{Z}_pG$-latticeである。いま

$$\tilde{L}_p = \{x \in \mathbb{Q}G : L_p x \subseteq \mathbb{Z}_pG\}^*$$

とおく。ここで$*$は$\sigma \to \sigma^{-1}, \sigma \in G$により定義される$\mathbb{Q}G$から$\mathbb{Q}G$への$\mathbb{Q}$-linear mapを示す。このとき$\tilde{L}_p$は$\mathbb{Q}G$の中のfull $\mathbb{Z}_pG$-latticeとなる。さらに次の関数等式がある。

定理(1.5) ([1])

$$Z_{\mathbb{Z}_pG}(L_p; s) / Z(\tilde{L}_p; 1-s) = [\Gamma_p : \mathbb{Z}_pG]^{1-2s} \zeta_{\Gamma_p}(s) / \zeta_{\Gamma_p}(1-s)$$
$$= \zeta_{\mathbb{Z}_pG}(s) / \zeta_{\mathbb{Z}_pG}(1-s)$$

上の2つの定理はゼータ関数の応用上，非常に重要なものである。§3における例がこれらの結果に矛盾しないことを注意して次の節に進む。

## §2 基本アーベル群の群環のfull ideals

記号　$p$は素数，$H = \langle x : x^p = 1 \rangle$ 位数$p$の巡回群，

$G = \langle x, y : x^p = y^p = 1, xy = yx \rangle$ 位数$p^2$の基本アーベル群，

$R=\mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$のpでの局所化，$\overline{R}=R/pR=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，

$\omega=$ 1の原始p乗根，

$S=R[\omega]=R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\omega]$，$\mathbb{Z}[\omega]$は$\mathbb{Q}(\omega)$の代数的整数の環，

$\pi=1-\omega$　離散付値環Sの素元．

この節ではまず，RGのfull idealを決定する問題をSHの場合に帰着できることを示す（2，6））。その発想は次に述べるI. Reiner [4]の方法にもとずく。

命題(2，1)　$\Gamma$，$\Lambda$をR-orderとする。或る自然数$\ell$があって環と環の全射のtibre product diagram（以後f.p.d.）

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & S \arrow[d, "g_1"] \\ \Lambda \arrow[r, "g_2"'] & S/\pi^{\ell}S \end{tikzcd}$$

があったとする。ここで，この図式がf.p.d.であるとは「任意の$s\in S$，$\lambda\in\Lambda$について$g_1(s)=g_2(\lambda)$ならば或る$\Gamma$の元$\gamma$があって$f_1(\gamma)=s$，$f_2(\gamma)=\lambda$となる」ことをいう。したがって$\Gamma$を$\{(s,\lambda)\in S\times\Lambda : g_1(s)=g_2(\lambda)\}$と同一視する。さらに$f_2(\ker f_1)=\ker g_2=\Lambda\lambda_0=\lambda_0\Lambda$，$\lambda_0$は$\Lambda$の中心の元，を仮定する。このとき$\Gamma$のfull ideals Jは次のものに限る。

$$J=\Gamma(\pi^n,\lambda)+(0,\lambda_0 K)$$

ここで，parameters $n$，$\lambda$，$K$は次の条件を満たす。

1) Kは$\Lambda$のfull ideal，

2) $n$ は $g_1(\pi^n)\in g_2(K)$ となる非負整数,

3) $\lambda$ は $g_2(\lambda)=g_1(\pi^n)$ となる $K$ の元で $\bmod \lambda_0 K$ で unique。

また, 与えられた $K$ と $n$ に対して得られる相異なる ideals $J$ の個数 $N_K$ は $p^{r_2(K)}$ である。ここで $r_2(K)$ は $g_2(K)=\pi^{r_2(K)}S/\pi^g S$ となる非負整数を示す。

実際, $J$ を $\Gamma$ の full ideal とすると, 或る非負整数 $n$ があって $f_1(J)=\pi^n S$ となる。$\lambda$ を $g_2(\lambda)=g_1(\pi^n)$ となる $\Lambda$ の元とし, $K_0=\{\lambda\in\Lambda:(0,\lambda)\in J\}$ とおくと $J=\Gamma(\pi^n,\lambda)+(0,K_0)$ を得る。ところで $\ker g_2=\lambda_0\Lambda$ より或る $\Lambda$ の full ideal $K$ があって, $K_0=\lambda_0 K$ となる。また $f_2(\ker f_1)=\lambda_0\Lambda$ より $(0,\lambda_0\lambda)\in J$, したがって $\lambda_0\lambda\in K_0=\lambda_0 K$ となり $\lambda\in K$ を得る。最後の部分は $N_K$ が自然な写像 $K/\lambda_0 K\longrightarrow K/K\cap\lambda_0\Lambda$ の核の元数であることによる。$\Gamma$ の full ideals の指数について次の事がいえる。

系(2,2) $J$ を $\Gamma$ の full ideal, $K=\{\lambda_0^{-1}\lambda\in\Lambda:(0,\lambda)\in J\}$ とおき $f_1(J)=\pi^n S$ とする。このとき $[\Gamma:J]=p^n[\Lambda:K]$ である。

証明) (1,1) より短完全列

$$0\longrightarrow \lambda_0 K\longrightarrow J\longrightarrow \pi^n S\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow \lambda_0 \Lambda\longrightarrow \Gamma\longrightarrow S\longrightarrow 0$$

があるから $[\Gamma:J]=[S:\pi^n S][\Lambda:K]=p^n[\Lambda:K]$ となる。

(1,1)の応用として RH の full ideals が決定する。すなわち環と環の全射の f.p.d.

$$\begin{tikzcd} RH \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & S \arrow[d, "g_1"] \\ R \arrow[r, "g_2"'] & \bar{R} \end{tikzcd}$$

は(1,1)の仮定を満たす。ここで $f_1(x)=\omega$ $f_2(x)=1$, $g_1, g_2$ は自然な写像である。得られる結果は次のとおり。

系(2.3) ([4]) RH の full ideals は次のものに限る。

$RH(\pi^i, tp^j)$ $\quad i=j=0,\ t=1$ または

$\quad i, j \geq 1,\ t=1, \cdots, p-1.$

$RH(\pi^i, 0)+RH(0, p^j)$ $\quad i, j \geq 1$

ここで $[RH : RH(\pi^i, tp^j)] = p^{i+j}$, $[RH : RH(\pi^i, 0)+R(0, p^j)] = p^{i+j-1}$ に注意すると $\zeta_{RH}(s) = 1-p^{-s}+p^{1-2s}$ を得る。

次に RG の full ideals を考えよう。環と環の全射の f.p.d.

$$(2,4) \qquad \begin{tikzcd} RG \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & RH \arrow[d, "\psi_1"] \\ SH \arrow[r, "\psi_2"'] & \bar{R}H \end{tikzcd}$$

がある。ここで $\varphi_1(X)=X$, $\varphi_2(X)=X$, $\varphi_1(Y)=1$, $\varphi_2(Y)=\omega$, $\psi_1, \psi_2$ は自然な写像である。この図式により RG の full ideals を決定する場合に問題となるのは RH の full ideals が(2,3)よりかなら

ずしも単項でないことである。RG の full ideals で $\varphi_1$ による像が単項 ideals となるものは (2.1) と同様に完全に決まる。そこで RG の full ideal I の $\varphi_1$ による像が $RH(\pi^i, 0) + RH(0, p^j)$ ($i, j$ は或る自然数) であるとしよう。$a_1 = (\pi^i, 0)$, $a_2 = (0, p^j)$ とおくと或る SH の元 $b_1, b_2$ があって $\psi_1(a_i) = \psi_2(b_i)$, $i = 1, 2$, となる。$\ker \psi_2 = \pi SH$ に注意して $J = \pi^{-1}\{b \in SH : (0, b) \in I\}$ とおくと

$$I = RG(a_1, b_1) + RG(a_2, b_2) + (0, \pi J)$$

を得る。いま $A_i = \{c \in RG : \varphi_1(c) a_i = 0\}$, $i = 1, 2$, とおき $B_i = \varphi_2(A_i)$ とすると $B_i b_i \in \pi J$, $i = 1, 2$, となる。特に

$$B_1 = \sum_{n=0}^{p-1} x^n \cdot SH + \pi SH, \quad B_2 = (1 - x) \cdot SH + \pi SH$$

である。そこで次のように定義される SH の full ideals を考える。

<u>定義 (2.5)</u>　J を SH の full ideal とするとき

$$J_1 = \{b \in J : \sum_{n=0}^{p-1} x^n b \in \pi J\}$$

$$J_2 = \{b \in J : (1 - x) b \in \pi J\} .$$

このとき $B_i b_i \in \pi J \iff b_i \in J_i$, $i = 1, 2$, である。

以上のことをまとめると次の主張を得る。

<u>命題 (2.6)</u>　図式 (2.4) のもとで $\{(a, b) \in RH \times SH : \psi_1(a) = \psi_2(b)\}$ と RG を同一視する。このとき RG の full ideals I は次のものに限る。

Type A $\quad I=RG(a,b)+(0,\pi J)$

ここで parameters $a, b, J$ は次の条件を満たす。

1) $J$ は $SH$ の full ideal,

2) $a=(\pi^i, tp^j)$, $i, j, t$ は(2,3)を満たす，で

$\psi_1(a)\in\psi_2(J)$ となるもの，

3) $b$ は $\psi_2(b)=\psi_1(a)$ となる $J$ の元で $\bmod\ \pi J$ で unique。

Type B $\quad I=RG(a_1,b_1)+RG(a_2,b_2)+(0,\pi J)$

ここで paramerers $a_1, a_2, b_1, b_2, J$ は次の条件を満たす。

1) $J$ は $SH$ の full ideal,

2) $a_1=(\pi^i, 0)$, $a_2=(0, p^j)$, $i, j\geq 1$, で $\psi_1(a_i)\in\psi_2(J)$, $i=1,2$,

となるもの,

3) $b_i$ は $\psi_2(b_i)=\psi_1(a_i)$ となる $J_i$ の元 $(i=1,2)$ で $\bmod\ \pi J$ で

unique。

さらに，Type A の full ideals について与えられた $J$ と $a$ に対する相異なる full ideals の個数は $p^{r(J)}$ である。Type B の full ideals について与えられた $J, a_1, a_2$ に対する相異なる full ideals の個数は $p^{r(J_1)}\cdot p^{r(J_2)}/[J:J_1]\cdot[J:J_2]$ である。ここで $r(J)$ は $\psi_2(J)=(1-x)^{r(J)}\bar{R}H$ となる非負整数である（$r(J_1), r(J_2)$ についても同様)。

RG の full ideals の指数は次のようになる。

系(2.7)　$I$ を $RG$ の full ideal とする。$I$ の parameters は (2.6) の条件を満たすものとして，

$$I = RG(a, b) + (0, \pi J), \quad a = (\pi^i, tp^d)$$

ならば　$[RG : I] = \pi^{i+d}[SH : J]$,

$$I = RG(a_1, b_1) + RG(a_2, b_2) + (0, \pi J), \quad a_1 = (\pi^i, 0), \quad a_2 = (0, p^d)$$

ならば　$[RG : I] = \pi^{i+d-1}[SH : J]$ となる。

以上の結果により $RG$ のゼータ関数 $\zeta_{RG}(s)$ は $RH$ と $SH$ の情報だけにより得られ。特にこの場合 $SH$ の full ideal $J$ について $J$ の元の $\mathrm{mod}\, \pi J$ での同値類の代表に関する情報は必要ない。$\zeta_{\mathbb{Z}G}(s)$ については $\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega)^{(p+1)}$ に注意すると $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{(p+1)}$ が $\mathbb{Q}G$ の maximal order と考えられることから，

$$\zeta_{\mathbb{Z}G}(s) = \zeta_{\mathbb{Z}}(s) \cdot \{\zeta_{\mathbb{Z}[\omega]}(s)\}^{p+1} \zeta_{RG}(s) / \zeta_R(s) \cdot \{\zeta_S(s)\}^{p+1}$$

となる。ここで $\zeta_{\mathbb{Z}[\omega]}(s)$, $\zeta_R(s)$, $\zeta_S(s)$ は Dedekind のゼータ関数。

以下，この節では $RG$ の full ideals がいつ同型かを示す。

一般に $A$ を $\mathbb{Q}$-algebra，$\Lambda$ を $R$-order とすると，$A$ の中の full $\Lambda$-lattices $L, M$ が同型であることの必要十分条件は或る $U(A)$ の元 $a$ があって $L = Ma$ となることである。ここで $U(A)$ は $A$ の可逆元全体の集合を示す。まず (2.1) で $\Gamma$ の full ideals がいつ同型かについて次が成り立つ。

命題(2,8)　(2,1)で $\Gamma,\Lambda$ は local ring, $g_2(\mathrm{rad}\Lambda)=g_1(\pi S)$ とする。$J=\Gamma(\pi^n,\lambda)+(0,\lambda_0 K)$, $J'=\Gamma(\pi^m,\lambda')+(0,\lambda_0 K')$ (parameters は(2,1)の条件を満たす) とすると, $J$ と $J'$ が同型であることの必要十分条件は或る $U(Q\Lambda)$ の元 $w$ があって $Kw=K'$, $\lambda w=\lambda' \bmod \lambda_0 K'$ となることである。

実際, $U(Q\Gamma)$ の元 $u$ があって $Ju=J'$ とすると或る $\Gamma$ の元 $u_0$ があって $(\pi^n,\lambda)u\equiv u_0(\pi^m,\lambda') \bmod (0,\lambda_0 K')$ となる。一方 $(\pi^m,\lambda')\in Ju$ より $f_1(u_0)\in U(S)$ となる。これより(2,8)の仮定から $f_2(u_0)\in U(\Lambda)$ となる。したがって $w=f_2(u)f_2(u_0)$ とおくと命題の条件を得る($f_2$ が $Q$ 線型写像に拡張されることに注意)。
次に $RG$ の full ideals $I, I'$ について $I$ と $I'$ が同型ならば $I$ と $I'$ は共に(2,6)の Type A か Type B のどちらかに属する。(2,6)の図式に現われる環はすべて local ring で $\psi_2(\mathrm{rad}\,SH)=\psi_1(\pi S)$ に注意すると, 共に Type A に属するときは(2,8)と同様な結果を得る。共に Type B に属するときも次の命題で示すようなわりと使い易い結果を得る。(2,9)の(2)は $J_2$ の定義(2,5)より得られる。

命題(2,9)　(1),(2)の ideals の parameters は(2,6)の条件を満たすものとする。

(1) $I=RG(a,b)+(0,\pi J)$, $I'=RG(a',b')+(0,\pi J')$ のとき

$$I\cong I' \iff {}^{\exists}u\in U(Q(w)H);\ Ju=J',\ bu\equiv b' \bmod \pi J'$$

(2) $I = RG(a_1, b_1) + RG(a_2, b_2) + (0, \pi J)$, $I' = RG(a_1', b_1') + RG(a_2', b_2') + (0, \pi J')$ のとき
$I \cong I' \iff \exists u \in U(\mathbb{Q}(\omega)H), \exists g \in \{1, \cdots, p-1\}; Ju = J', b_1 u \equiv b_1', b_2 u \equiv g b_2' \mod \pi J'$

さて $\{J^{(1)}, \cdots, J^{(n)}\}$ を SH の full ideals の同型類の完全代表系とする。$\Omega^{(i)} = J^{(i)}/\pi J^{(i)}$, $i=1,\cdots,n$, とおくと $\mathrm{Aut}\,J^{(i)} = \{u \in U(\mathbb{Q}(\omega)H) ; J^{(i)}u = J^{(i)}\}$ は $\Omega^{(i)}$ に作用する。また $\Omega^{(i)}_k = J^{(i)}_k/\pi J^{(i)}_k$, $i=1,\cdots,n$, $k=1,2$, とおくと、$\mathrm{Aut}\,J^{(i)} \times \mathrm{Aut}\,J^{(i)}$ は $\Omega^{(i)}_1 \times \Omega^{(i)}_2$ に作用する。$E(J^{(i)})$ を $\mathrm{Aut}\,J^{(i)} \times \mathrm{Aut}\,J^{(i)}$ の部分群で $(u,u)$, $(1,g)$, $u \in \mathrm{Aut}\,J^{(i)}$, $g \in \{1,\cdots,p-1\}$ で生成されるものとする。このとき (2, 9) より次の定理を得る。

定理(2, 10) $\Omega^{(i)}$ における $\mathrm{Aut}\,J^{(i)}$ の軌道の個数を $O(J^{(i)})$, $\Omega^{(i)}_1 \times \Omega^{(i)}_2$ における $E(J^{(i)})$ の軌道の個数を $\overline{O}(J^{(i)})$ とすると、(2, 6) で Type A に属する full ideals の同型類の個数は $\sum_{i=1}^{n} O(J^{(i)})$, Type B に属する full ideals の同型類の個数は $\sum_{i=1}^{n} \overline{O}(J^{(i)})$ となる。

## §3 p=2 と p=3 の場合

この節では §2 で得られた結果の $p=2$ と $p=3$ の場合における例を示す。詳細は Y. Takegahara [6] を参照されたい。記号は §2 で使ったものを用いる。

まず $p=2$ とする。このとき $SH = RH$ で、SH の同型類の代表は $J^{(1)} = SH$, $J^{(2)} = SH(2,0) + SH(0,2)$ で与えられる。この場合、$J^{(2)} = \mathrm{rad}\,SH$ に注意。$J^{(1)}_1 = J^{(1)}_2 = \mathrm{rad}\,SH = J^{(2)}$, $J^{(2)}_1 = J^{(2)}_2 = J^{(2)}$ であ

り，$\mathrm{Aut}\,J^{(1)} = \mathrm{Aut}\,J^{(2)} = E(J^{(1)}) = E(J^{(2)}) = U(SH) = U(S)\times U(S)$ となる。これより $\mathrm{Aut}\,J^{(1)}$ は $J^{(1)}/2J^{(1)} - \mathrm{rad}\,SH/2J^{(1)}$ に可移に作用し，$\mathrm{rad}\,SH/2J$ に自明に作用する。したがって $O(J^{(1)})=3$, $\bar{O}(J^{(1)})=1$ を得る。また $\mathrm{Aut}\,J^{(2)}$ は $J^{(2)}/2J^{(2)}$ に自明に作用するから $O(J^{(2)})=4$, $\bar{O}(J^{(2)})=16$ となる。

定理(3,1)　$G$ が Klein の4元群のとき $\mathbb{Z}_2G$ の full ideals の同型類の個数は27である。

部分ゼータ関数については相異なる9個の関数が得られる。それらを $\zeta_R(s)^5$ で割ったものを $\Phi_1,\cdots,\Phi_7$, $\hat{\Phi}_6$, $\hat{\Phi}_7$ とおくと，これらは $\Phi_i(t) = 2^4t^8\,\Phi_i(1/2t)$, $i=1,\cdots,5$, $\Phi_i(t)=2^4t^8\,\hat{\Phi}_i(1/2t)$, $i=6,7$, を満たすようにとれる。ここで $t=2^{-s}$ で $\Phi_i$ を $t$ の多項式とみたものを $\Phi_i(t)$ とした。$\Phi_1(t),\cdots,\Phi_7(t)$ は次の多項式である。式の終りの[ ]内の数はその多項式に対応する $RG$ の full ideals の個数である。特に $\Phi_1(t)$ は $RG$ を含む同型類に対応する。

$\Phi_1(t) = 1-2^2t+2\cdot3t^2-2^2\cdot t^3+3t^4-2^3\cdot t^5+2^3\cdot3t^6-2^5t^7+2^4t^8$ [1],

$\Phi_2(t) = t^2-2^2t^3+2^3t^4-2^3t^5+2^2t^6$ [3],

$\Phi_3(t) = t^3-2t^4+2t^5$ [6],　$\Phi_4(t) = 2t^3-5t^4+2^2t^5$ [6],

$\Phi_5(t) = t^4$ [1]

$\Phi_6(t) = t-2^2t^2+2\cdot3t^3-2^2t^4+2t^5$ [4]

$\Phi_7(t) = t^2-3t^3+3t^4$ [4]

次に $p=3$ とする。$\Gamma = S[X]/\langle 1-X^p \rangle$, $\Lambda = S[X]/\langle 1+X+X^2 \rangle$ とおき、$\Gamma$ を $SH$ と同一視する。このとき2つの f.p.d.s

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & S[X]/\langle 1-X \rangle \cong S \arrow[d, "g_1"] \\
\Lambda \arrow[r, "g_2"'] & S/\pi^2 S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r] \arrow[d] & S[X]/\langle \omega-X \rangle \cong S \arrow[d] \\
S \cong S[X]/\langle \omega^2-X \rangle \arrow[r] & \bar{R}
\end{tikzcd}
$$

がある。ここで写像はすべて自然な全射である。上の2つの図式は(2,1)の仮定を満たすから full ideals が次のように決定する。まず $\Lambda$ の full ideals は次のものに限る。

$$\Lambda_{l,m} = \Lambda(\pi^l, \pi^m) \quad l=m=0,\ l,m \geq 1$$

$$\Lambda'_{l,m} = \Lambda(\pi^l, -\pi^m) \quad l,m \geq 1$$

$$\Lambda^*_{l,m} = \Lambda(\pi^l, 0) + \Lambda(0, \pi^m) \quad l,m \geq 1$$

次に $\Gamma$ の full ideals は次のものに限る。ただし parameters $k$, $l$, $m$, $\lambda$ は(2,1)の条件を満たすものとする。$\ker g_2 = \Lambda\lambda_0$ とする。

$$\Gamma_{k,l,m}(\lambda) = \Gamma(\pi^k, \lambda) + (0, \lambda_0 \Lambda_{l,m})$$

$$\Gamma'_{k,l,m}(\lambda) = \Gamma(\pi^k, \lambda) + (0, \lambda_0 \Lambda'_{l,m})$$

$$\Gamma^*_{k,l,m}(\lambda) = \Gamma(\pi^k, \lambda) + (0, \lambda_0 \Lambda^*_{l,m})$$

$\Gamma$ の full ideals $J$ に対して $J_1, J_2$ は次のようになる。

Case 1 $J = \Gamma_{k,l,m}(\lambda)$ とする。

$\lambda \in \Lambda^*_{l+1,m+1} \implies J_1 = J,\ J_2 = \Gamma^*_{k,l+1,m+1}(h(\lambda))$

$\lambda \notin \Lambda^*_{l+1,m+1} \implies J_1 = \Gamma_{k+1,l,m}(\pi\lambda),\ J_2 = \Gamma^*_{k+1,l+1,m+1}(\pi\lambda)$

Case 2 $J = \Gamma'_{k,l,m}(\lambda)$ とする。

$\lambda \in \Lambda^{*}_{e+1,m+1} \Rightarrow J_1 = J,\ J_2 = \Gamma^{*}_{k,e+1,m+1}(h'(\lambda))$

$\lambda \notin \Lambda^{*}_{e+1,m+1} \Rightarrow J_1 = \Gamma'_{k+1,e,m}(\pi\lambda),\ J_2 = \Gamma^{*}_{k+1,e+1,m+1}(\pi\lambda)$

Case 3 $J = \Gamma^{*}_{k,e,m}(\lambda)$ とする。このとき $J_1 = J$ で

$\lambda \in \Lambda^{*}_{e+1,m+1} \Rightarrow J_2 = J,\ \lambda \notin \Lambda^{*}_{e+1,m+1} \Rightarrow J_2 = \Gamma^{*}_{k+1,e,m}(\pi\lambda)$

ここで $\Lambda^{*}_{e,m}$ の元 $\lambda$ について $h(\lambda), h'(\lambda)$ はそれぞれ mod $\Lambda^{*}_{e+1,m+1}$ で $\lambda$ を含む class に属する $\Lambda_{e,m}, \Lambda'_{e,m}$ の元を意味する。

さて (2,7) を用いて $\Gamma$ の full ideals の同型類の個数が 7 であることが示される。その各々の同型類の代表 $J$ と Aut $J$, $O(J)$, $\overline{O}(J)$ を表にしておく。

| $J$ | $\Gamma$ | $\Gamma^{*}_{1,0,0}(\pi,\pi)$ | $\Gamma_{2,0,0}(0)$ | $\Gamma^{*}_{1,1,1}(-\pi,0)$ | $\Gamma^{*}_{1,1,1}(0,-\pi)$ | $\Gamma^{*}_{1,1,1}(\pi,\pi)$ | $\Gamma^{*}_{2,1,1}(0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aut $J$ | $U(\Gamma)$ | $G_1$ | $U(S)\times U(\Lambda)$ | $G_2$ | $G'_2$ | $G_1$ | $U(S)^{(3)}$ |
| $O(J)$ | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 8 |
| $\overline{O}(J)$ | 6 | 20 | 26 | 26 | 26 | 30 | 76 |

ここで $G_1 = \{(v,w) \in U(S)\times U(\Lambda);\ v \equiv w \bmod \mathrm{rad}\,\Lambda\}$, $G_2 = \{(v,w_1,w_2) \in U(S)^{(3)};\ v \equiv w_1 \bmod \pi S\}$, $G'_2 = \{(v,w_1,w_2) \in U(S)^{(3)};\ v \equiv w_2 \bmod \pi S\}$, $U(S) = U(S)\times U(S)\times U(S)$

以上の結果より部分ゼータ関数達が計算されそのうち相異なるものは 36 である。これらを $\zeta_R(s)\{\zeta_S(s)\}^{(4)}$ で割り $t=3^{-s}$ とおいた多項式を $\Phi_1(t),\cdots,\Phi_{23}(t)$, $\widetilde{\Phi}_{11},\cdots,\widetilde{\Phi}_{23}$ とする。これらの多項式は $\Phi_i(t) = 3^7 t^{14}\Phi_i(1/3t)$, $i=1,\cdots,10$, $\Phi_i(t) = 3^7 t^{14}\widetilde{\Phi}_i(1/3t)$, $i=11,\cdots,23$, を満たすように取れる。$\Phi_1(t),\cdots,\Phi_{23}(t)$ は次の多項式である。特に $\Phi_1(t)$ は $RG$ を含む同型類に対応する。[ ] 内の数は前と同じ。

$$\Phi_1(t) = 1 - 5t + 2\cdot5t^2 - 2\cdot5t^3 + 5t^4 - t^5 + 2^4\cdot3^2t^6 - 2^4\cdot3^3t^7 + 2^4\cdot3^3t^8 - 3^2t^9 + 3^3\cdot5t^{10} - 2\cdot3^4\cdot5t^{11} + 2\cdot3^5\cdot5t^{12} - 3^6\cdot5t^{13} + 3^7t^{14},\ [1],$$

$$\Phi_2(t) = t^3 - t^4 - 2\cdot3t^5 + 23t^6 - 2\cdot19t^7 + 3\cdot23t^8 - 2\cdot3^3t^9 - 3^3t^{10} + 3^4t^{11},\ [8],$$

$$\Phi_3(t) = t^3 - 5t^4 + 2^2\cdot3t^5 - 13t^6 + 2\cdot7t^7 - 3\cdot13t^8 + 2^2\cdot3^3t^9 - 3^3\cdot5t^{10} + 3^4t^{11},\ [4],$$

$$\Phi_4(t) = 2t^3 - 2^3t^4 + 2^2\cdot3t^5 - 2^3t^6 + 2^2\cdot5t^7 - 2^3\cdot3t^8 + 2^2\cdot3^3t^9 - 2^3\cdot3^3t^{10} + 2\cdot3^4t^{11},\ [8],$$

$$\Phi_5(t) = t^4 - 3t^5 + 3t^6 + 2t^7 + 3^2t^8 - 3^3t^9 + 3^3t^{10},\ [4],$$

$$\Phi_6(t) = t^5 - 2^2t^6 + 2\cdot5t^7 - 2^2\cdot3t^8 + 3^2t^9,\ [15],$$

$$\Phi_7(t) = t^5 - 2t^7 + 3^2t^9,\ [30],\ \Phi_8(t) = t^6 - 2t^7 + 3t^8,\ [10],$$

$$\Phi_9(t) = 2^3t^6 - 2^3\cdot3t^7 + 2^3\cdot3t^8,\ [5],\ \Phi_{10}(t) = t^7,\ [1],$$

$$\Phi_{11}(t) = t - 5t^2 + 2\cdot5t^3 - 2\cdot5t^4 + 5t^5 - t^6 + 2^4\cdot3^2t^7 - 2^4\cdot3^3t^8 + 2^4\cdot3^3t^9,\ [1],$$

$$\Phi_{12}(t) = t^2 - 2^2t^3 + 2\cdot3t^4 - 2^2t^5 + t^6 + 2^3\cdot3^2t^7 - 2^3\cdot3^3t^8 + 2^3\cdot3^3t^9,\ [1],$$

$$\Phi_{13}(t) = t^2 - 5t^3 + 2\cdot5t^4 - 2\cdot5t^5 + 5t^6 + 11t^7 + 2^2\cdot3^2t^8 - 2^2\cdot3^3t^9 + 2^2\cdot3^3t^{10},\ [4],$$

$$\Phi_{14}(t) = 2t^2 - 2^3t^3 + 2^2\cdot 3t^4 - 2^3t^5 + 2^2\cdot 5t^6 - 2^2\cdot 3^2t^7 + 2^3\cdot 3^3t^8 - 2^2\cdot 3^3\cdot 5t^9 + 2\cdot 3^5t^{10},\ [4],$$

$$\Phi_{15}(t) = t^3 - t^4 - 2\cdot 3t^5 + 2^2\cdot 5t^6 - 5t^7 - 3\cdot 23t^8 + 2^3\cdot 3^3t^9 - 2\cdot 3^3\cdot 5t^{10} + 2\cdot 3^4t^{11},\ [4],$$

$$\Phi_{16}(t) = t^3 - 2^2t^4 + 2\cdot 3t^5 - 2^2t^6 + 7t^7 + 2\cdot 3^2t^8 - 2\cdot 3^3t^9 + 2\cdot 3^3t^{10},\ [8],$$

$$\Phi_{17}(t) = t^3 - 5t^4 + 2\cdot 5t^5 - 2\cdot 5t^6 + 5t^7 + 3\cdot 5t^8,\ [1],$$

$$\Phi_{18}(t) = t^4 - t^5 - 2\cdot 3t^6 + 2\cdot 11t^7 - 3^3t^8 + 3^3t^9,\ [10],$$

$$\Phi_{19}(t) = t^4 - 3t^5 + 2\cdot 5t^6 - 2\cdot 11t^7 + 3\cdot 7t^8 + 3^2t^9,\ [15],$$

$$\Phi_{20}(t) = t^4 - 2^2t^5 + 2\cdot 3t^6 - 2^2t^7 + 3^2t^8,\ [5],$$

$$\Phi_{21}(t) = t^4 - 5t^5 + 2^2\cdot 3t^6 - 2^2\cdot 3t^7 + 3t^8 + 3^2t^9,\ [10],$$

$$\Phi_{22}(t) = t^5 - 3t^6 + 3t^7 + 3t^8,\ [10],$$

$$\Phi_{23}(t) = 2\cdot 3t^5 - 2^2\cdot 5t^6 + 2^3\cdot 3t^7 - 2^2\cdot 3t^8 + 2\cdot 3^2t^9,\ [10].$$

## REFERENCES.

1. C.J.Bushnell and I.Reiner: Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjectures, Math. Z. 173(1980), 135-161.

2. C.W.Curtis and I.Reiner: Methods of representation theory, vol. 1, J.Wiley & Sons, New York, Chichster, Brishbane, Toront, 1981.

3. Y.Hironaka: Zeta functions of integral group rings of metacyclic groups, Tsukuba. J. Math. 5(1981), no.2, 267-283.

4. I.Reiner: Zeta functions of integral representations, Comm. Algebra 8(1980), no.10, 911-925.

5. L.Solomon: Zeta functions and integral representation theory, Advances in Math. 26(1977), no.3, 306-326.

6. Y.Takegahara: Zeta functions of integral group rings of abelian (p,p)-groups, Comm. Algebra, to appear.