数理解析研究所講究録
第630巻 1987年 151-162

群作用を持つ組合せ構造.

北大・理　吉田知行　(Tomoyuki Yoshida)

1. 序.

組合せ論を，有限集合のなすカテゴリー Set_f の理論と見なすなら，有限群 G の作用を考えた組合せ論は，有限 G-集合のカテゴリー Set_f^G の理論と見なせる．群の作用は事態を簡単にすると思われがちだが（実際ある意味ではこれは正しいのだが），群がどの様に作用するかを合わせて考えると，問題は極端に難しくなる．例えば G-集合は，物としては単なる集合だが，G-集合としては各点の stabilizer 達で決まるいっそう複雑な構造を持っている．そもそも G-集合については選択公理が成立していない．すなわち全射が分裂しない．

それでも有限 G-集合のカテゴリーは普通の集合のカテゴリーと良く似ているのは確かである．以下 G は有限群を表すとする．

$$\Phi = (\Phi_H) : Set_f^G \longrightarrow \Pi_{(H)} Set_f \ ; \ X \longmapsto (X^H)$$

なるファンクターがある．ここで和は部分群の共役類を取り，

$$X^H = \{x \in X \mid xh = x, \ h \in H\}.$$

一般に，ふたつの有限 G-集合 X, Y が G-同型であるための必要十分条件は，任意の部分群 H に対し，$|X^H| = |Y^H|$ となることである．したがって上の Φ はカテゴリーの埋め込みである．群 G が trivial な場合を除けば Φ はカテゴリーの同値ではなく，したがって有限 G-集合のカテゴリーは有限集合のカテゴリーの直積の中にねじれて入っていることになる．そのねじれ具合いを計るのが Burnside 環（有限 G-集合のカテゴリーの Grothendieck 環）である．

例えば，G が素数位数 p の群，X が有限 G-集合なら次の条件が成立する．

(i)　$|X^G| \equiv |X| \pmod p$.

(ii)　$|X| \geq |X^G| \geq 0$.

逆にこれらの条件から G-集合 X が特徴づけられる．(i)が代数的な条件であるの

に対し，(ii)の方は組合せ論的ないしは幾何的な条件である．(ii)の条件を扱うのは難しいので，代数的組合せ論の立場では，(ii)よりも(i)のような代数的条件の方を主に考える．一般の有限群についても(i)に相当する結果はある．（しかしそれを言い表すには Burnside 環の知識が必要である．[Yo83a]）

一般に，有限群 G とそれが作用している集合 X があるとき，各部分群 H にはいろいろな集合や加群，環などが対応している．

群	固定点集合	加群	（Hecke）環
G	X^G	$R[X/G]$	R
$\cup$	$\cap$	$\uparrow$	
H	X^H	$R[X/H]$	$R[H\backslash G/H]$
$\cup$	$\cap$	$\uparrow$	
1	X	RX	RG

Burnside ring

こういったものを縦に結び付ける役を果たすのが Burnside 環（さらに指標環など）である．これは組合せ論に限らず，有限群の表現論でも同じである．

さて，群 G の作用を持つ組合せ構造は $Set_f{}^G$ におけるデータ（対象，射，可換図式等）から成り，その組合せ論的な条件は忘却関手 $\Phi_1 : Set_f{}^G \longrightarrow Set_f$ による像の性質として描写される．したがって，どの様な組合せ論的構造が本当に G-集合のカテゴリーから来るのか，と言うことが群作用を持つ組合せ論における本質的な問題なのである．

2．Incidence maps.

これからはもっぱらブロックデザインだけを扱うが，正則グラフやもっと一般の association scheme でも（少なくとも定義は）同様にいくはずである．

まず群の作用をいれない場合のことを思い出そう．以下 (X, B) をブロックデザイン，そのパラメーターを (v, b, r, k, λ)，位数を $n := r - \lambda > 0$ とする．すなわち，Xは v-点集合（X の元を点という），B は X の k-点部分集合の集まり（B の元をブロックという）で，$b = |B|$，さらに相異なる任意の2点を含むブロックの個数は λ，任意の一点を含むブロックの個数は r である．これらのパラメーターが次を満たすことは容易に分かる．

$$vr = bk, \quad r(k-1) = \lambda(v-1).$$

ブロックデザイン（X, B）の結合行列（incidence matrix）$A = (a_{x\beta})$ は $X \times B$ 形の行列で

$$a_{x\beta} = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \in B \end{cases}$$

で定義する.

ブロックデザインの定義から A は次の結合方程式を満たす.

$$AA^t = nI + \lambda J, \quad AJ = rJ, \quad JA = kJ.$$

ここで I は単位行列，J は適当なサイズの全ての要素が 1 の行列である.

結合方程式が有理行列の範囲に解を持つかどうか，を調べることによって次のような結果が得られている.

（１）Fisher（1940）の不等式. $v \leqq b$, $r \geqq k$

この不等式は，$\det(AA^t) = rkn^{v-1} \neq 0$ から自明.

（２）Schutzenberger(1949) の定理. 対称デザインで，vが偶数なら n は平方数である.

$v = b$ となるブロックデザインを対称デザインという. このとき $r = k$ で，結合行列は正方行列である. したがって $\det(AA^t) = (\det A)^2 = k^2 n^{v-1}$ は平方数. よって n も平方数.

（３）Bruck-Ryser-Chowla（1949）の定理. 対称デザインで v が奇数のとき，$nx^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2 = z^2$ は 0 でない有理整数解を持つ.

この定理の証明はやや面倒（二次形式の話に持っていく）だが現在に至るも最強の定理である. 逆が成立するという予想さえある. しかし存在しないと思われている位数 10 の射影平面（v=111, k=11, λ=1）の存在を否定できない.

これらの結果が群の作用が入っているデザインについてどの様な形になるかに興味がある. ここでは一番簡単な Fisher の不等式の場合について論ずる. 一般論は次の論文で述べてある.

T.Yoshida "Fisher's inequality for block designs with finite group with finite group action", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, to appear.

さて今後（X, B）を，ブロックデザインでパラメーターが v, b, r, k, λ, 位数が n（= r—λ）なるもので，有限群 G が作用しているとする. また R を可換環とする. この場合，結合行列はいわゆる G-matrix になる. （つまり（x, β）

-成分と $(xg, \beta g)$-成分が等しい）．行列の代わりに RG-準同型を使うのが（一見）自然であり扱いやすい．そこで結合行列に対応する incidence map α とその transpose α' が次のように定義される．

$$\alpha \ : RB \longrightarrow RX \ ; \ \beta \longmapsto \sum_{x \in \beta} x$$
$$\alpha' : RX \longrightarrow RB \ ; \ x \longmapsto \sum_{x \in \beta} \beta$$

さらに (co-)augmentation map 達が次のように定義される．

$$\varepsilon_X \ : RX \longrightarrow R \ ; \ x \longmapsto 1,$$
$$\varepsilon'_X \ : R \longrightarrow RX \ ; \ 1 \longmapsto \sum_{x \in \beta} x,$$

ε_B や ε'_B も同様である．結合方程式をこれらの写像で表すと以下のようになる．

$$\alpha\alpha' : RX \longrightarrow RX \ ; \ \beta \longmapsto nx + \lambda \sum_{y \in X} y,$$
$$\alpha\varepsilon'_B = r\varepsilon'_B, \quad \varepsilon_B\alpha' = r\varepsilon_B,$$
$$\alpha'\varepsilon'_X = k\varepsilon'_X, \quad \varepsilon_X\alpha = k\varepsilon_X.$$

Fisher の不等式と同じ論法により，次が証明できる．

補題1．（1）もし rn が R の中で可逆なら，$\alpha' : RX \longrightarrow RB$ は split RG-monomorphism で，したがって RG-加群として RX | RB となる．（記号 "RX | RB" は RX が RB の直和因子に同型なことを意味する．）

（2）もし n が R の中で可逆なら，RG-加群として Ker ε_X | Ker ε_B.

（3）デザインが対称 (v = b) なら，（1），（2）の結論は，それぞれ RX と RB，Ker ε_Xと Ker ε_B が RG-加群として同型ということになる．

証明． 実際 $\det(\alpha\alpha') = rkn^{v-1}$．$rn = (r^2 - b\lambda)k$ だからもし rn が可逆ならばこの行列式も可逆となり，結局 $\alpha\alpha'$ は RG-加群の同型となる．次に $\alpha\alpha'$ の Ker ε_X への制限は n・id に等しい．これより（2）を得る．（3）は，(X, B) の代わりに (B, X) を使うと $\alpha'\alpha$ も同型になることによる．

特に rank を比較することによって元の Fisher の不等式が得られることに注意する．また G による固定点を取ると，$(RX)^G$ が R[X/G] に同型なことから，R[X/G] | R[B/G] となり，したがって次の有名な結果を得る．

系2．（Parker，Hughes(1957)など）$|X/G| \leq |B/G|$ で v = b なら等号成立，とくに G が B 上可移なら X 上も可移．

上の良く知られた補題から実に様々な Fisher の不等式の変形が得られる．こ

れを次の節で論じよう.

3. Ext に関する Fisher の不等式.

前と同様に (X, B) は有限群 G の作用するブロックデザインとし，記号 v, b, r, k, λ, n は前と同じとする. R を可換環で, $n^{-1}\in R$ なるもの, N を RG-加群とし,

$$E^m(M) := \mathrm{Ext}^m_{RG}(M, N)$$

と置く. このとき, incidence map や augmentation map は次のような写像を誘導する.

$$E^m(R) \underset{\varepsilon_X'^*}{\overset{\varepsilon_X^*}{\rightleftarrows}} E^m(RX) \underset{\alpha'^*}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} E^m(RB) \underset{\varepsilon_B^*}{\overset{\varepsilon_B'^*}{\rightleftarrows}} E^m(R).$$

またアーベル群 A と整数 m に対し

$${}_mA = \{a\in A \mid ma = 0\},\quad A/(m) := A/mA.$$

定理3. (1) 次の系列は完全.

$$0 \to {}_{rk}E^m(R) \longrightarrow E^m(RX) \longrightarrow E^m(R)/(rk) \to 0$$

(2) 次のどれかが成立すれば, $E^m(RX) \mid E^m(RB)$.

(a) $r\cdot id$ が $E^m(R)$ 上の同型写像.

(b) $r^{-1}\in R$.

(c) $E^m(R) = 0$.

(d) $m > 0$ かつ $(r, |G|) = 1$.

(e) 加群 N は RG の principal block に入らない.

(3) $\mathrm{Ker}\ \varepsilon_X'^* \mid \mathrm{Ker}\ \varepsilon_B'^*,\ \mathrm{Cok}\ \varepsilon_X^* \mid \mathrm{Cok}\ \varepsilon_B^*$.

(4) $v = b$ のときは, 上の "$|$" を RG-同型 "$\cong$" で置き換えることが出来る.

これらは incidence map 達の結合方程式から割と容易に証明できる. (1)の証明は Ext の long exact sequence を使う. (2)の条件 (b),(c),(d) は(a)からしたがう.

さて, 一般に

$$\mathrm{Ext}^m_{RG}(RX, N) = E^m(RX) \cong \bigoplus_{x\in X/G} H^m(G_x, N)$$

であり, 特に G が X 上可移ならば,

$$\mathrm{Ext}^m_{RG}(RX, N) \cong H^m(G_x, N),$$

ここで G_x は1点の stabilizer である．したがって上の定理は，G が X と B 上可移の時は群のコホモロジーを使って表現できる．augmentation map ε : RX → R などから誘導される Ext の写像は群のコホモロジー群の res や cor を使って表せる．これによって次を得る．

定理４．G が X と B に可移に作用しているとする．$x \in X$，$\beta \in B$ を取り $H = G_x$，$K = G_\beta$ と置く．n は R で可逆とする．このとき

（１）　$\mathrm{Ker\ res}^G_H \mid \mathrm{Ker\ res}^G_K$,　$\mathrm{Ker\ res}^G_H \mid \mathrm{Ker\ res}^G_K$.

ここで cor と res は $H^m(G, N)$ と $H^m(H, N)$ などを結ぶものである．

（２）p を素数で $(r, p) = 1$ または $r \cdot id$ が $H^m(G, N)_{(p)}$ 上の同型写像なるものとする．（ここで (p) を付けたのは p-局所整数環とのテンソル積を意味する．$m > 0$ の時は単にp-torsion 元全体の群となる．）このとき

$$H^m(H, N)_{(p)} \mid H^m(K, N)_{(p)}.$$

（３）　$v = b$ の時は直和の代わりに同型が成り立つ．

特に $m=1$ で N が複素数の乗法群のときにこの系を分かりやすく表すと次のような transfer 定理になる．

系５．G が X と B 上可移と仮定し，前のように $H = G_x$，$K = G_\beta$ と置く．p を n を割らない素数とする．

（１）　p が r または $|G/G'|$ を割らないなら，

$$(H/H')_{(p)} \mid (K/K')_{(p)}.$$

（２）　P, Q をそれぞれ H, K の Sylow p-部分群とすれば

$$(P \cap G')/(P \cap H') \mid (Q \cap G')/(Q \cap K').$$

（３）　$v = b$ の時は，直和の代わりに同型になる．

Fisher の不等式より $|K| \leqq |H|$ なので系の (1) はそう明らかなことではない．

さて，G-集合 X や B の代わりに RG-加群 RX や RB を取り，結合行列の代わりに incidence map を取る，と言うこの節で述べた過程において，RX や RB が permutation module であることを落としてしまっている．もしこの点も考え合わせるなら，もっと詳しい結果が得られるのではないかと期待される．しかし，そのためには，行列に対応するものを，有限 G-集合のカテゴリーの中で新たに構成する必要がある．

4. Mackey category と Hecke category.

以下では環 R は p-局所環（すなわち R/J(R) の標数が p，例えば p-進整数環）とする.

前の節と同様に，(X, B) を有限群 G の作用するブロックデザインで，そのパラメーターを v，b，r，k，λ，n とする. (X, B) が対称デザインで，素数 p が rn を割り切らないなら RX と RB は RG-加群として同型である．しかしながら良く知られているように，G-集合としては，X と B は同型でない．それでもふたつの G-集合は同型に近いと言えるであろう．この節では G-集合達を対象とするある加法圏 Mc であって，その中で X と B が実際に同型になるようなものを構成する.

定義. R-additive かつ self-dual な category Mc（<u>Mackey category</u> と言う）を以下のように定義する.

(1)対象は有限 G-集合.

(2) Mc における Y から X への morphism 達全体のなす R-加群 Mc(Y, X) は次の生成元と関係式で定義される：

(a)生成元は，任意の G-集合 A から X，Y への G-map の対の同型類

$$[f, f'] := [X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{f'} Y].$$

(b)関係式.

(i) $[X \leftarrow A \rightarrow Y] + [X \leftarrow B \rightarrow Y] = [X \leftarrow A+B \rightarrow Y]$.

(ii) G の任意の p-部分群 P と $x \in X^P$, $y \in Y^P$ に対し

$$|f^{-1}(x) \cap f'^{-1}(y) \cap A^P| = |g^{-1}(x) \cap g'^{-1}(y) \cap B^P|$$

が成立するなら，

$$[X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{f'} Y] = [X \xleftarrow{g} B \xrightarrow{g'} Y].$$

(3)合成はファイバー積で定義する.

$$[X \longleftarrow A \longrightarrow Y]\cdot[Y \longleftarrow B \longrightarrow Z]$$
$$= [X \longleftarrow A \times_Y B \longrightarrow Z].$$

注意. 1．hom-set の定義の(ii)を除いてもカテゴリーを得る．このカテゴリーを Mc(G, R⊗Ω）と書く．Mc はこのカテゴリーの商でありさらに（加法圏の意味での）直和因子である.

2．Mc(Y, X) は R-加群 $e^p_{G,1}\cdot(R\otimes G_0(\mathrm{Set}_f{}^G/(X\times Y)))$ に同型である．ここで $e^p_{G,1}$ は G の Burnside 環の巾等元であり，G_0 は直和に関するGrothendieck 群，G_0 の括弧の中はコンマカテゴリー（X×Y への G-map 全体の成すカテゴリー）である．詳細は私の論文 [Yo87] にある．

3．群 G = 1 の場合，Mc の対象は有限集合，射は R に成分を持つ行列 (a_{xy})，合成は行列の積となる．

次に上のカテゴリー に密接に関係した <u>Hecke category</u>（permutation module のカテゴリーに同値）を定義する．

定義．Hecke category Hec を次のように定義する．

(1)対象は有限 G-集合．

(2)Y から X への射は R に成分を持つ X×Y 型行列 (a_{xy})．

(3)合成は行列の積．

このカテゴリーも R-additive かつ self-dual であり，明らかに permutation RG-module のカテゴリーに同値である．

命題6．Mc から Hec への R-additive functor Ψ を次で定義する．すなわち

$\Psi(X) := X$ かつ

$$\Psi([X \xleftarrow{f} A \xrightarrow{f'} Y]) := (\,|\,f^{-1}(x)\cap f'^{-1}(y)\,|\,)_{xy}.$$

このとき，Mc における射 α に対し，もし $\Psi(\alpha)$ がそれぞれ split mono, split epi, iso なら α もそうである．

この命題の証明は難しい．基本的には Mc の（カテゴリー論的な意味での）radical が functor Ψ の kernel を含むことを言わなければならない．

系7．α を Mc における X の endomorphism とする．このとき α が同型であるための必要十分条件は，det $\Psi(\alpha)$ が R で可逆なことである．

さて $\mathrm{Set}_f{}^G$ から Mc への functor の対 (Mc^*, Mc_*) がある．（これが universal な Mackey functor となる．）

$$Mc^* : X \longmapsto X,\ (f:X \longrightarrow Y) \longmapsto [f,\ 1_Y]$$

$$Mc_* : X \longmapsto X,\ (f:X \longrightarrow Y) \longmapsto [1_X,\ f]$$

$\mathrm{Set}_f{}^G$ における Amitur complex $\{\, d^n_i : X^n \longrightarrow X^{n-1}\}$ を

これらの functor で飛ばすと Mc における complex が得られる．

$$Am(X)\ \ : 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow X \longrightarrow X^2 \longrightarrow \cdots$$

$$Am(X)^{op} : 0 \longleftarrow 1 \longleftarrow X \longleftarrow X^2 \longleftarrow \cdots$$

上の結果のもう一つの系として次を得る.

系8. p が $|X|$ と互いに素ならば $Am(X)$ と $Am(X)^{op}$ は contracting homotopy を持つ.

したがってこのような complex を Mc からの R-additiveな functor で飛ばすと R-加群の完全系列が得られる. Ext の long exact sequence の代用になるこの事実は, 次節の主定理の証明で本質的な役割を果たす. そこでこの節の最後にもうひとつの概念を導入する.

定義. Mc (resp. Hec, $Mc(G, R\otimes\Omega)$) から R-加群のカテゴリーへの R-additive な反変関手 (self-dual だから共変でもよい) を poly-Hecke (resp. Hecke, Mackey) functor と言う.

poly-Hecke functor は Mackey functor である. したがって G-functor である (定義は [Yo83b] など). この節の命題で定義した関手 Ψ : Mc $\longrightarrow$ Hec があるので Hecke functor は poly-Hecke functor である. Mackey functor M が poly-Hecke functor であるための必要十分条件は, 対応する G-functor a について, P が部分群 $H \leqq G$ の Sylow p-部分群なら $res : a(H) \longrightarrow a(P)$ が単射と言うことである. (Mackey functor M と G-functor a とは $a(H) = M(G/H)$ の関係で1対1に対応する. poly-Hecke functor には cohomological G-functor が対応する.) 任意の Mackey functor M に対し $X \longrightarrow eM(X)$ は poly-Hecke functor である. ここで $e = e^{p}_{G,1}$ は Burnside 環 $R\otimes\Omega(G)$ の (trivial な部分群に対応する) 巾等元.

例. 1. $X \longmapsto \mathrm{Ext}^{m}_{RG}(RX, N)$ は Hecke functor で対応する cohomological G-functor は $H \longmapsto H^{m}(H, N)$ である.

2. 部分群 H に対し $R(H)$ を指標環とする. このとき $e(R\otimes R(H))$ は, p-元でないところで消えるような $\chi \in R\otimes R(H)$ のなす R-加群である. したがって $H \longmapsto e(R\otimes R(H))$ は poly-Hecke functor に対応する G-functor になる.

5. poly-Hecke functor に対する Fisher の不等式.

この節で [Yo87] の主定理とその証明の概略を述べる. 記号 (X, B), G, v, b, r, k, λ, n, R などは前と同じとする. 素数 p は $R/J(R)$ の標数とする. した

がって有理整数 m が R で可逆であるための必要十分条件は m が p と素なことである.

定理9. $(n, p) = 1$ だと仮定する. M を Mc から R-加群のカテゴリーへの poly-Hecke functor とする. G-集合 Y に対し1点集合への自明な射 $Y \longrightarrow 1$ が誘導するふたつの R-準同型を $Y^*: M(1) \longrightarrow M(Y)$, $Y_*: M(Y) \longrightarrow M(1)$ と書く.

(1) (a) $(p, r) = 1$ なら $M(X) \mid M(B)$.

(b) $(p, v) = 1$ なら $\mathrm{Ker}\, X_* \mid M(B)$, $\mathrm{Cok}\, X^* \mid M(B)$.

(c) $(p, b) = 1$ なら $\mathrm{Ker}\, X_* \mid \mathrm{Ker}\, B_*$, $\mathrm{Cok}\, X^* \mid \mathrm{Cok}\, B^*$.

(2) $v = b$ とする.

(a) $(p, r) = 1$ なら $M(X)$ と $M(B)$ は R-同型.

(b) $(p, v) = 1$ なら $\mathrm{Ker}\, X_*$ と $\mathrm{Ker}\, B_*$, $\mathrm{Cok}\, X^*$ と $\mathrm{Cok}\, B^*$ はそれぞれ R-同型.

証明. (1aだけ) flag の集合

$$F := \{(x, \beta) \mid x \in \beta \in B\}$$

は G-集合で X と B へのふたつの射影 $(x, \beta) \longrightarrow x, \beta$ がある. したがって Mc における incidence morphism とその transpose

$$\alpha = [X \longleftarrow F \longrightarrow B] : B \dashrightarrow X,$$

$$\alpha' = [B \longleftarrow F \longrightarrow X] : X \dashrightarrow B$$

が得られる. このとき functor $\Psi : \mathrm{Mc} \dashrightarrow \mathrm{Hec}$ による α, α' の像はそれぞれ結合行列 A, A^t である. よって

$$\det \Psi(\alpha\alpha') = \det(AA^t) = rkn^{v-1}.$$

となり, この値は p と素だから $\Psi(\alpha\alpha')$ は Hec における同型射である. 系7より $\alpha\alpha'$ は Mc における同型射である. したがって

$$M(\alpha\alpha') = M(\alpha')M(\alpha) : M(X) \longrightarrow M(B) \longrightarrow M(X)$$

も R-加群の同型写像を与える. 結局 $M(\alpha)$ が $M(X)$ から $M(B)$ への split monomorphism である.

注意. (1b, c) の証明は定理3と考えは似ているが, Ext の長完全系列の代わりに系8の完全系列を使うことになる, そのため定理9は完全には定理3を含んでいない.

系１０．P を G の正規 p-部分群とする．p は n を割りきらないと仮定する．このとき次が成立する．

（１）（a）p が r または b と素ならば $|X^P/G| \leq |B^P/G|$ ．

（b）p が r を割りきるなら，$|X^P/G| - 1 \leq |B^P/G|$

（２）v = b なら $|X^P/G| = |B^P/G|$ ．

この結果を得るには，定理９を Burnside 環から作った poly-Hecke functor に適用し両辺の rank を比較すればよい．

注意．この系の結果の初等的な（しかし短くない）証明が鹿児島大学の厚美氏によって与えられた．

６．若干の問題．

群作用を考慮にいれた組合せ論は以前に比べるとやや停滞気味なことはいなめない．この原因は，有限単純群の分類の完成による有限群研究の沈滞による．また群作用など考えない組合せ論が盛んになったこともそれを助長している．例えばかってあれほど熱心に調べられた階数３の置換群の研究など今ではほとんど見向きもされない．

だが，言うまでもなく，ある組合せ構造が自明でない自己同型群を持つというのは，組合せ論的にきわめて好ましい条件である．したがって今後この方面の研究では，群の作用に何の条件も付けないのが望ましい．これに関していくつか目についた割と容易に解けそうな問題をあげておく．

（１）群が作用する対象デザインで，Schuzenberger の定理や Bruck-Ryser-Chowla の定理はどの様な形を取るか．

（２）群が正則（即ち各点の固定部分群が単位元だけからなる）の場合ここで述べた方法は無力であり，結局は群環の話になる．この場合も解けていない問題がたくさんある（Lander や Baumert の本）．cyclic projective difference set がデザルグであること（せめて位数が素数べきであること）を証明できないか．

（３）群作用を持つ強正則グラフについてどんなことが言えるか．D.G.Higman の理論のまねをしたい．この問題は割と苦労せずに出来そうだ．若い人に残しておきたい．

（４）群作用を持つ t-デザインの場合の Fisher の不等式はどうなるか.

（５）群 G の作用する符号において重み i の符号語全体は G-集合としてどの様な性質を持つか. これに関係して, MacWilliams の恒等式に相当する結果は得られている.

（６）群が作用する lattice のテータ関数の変換公式はあるか.

参考文献.

[Ba71] Baumert,L.D.: "Cyclic Difference Sets",Springer LN in Math. vol. 182, 1971.

[De68] Dembowski,P.: "Finite Geometries", Springer-Verlag, 1968.

[La83] Lander,E.S.: "Symmetric Designs: An Algebraic approach", London Math. Soc. LNS 74, 1983.

[Yo83a] Yoshida,T.: Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra 80 (1983), 90-105.

[Yo83b] Yoshida,T.: On G-functors II:Hecke operators and G-functors, J. Mayj. Soc. Japan 35 (1983), 179-190.

[Yo87] Yoshida,T.: Fisher's inequality for block designs with finite group action, J. Fac. Tokyo univ., to appear.