数理解析研究所講究録
第 631 巻 1987 年 8-22

Anosov flow の L－関数

熊大教養　　足立俊明（Toshiaki Adachi）

Anosov flow は どの様な性質を持つのか。 Anosov flow と base space の基本群とはどの様な関係があるのか。このノートでは flow の閉軌道に注目して、主に [A3] [AS1] [AS2] の結果をまとめてみた。

§1　Anosov flow とは

このシンポジウムの性格を鑑み、Anosov flow の定義から始めよう。

定義　flow ϕ_t ;$X \to X$ が Anosov 型であるとは X の接バンドル TX が以下の条件（ア）（イ）を満たす $d\phi_t$ - invariant な３つのバンドルの Whitney 和

$$TX = E^t \oplus E^s \oplus E^u$$

で表されることをいう。

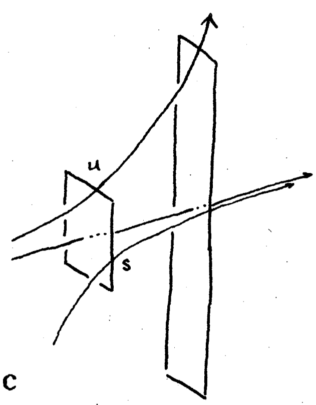
条件（ア）E^tは ϕ_t -orbit に接する line bundle

（イ）正の定数 C，λ が存在して

$$\| d\phi_t (v)\| \leqq C\exp(-\lambda t)\| v\| \qquad v \in E^s$$

$$\| d\phi_{-t}(v)\| \leqq C\exp(-\lambda t)\| v\| \qquad v \in E^u$$

が すべての t>0 について成り立つ。



直観的に（３次元で）図示してやると右図のようになる。理解しやすい Anowov flow の例として 次の２つが挙げられる。

例１　M は負曲率多様体とし、その unit tangent bundle UM 上の geodesic flow を考えるとこれは Anosov 型である。

例２　Anosov diffeomorphism ϕ ; Y → Y （例えば、toral automorphism $T^n = R^n / Z^n \to T^n$)から suspension X ＝ Y／〜、（ϕ(y),o）〜（y,n）を作る。この上の自然な flow （これを suspension flow というが）

$$\phi_t\,(y,s)=(y,s+t)$$

は Anosov 型である。

しかし、例１・２以外の（しかも代数的ではない）Anosov flow の存在が知られており［PS］、おもしろい研究対象であると思われる。

なお gradient flow を含む対象として Axiom A flow という概念がある。このノートのいくつかの定理は Axiom A flow に対しても成立するのだが、本稿の趣旨から少し離れるので割愛する。

次の節へ進む前に いくつかの力学系の言葉を用意しておこう。これ以後 X は compact と仮定する

flow ψ_t ： X → X が（toplogically）transitive であるとは、任意の開集合 U,V に対し或る $t_{U,V}$ が存在して $\psi_t(U) \cap V \neq \phi$ であることをいう。

次に $d\mu$ は flow ψ_t :X → X で invariant な measure とする。（このような measure がいつも存在するわけではないが、ここでは命題６を除き存在を仮定する。）ψ_t が $d\mu$-(strong)-mixing であることは、任意の $d\mu$-L^2 関数 f，g に対し、

$$\int_X \psi_t^* f \; g \; d\mu \to \int_X f \; d\mu \quad \int_X g \; d\mu \quad (t\to\infty)$$

を満たすことをいう。

最後に flow に付随した重要な量、toplogical entropy を定義する。time 1 diffeomorphism を ψ(= ψ_1)と表す。

X の oper cover $\mathcal{U}$ に対して

$$H(\mathcal{U}) = \log \inf \{\# \mathcal{U}' \mid \mathcal{U}' \text{ は } \mathcal{U} \text{ の有限 subcover}\}$$

と定め $\mathcal{U}$ に関する entropy を

$$h(\psi_t, \mathcal{U}) = \lim \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=1}^{n-1} \psi^{-i}\mathcal{U})$$

と定義する。但し２つの cover $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ に対し

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$$

を表す。flow ψ_t の topological entropy とは

$$h = h(\psi_t) = \sup\{h(\psi_t, \mathcal{U}) \mid \mathcal{U}\}$$

をいう。この量は flow の混じり具合いを示すものである。特に Anosov 型 geodesic flow $\phi_t : UM \to UM$ の場合 entropy は universal covering 上の体積増大度

$$\lim_{r \to \infty} \log \mathrm{Vol}\, B_r(\cdot)$$

に一致することが知られている。volume 比較定理を使えば、n 次元多様体 M が曲率条件 $-a^2 \leqq \mathrm{Riem} \leqq -b^2$ を満たす時

$$(n-1)b \leqq h \leqq (n-1)a$$

となり、特に(−1)定曲率曲面の場合 $h = 1$ である。

§２ L−関数

Anosov flow の閉軌道はどの位あるのか。この方面で最初の扉をひらいたのは Margulis[Mr],1969年のことであった。compact(−1)定曲率空間上の長さ x 以下の閉測地線の数 $\pi(x)$ は

$$\pi(x) \sim (n-1)^{-1} x^{-1} \exp((n-1)x)$$

という漸近挙動を示す。彼の短い論文からは証明が理解されず、1976年になって Hejhal[H] が Selberg の Zeta 関数

$$Z(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{\gamma} \{1 - \exp(-(s+k)\ell(\gamma))\}$$

γ は M の prime な閉測地線全体を渡る、を利用して証明を与えた。Selberg trace formula により、この Zeta 関数は Laplace-Bertlami 作用素と密接な関係を持っていることがわかり、

ア）全平面 $\mathbb{C}$ 上 holomorphic に拡張され

イ) $s = 1$ で1位の zero 点を持つが、その他は Re $s \geqq 1$ で non-zero。また他の zero 点も Laplace 作用素の固有値から解る。この性質から、素数定理と同じ様に Wiener-Ikehara の tauberian theorem を使ったのである。

力学系の分野でも、以前から Zeta 関数が考えられている。1965年 Artin-Mazur[AM] は diffeomorphism $\phi : Y \to Y$ に対し

$$\zeta_{\phi}(u) = \exp\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \#\mathrm{Fix}(\phi^{n})\}$$

という Zeta 関数を定めた。その後 Bowen-Lanford[BL]と Manning[Ma] とによりAxiom A diffeomorphism (特にAnosov diffeomorphism) ならば、この Zeta 関数は rational であることが示された。この２つの Zeta 関数から類推して Smale[Sm] は flow $\psi_t : X \to X$ に対し

$$Z_{\psi_t}(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{\gamma} \{1 - \exp(-(s+k)\ell(\gamma))\}$$

γ は全ての prime closed orbit を渡り、$\ell(\gamma)$は γ の周期を表す、という zata 関数を定義したが、これは時間のスケーリング変換で不自然な様子を示す。(Selberg zata 関数の場合は(−１)定曲率という条件のため時間のスケーリング変換は出来ない。) そこで flow の zata 関数として

$$\zeta_{\psi_t}(s) = Z_{\psi_t}(s+1) / Z_{\psi_t}(s) = \prod_{\gamma} 1 / \{1 - \exp(-s\ell(\gamma))\}$$

が考察されるようになった。

さて我々の興味は単に閉軌道というだけでなく、種々の分類(主としてホモロジー、ホモトピー)を考慮にいれた閉軌道である。そこで、Dirichlet が L−関数を考察したのと同様に flow の L−関数を以下のように定める。

定義　基本群のunitary表現 $\rho ; \pi_1(X) \to U(N)$に対し

$$L_{\psi_t}(s;\rho) = \prod_{\gamma} 1 / \det\{1 - \rho(<\gamma>)\exp(-s\ell(\gamma))\}$$

但し $<\gamma>$ は γ が定める $\pi_1(X)$ 内の conjugacuy class を表す。

ちょうど $\rho = \mathbb{1}$, trivial character の場合は Zeta 関数になる。また Anosov diffeomorphism ϕ に対して suspension flow ϕ_t を定めると

$$\zeta_{\phi}(\exp(-s)) = \zeta_{\phi_t}(s)$$

となっていることに注意しよう。

Anosov flow については、Laplace 作用素の固有値とは関係がない（ように思われる）。そこで最終節で述べる Ruelle operator を調べると、L－関数の解析性について次のことがわかる。

命題１（[A2],[A4],[AS1],[PP1]） mixing な Anosov flow ϕ_t ; $X \to X$ について

（１） $L_{\phi_t}(s;\rho)$ は Re S ＞ h で non-zero holomorphic。

（２） $L_{\phi_t}(s;\rho)$ は Re S ＞ h－ε へ non-zero meromorphic に拡張される。ここでεは表現ρに依存しない定数である。

（３） $N = \dim(\rho) \geq 2$ ならば、$L_{\phi_t}(s;\rho)$は Re s ≧ h のある近傍で holomorphic。

（４） $\zeta_{\phi_t}(s)$ は s ＝ h で１位の pole を持つことを除き Re s ≧ h の近傍で holomorphic。

（５） N ＝ 1（character）の場合 $L_{\phi_t}(s;\rho)$ が $s = h + \sqrt{-1}u$ で pole を持つための必要十分条件は、

$$\rho(<\gamma>) = \exp(\sqrt{-1}u\,\ell(\gamma))$$

が すべての閉軌道 γ について成り立つことである。この場合

$$L_{\phi_t}(s;\rho) = \zeta_{\phi_t}(s-\sqrt{-1}u)$$

となり、pole はすべて１位である。

このことから特に Imρ が有限ならば、Re s ≧ h の近傍で holomorphicである。

Selberg zeta 関数や Riemann zeta 関数はある関数等式を満たし、全平面 $\mathbb{C}$ での様子が解ったのだが、一般の場合には、これはもはや期待できない([Po1])。では、どんな条件の下で、全平面 $\mathbb{C}$ へ meromorphic に拡張されるか、また zata 関数が strip Re $s > h - \varepsilon$ へ $s = h$ を除き holomorphic に拡張されるのか。前者の問題については、おもしろい結果が出ていないので [Po4] に譲ることにし、後者についてふれておこう。

X 上の Holder 連続な関数 f.g に対して correlation function $\rho_{f,g}$を

$$\rho_{f,g} = \int_X \phi_t^* f \cdot g \ d\mu - \int_X f \ d\mu \cdot \int_X g \ d\mu$$

但し $d\mu$ は ϕ_t -invariant measure, と定める。この関数は ϕ_t の mixing rate を表すものだが Palay-Wienerの定理により、

定理2[Po3] すべての Holder 連続関数について correlation function が 指数的に 0 へ decay するならば、$\zeta_{\phi_t}(s)$は Re $s > h - \delta$ へ $h = s$ を除き non-zero holomorphic に拡張される。

(−1)定曲率多様体の geodesic flow の場合にはこの条件が成立していることが知られているが、一般の負曲率多様体では指数 order であっても指数的とは限らない。一般の負曲率多様体の geodesic flow の場合どうなるかは非常に興味がある。

§3 閉軌道の分布

さっそく命題1を応用してみよう。本節では、特に断らなければ、invariant measure $d\mu$ をもつ mixing な Anosov flow $\phi_t : X \to X$ を考えているものとする。素数定理を導くのと同様の計算を行うことにより次の prime orbit theorem が得られる。

定理3[PP1] 周期 $\ell(\gamma)$ が x 以下の prime closed orbit の数を $\pi(x)$ と表すと、その漸近挙動は

$$\pi(x) \sim h^{-1} x^{-1} \exp(hx)$$

特に負曲率多様体上の閉測地線の数の長さに関する漸近的挙動が得られる。次に閉軌道を分類して考察してみよう。基本群 $\pi_1(X)$の有限指標正規部分群 H をとり、射影 $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/H$ を Proj_H と表すことにする。剰余類 $\mathcal{A} \in \pi_1(X)/H$ に対して、周期 $\ell(\gamma)$が x 以下の prime closed orbit で $\mathrm{Proj}_H(\gamma) = \mathcal{A}$ となるものの数を $\pi(x, \mathcal{A})$ と表すと、その漸近挙動は

定理4 ([AS1],[PP2])

$$\pi(x, \mathcal{A}) \sim [\pi_1 : H]^{-1} \# \mathcal{A}\ h^{-1}\ x^{-1} \exp(hx)$$

というように、Dirichlet の密度定理の type が得られる。その証明も

$$\Sigma\ \chi(-\mathcal{A})\quad L_{\phi_t}\quad (s\ ;\ \chi \circ \mathrm{Proj}_H)$$

和は、$\pi_1(X)/H$ の character 全体を走る、に数論の方法を適用するのである。特に H がホモロジー群 $H_1(X, \mathbb{Z})$ の有限指標部分郡の場合を考えれば

$$\pi(x, \mathcal{A}) \sim [H_1 : H]^{-1}\ h^{-1} x^{-1} \exp(hx)$$

と $\mathcal{A}$ によらない漸近挙動を示す。 では、更に詳しく各 homology 類 α でみたらどうであろうか。原理的には

$$\int_{H_1} \chi(-\alpha) \quad L_{\phi_t} \quad (s\ ;\ \chi \circ \mathrm{Proj}_{H_1}) \tag{1}$$

の関数を調べれば良いわけであるが、’無限和’のために、pole、singularity の様子が解らなくなり、数論的方法が、すぐには利用できない。そこで flow の状態を調べることになる。これまで、解っているのは3次元以上の geodesic flow の場合だけである。 geodesic flow

ϕ_t : UM → UM は $\phi_t(-v) = -\phi_{-t}(v)$ という折り返し的性質を持っており、これが $H_1(UM,\mathbb{Z}) = H_1(M,\mathbb{Z})$ 上の involution を引き起こすことから、各ホモロジー類に無限個 prime closed orbit が含まれていることがわかる[AS2]。 Katsuda-Sunada は更に折り返しの性質を、（1）の関数に反映させ

定理５[KS3] Anosov 型 geodesic flow について各 $\alpha \in H_1(M,\mathbb{Z})$ に含まれる閉測地線の数の漸近挙動は

$$\pi(x,\alpha) \sim C\,x^{-(1+r)}\exp(h\,x),\ r = \mathrm{rank}\ \frac{1}{2}\ H_1(M,\mathbb{Z})$$

C は幾何学的定数

を示した。この定理については本講究録の Katsuda 氏のノートを参照されたい。

閉軌道の自由ホモトピー類については、ほとんど解っていないのが実情である。いくつかの話題を取り上げてみると

命題６[A2] transitve な Anosov flow ϕ_t : X → X の閉軌道は基本群を生成する。

ここで曲面の geodesic flow や suspension flow を考えると、閉軌道を全く含まない自由ホモトピー類がある。一方、geodesic flow の場合、各自由ホモトピー類には高々１つしか閉軌道がなかったのであるが、一般には正しくない。genus ２以上の曲面上の bundle の上の Anosov flow で２つの閉軌道が自由ホモトピックとなるものがある（Kouichi Yano氏による）。 更に、Plante-Thurston[PS]によれば、無限個の閉軌道が自由ホモトピックになる例もあるという。この問題は基本群の性質とも絡み興味深く思われる。

次に、閉軌道が base space 上どのように分布しているかを考察しよう。その１つとして orbital measure ν_x を以下のように定める。

$$\nu_x(f) = \Sigma \int_{\gamma} f$$

但し、和は周期 x 以下の prime closed orbit 全体を走る。即ち、X の部分集合にどのくらい hit するかを示すものであるが、

定理（[B2],[P]）閉軌道は次の意味で一様分布(equidistribution)している。

$$\nu_x(f) / \nu_x(1) \to \int_X f \, d\mu$$

が任意の連続関数 f について成り立つ。

この定理は初め Bowen[B2] により力学系の立場のみから得られたものであるが、Parry[P] は少し重みを付けた Zeta 関数

$$\zeta(s,z) = \prod_{\gamma} 1 / \{1 - \exp(-(s+z)\ell(\gamma))\}$$

の z = 0 の近傍での様子を調べて数論的証明を与えた。

では閉軌道を分類したらどうであろうか。前と同じ記号を用いることとにして別の orbital measure $\nu_{x,\mathcal{A}}$ を

$$\nu_{x,\mathcal{A}}(f) = \Sigma \int_{\gamma} f$$

但し、和は周期 x 以下の prime closed orbit で $\mathrm{Proj}_H(\gamma) = \mathcal{A}$ を満たすもの全体を走る、と定めると、やはり重み付きL-関数を考えて

命題８[A2] 任意の coset $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ と任意の連続関数 f について

$$\nu_{x,\mathcal{A}}(f) / \nu_{x,\mathcal{A}}(1) \to \int_X f \, d\mu$$

$$\nu_{x,\mathcal{A}}(f) / \nu_{x,\mathcal{B}}(f) \to 1$$

というように分類をしてもやはり一様分布することがわかる。geodesic flow の場合に更にホモロジー類のレベルで考察してやると

命題９[A2]（１）３次元以上の場合各 $\alpha \in H_1(UM, \mathbb{Z})$ に含まれる閉軌道上の点は UM 上 dense な部分集合を成す。

（２）曲面の場合各 $\alpha, \beta \in H_1(M, \mathbb{Z})$ について

$$\nu_{x,\alpha}(f) / \nu_{x,\alpha}(1) \rightarrow \int_X f \, d\mu$$

$$\nu_{x,\alpha}(f) / \nu_{x,\beta}(f) \rightarrow 1$$

なお[KS3]を詳しく読めば、３次元以上の場合にも（２）型の一様分布がわかるはずである。

最後に閉軌道の周期の１を modulo とした分布（uniform distribution）について述べよう。数列 $\{\lambda_n\}$ が一様分布しているとは、ほとんど全ての $a \in (0,1)$ について

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \delta_{(a\lambda_n)} \rightarrow \text{(Lebesgue measuere)}$$

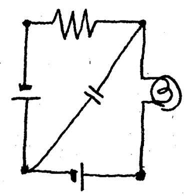
が成り立つことをいう。ただし δ_* は $*$ での dirac measure を、$(p) = p - [p]$ は p の小数部分を表す。定理３と Weil の growth condition により

命題１０[Po6]　$\{\exp(h\ell(\gamma)) \mid \gamma$ は prime closed orbit $\}$ は一様分布している。

§４. Symbolic dynamics と Ruelle operator

本節で命題１の証明のアイデアを述べる。

まず有向グラフ（V, E）について考えよう。V は有限個の頂点の集合であり、$E \subset V \times V$ は向き付けられた辺の集合である。辺に長さ $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ が定まっているとしよう。



これは右図のように flow の discrete なモデルと考えられる。$(v_0, \ldots, v_n) \in V \times \cdots \times V$ が $(v_i, v_{i+1}) \in E$ を満たす時 path であると言い、特に $v_0 = v_n$ の場合に closed path と呼ぶことにしよう。この closed path を対象に zeta 関数を

$$\zeta_{\ell}(s) = \prod_{\gamma} \{1 - \exp(-s\ell(\gamma))\}^{-1}$$

と定義する。但し、積は prime cycle（closed path の像）全体を渡り、$c = (v_0, \ldots, v_n)$ に対して $\ell(c) = \ell(v_0, v_1) + \cdots + \ell(v_{n-1}, v_n)$ とする。この関数を調べるのに次の transition matrix

$$A(s)_{i,j} = \begin{cases} \exp(-s\,\ell(i,j)) & \text{if } (i,j) \in E \\ 0 & \text{otherewize} \end{cases}$$

を取ると

$$\zeta_{\ell}(s) = \exp\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Trace} A(s)^n \right\}$$
$$= 1/\det\{I - A(s)\}$$

となり、pole の位置が A(s) の固有値からわかる。この固有値については Perron-Frobenius の定理から

（ア）$s \in \mathbb{R}$ ならば A(s) は正の重複度 1 の最大固有値 $\lambda(s)$ を持つ。

（イ）$\mathbb{R} \ni s \to \lambda(s) \in \mathbb{R}$ は単調減少。

（ウ）A(s) の固有値 μ は $|\mu| \leqq \lambda(\mathrm{Re}\, s)$ を満たす。

このことから命題 1 の type の主張が有限グラフの zeta 関数についても成り立つ。L－関数についても表現付きの transition matrix を考えれば良い。

次に Anosov flow とグラフとの関係を知るために Bowen[B3] の symbolic dynamics について触れよう。有限グラフ (V_0, E_0) 上の無限 step path 全体の集合

$$\Sigma(V_0, E_0) = \{\xi = (\xi_n) \in \prod_{-\infty}^{\infty} V_0 \mid (\xi_n, \xi_{n+1}) \in E\}$$

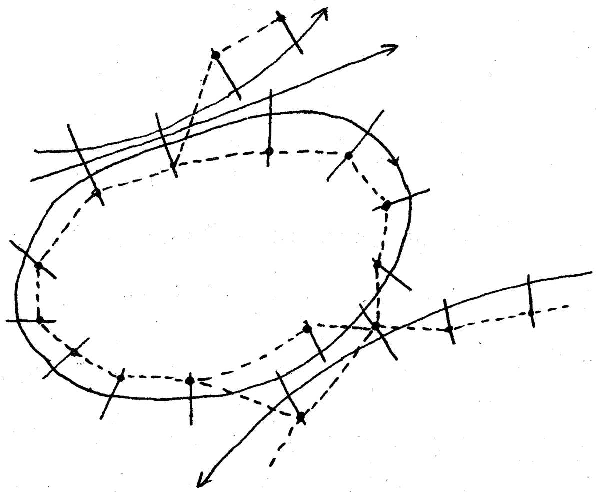
を subshift of finite type といい、自然な homeomorphism

$$\sigma : \Sigma(V_0, E_0) \to \Sigma(V_0, E_0), \quad \sigma(\xi)_n = \xi_{n+1}$$

を shift operator という。subshift 上の正値関数 ℓ : $\Sigma(V_0, E_0) \to \mathbb{R}$ を用いて suspension $\Sigma(V_0, E_0, \ell)$ がつぎのように定まる。

$$\Sigma(V_0, E_0, \ell) = \{(\xi, s) \mid \xi \in \Sigma(V_0, E_0),\ 0 \leqq s \leqq \ell(\xi)\} / \sim$$

この suspension 上の suspension flow（§１例２参照）$\sigma(\ell)_t$ は後でみるように扱いやすい対象なのである。この symbolic な flow と Anosov flow とを結び付けるのが Markov family である。直観的には Markov family とは下図のような有限個の flow に対する衝立の集合 V_0 である。



実線は flow を破線はグラフを表す。

$E_0 = \{(v, w) \in V_0 \times V_0 \mid v$ のある内点が w へ流れ込む$\}$
として有限付向グラフ (V_0, E_0) を作る。このグラフは flow の粗い近似しか与えないので $\Sigma(V_0, E_0)$ を考えると Anosov flow の性質から自然な bounded-to-one map

$$p_0 : \Sigma(V_0, E_0) \to \bigcup_{v \in V_0} v$$

$(v \in V_0$ は X の部分集合と考えている$)$ができる。しかもこの写像は discrete な集合上 one-to-one である。各 $\xi \in \Sigma(V_0, E_0)$ に対して $p_0(\xi)$ が次の衝立にたどり着くまでの時間として $\ell : \Sigma(V_0, E_0) \to \mathbb{R}$ を与えると容易に

$$p : \Sigma(V_0, E_0, \ell) \to X$$

の写像で

（ア） p は bounded-to-one map であり、 X の discrete な集合上 one-to-one.

（イ） $\phi_t \circ p = p \circ \sigma(\ell)_t$

を満たすものが存在することがわかる。したがって ϕ_t －closed orbit 達と $\sigma(\ell)_t$－closed orbit 達とはほぼ 1 対 1 の対応がある。p の性質(ア)により数え過ぎたところを修正してやると Anosov flow の zeta 関数は

$$\zeta_{\phi_t}(s) = \zeta_{\sigma(\ell)_t}(s) \times \Pi_j \, \zeta_{\sigma(\ell_j)_t}(s) \; \Pi_k \, \zeta_{\sigma(\ell_k)_t}(s)^{-1}$$

と有限個の suspension flow の zeta 関数を用いて表される。なお $h(\phi_t) = h(\sigma(\ell)_t) > h(\sigma(\ell_j)_t)$, $h(\sigma(\ell_k)_t)$ であることも p の性質(ア) から解るので命題１をしめすには $\zeta_{\sigma(\ell)_t}(s)$ について命題１の type の主張を示せば良いことになる。この suspension は次のようにグラフ(残念ながら無限グラフであるが)と結び付いている。

$$V = \Sigma^+(V_0, E_0)$$

$$= \{\xi = (\xi_n) \in \prod_0^\infty V_0 \mid (\xi_n, \xi_{n+1}) \in E_0\}$$

$$E = \{(\xi, \eta) \in V \times V \mid \sigma\eta = \xi\}$$

と置くと ℓ と homologuos な $\ell^+ : V \rightarrow V$ が作られ、これを $\ell^+(\xi, \eta) = \ell^+(\eta) : E \rightarrow E$ とみると

$$\zeta_{\sigma(\ell)_t}(s) = \zeta_{\ell^+}(s)$$

となる。

上に述べたような無限グラフの zeta 関数を調べるのに V 上の Lipschitz 連続な関数達の作る Banach 空間に働く Ruelle operator

$$\pounds_s(f)_{(\xi)} = \sum_{\sigma\eta = \xi} \exp(-s\,\ell(\eta))$$

を利用する。これは有限グラフの transition matrix に相当し、Perron-Frobenius 型の主張

（ア） $s \in \mathbb{R}$ ならば $\pounds_s$ は正の重複度 1 の最大固有値 $\lambda(s)$ を持つ。

（イ） $\mathbb{R} \ni s \to \lambda(s) \in \mathbb{R}$ は単調減少。

（ウ） $\pounds_s$ の spectral radius は $\lambda(\mathrm{Re}\ s)$ 以下。

（エ） $\pounds_s$ の essential spectral radius は $\lambda(\mathrm{Re}\ s) - \varepsilon$ 以下。ここで ε は $\mathrm{Im}\ s$ には依存しない。

が成り立ち、命題１が得られる。

参考文献

[A1] T. Adachi, Nagoya Math. J. 104(1984).

[A2] ———, to appear in Proc. A.M.S.

[A3] ———, to appear in Nagoya Math. J.

[A4] ———, Meromorphic extension of L-functions of Anosov flows

[AM] M. Artin and B. Mazur, Ann. of Math. 81(1965), 82-89.

[AS1] T. Adachi and T. Sunada, J. Func. Anal. 71(1987), 1-46.

[AS2] ———, to appear in J. Diff. Geom.

[B1] R. Bowen, Amer. J. Math. 94(1972), 1-30.

[B2] ———, Amer. J. Math. 94(1972), 413-423.

[B3] ———, Amer. J. Math. 95(1973), 429-460.

[B4] ———, Springer Lect. Note. in Math. 470

[BL] R. Bowen and O. E. Lanford , Proc. Symp. Pure Math. 14(1970),43-49.

[CGH] P. Collet, H. Epstain and G. Gallavotti,Comm. Math. Phys. 95(1984), 61-112.

[F] D. Fried, the zeta functions of Ruelle and Selberg.

[HT] M. Handel and W. P. Thurston, Invent. Math. 59(1980), 95-

103.
[H] D. A. Hejhal, Springer Lecture Note in Math. 548.
[K] A. Katsuda, preprint.
[KS1] A. Katsuda and Sunada, to appear in Proc. A.M.S.
[KS2] ———, to appear in Proc. A.M.S.
[KS3] ———, in preperation.
[Mn] A. Manning, Bull. London Math. Soc. 3(1971), 215-220.
[Mr] G. A. Margulis, Funktional Analizi Ergo. Prilozhen 3(1969) 89-90.
[Pa] W. Parry, Ergod. Th. Dynam. Sys. 4(1984), 117-134.
[PP1] W. Parry and M. Pollicott, Ann. of Math. 118(1983), 573-591.
[PP2] ———, Ergod. Th. Dynam. Sys. 6(1986), 133-148.
[Pl] J. F. Plante, Proc. A.M.S. 37(1973),297-300.
[PS] J. F. Plante and W. P. Thurston, Topology 11(1972),147-150.
[Po1] M. Pollicott, Ergod. Th. Dynam. Sys. 4(1984), 135-146.
[Po2] ———, Isr. J. Math. 52(1985),209-224.
[Po3] ———, Invent. Math. 81(1985), 413-426.
[Po4] ———, Invent. Math. 85(1986),147-164.
[Po5] ———, J. London. Math. Soc. 34(1986),185-192.
[Po6] ———, preprint.
[R1] D. Ruelle, Invent. Math. 34(1976), 231-242.
[R2] ———, "Thermodynamic Formalism"
[Sm] S. Smale, Bull. A.M.S. 73(1967), 747-817.
[Su] T. Sunada, Advance Studies in Pure Math. 3(1984), 47-86.
[T1] P. Tomter, Proc. Symp. Pure Math. 14(1975), 179-189.
[T2] ———, Topology 14(1975), 179-189.

(Typed by Mitsuko Ezaki.)