数理解析研究所講究録
第631巻 1987年 43-54

或る連分数のg進展開におけるdigitsについて

国際短大　田村 純一 (Jun-ichi Tamura)

§0 序

正則連分数 (simple continued fraction) 展開とg進小数展開を同時にexplicitに表わせるような無理数については，殆ど知られていない．(Bundschu [2]) 連分数

$$[0;1,g,g,g^2,g^3,g^5,g^8,\dots] \quad (2\le g\in\mathbb{Z})$$

のg進展開が

(1) $$(g-1)\sum_{n\geq 1} g^{-[\alpha n]}, \quad \alpha=(1+\sqrt{5})/2$$

で与えられることは，既に知られているが (Adams–Davison [1])，ここでは，その別証明を与える過程でg進小数のdigitsたちの間になりたつ興味深い事実について述べる．

§1 準備

数列 $\{u_n\}_{n=-1}^{\infty}$ は，

$$u_{-1}=0,\ u_0=1,\ u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\ (n=1,2,3,\dots)$$

で決められる Fibonacci 数列とし，A_n は"再帰的"に

$$(1)\quad \begin{cases} A_{2n+2} = A_{2n}.\ 3.\ A_{2n+1} \\ A_{2n+3} = A_{2n+1}.\ 2.\ A_{2n+2} \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots) \end{cases}$$

で定義される有限数列とする．但し $A_1 = A_2 = A_3 = \phi$（ϕ は空集合）$A_4 = 3$，$A_5 = 2, 3$ とする．たとえば，

$$A_6 = A_4.\ 3.\ A_5 = 3.\ 3.\ 2.\ 3$$

$$A_7 = A_5.\ 2.\ A_6 = 2.\ 3.\ 2.\ 3.\ 3.\ 2.\ 3$$

となる．このとき，数列 A_n の長さは $u_{n-2} - 1$ となるので数列 A_n の和分

$$B_n = b_1^{(n)},\ b_2^{(n)},\ \cdots,\ b_{u_{n-2}}^{(n)}$$

を n の偶奇に従って $b_1^{(n)} = 0$ または 1 とおいて決めることができる．即ち，$n = 4, 5, 6, \cdots$ に対し

$$b_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{m-1} a_k^{(n)} + \begin{cases} 0 & (n：偶数) \\ 1 & (n：奇数) \end{cases}$$

$$(a_k^{(n)} = 数列\ A_n\ の第\ k\ 項)$$

とする．また $B_0 = 0$，$B_1 = 1$，$B_2 = 0$，$B_3 = 1$（長さ1の数列）とする．このとき次が成りたつ：

$$(2)\quad b_{u_{n-2}}^{(n)} = u_n - 2 \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

$$(3)\quad b_1^{(n)} + u_{n-1} - b_{u_{n-3}}^{(n-1)} = \begin{cases} 2 & (n：偶数) \\ 3 & (n：奇数) \end{cases}$$

$$(4)\quad B_{n+1} = B_{n-1},\ B_n + u_{n-1}$$

(2) より (3)，(3) より (4) が出る．(4) の plus の記号は，

たとえば，$\mathcal{B}=2,5,7,10$ に対して，$\mathcal{B}+8=10,13,15,18$ 等となることを示し，(4)の右辺の comma は §1の(1)と同様の意味をもつ）

§2 連分数によって定義された関数 $\Theta(x)$.

この§以下，証明は一切省略する．まず，正則連分数 $[0; x^{u_{-1}}, x^{u_0}, x^{u_1}, x^{u_2}, \dots, x^{u_{n-2}}]$ で表わされる有理関数を $\theta_n(x)$ とし，

(5) $$\theta(x)=\lim_{n\to\infty}\theta_n(x)=[0; x^{u_{-1}}, x^{u_0}, x^{u_1}, \dots]$$

とおく．（$x\in\mathbb{C}$，$|x|<1$ の時，上の極限は有限確定値をもつ）連分数(5)の第n近似分数を通常の記号で，$p_n(x)/q_n(x)$ とすると，p_n, q_n の回帰関係式より，帰納法で

(6) $$p_n(x)=\sum_{\substack{l=0\\ l\notin\mathcal{B}_n}}^{u_n-1} x^{l}, \quad q_n(x)=\sum_{l=0}^{u_n-1} x^{l}$$

が示される．ここで

$$\theta_n(x^{-1})=p_n(x^{-1})/q_n(x^{-1})=\Theta_n(x)$$

とおくと，

$$1-\Theta_n(x)=\Big(\sum_{l=0}^{u_n-1}x^{-l}-\sum_{\substack{l=0\\ l\notin\mathcal{B}_n}}^{u_n-1}x^{-l}\Big)\Big/\sum_{l=0}^{u_n-1}x^{-l}.$$

(2)より，有限数列 $\mathcal{B}_n$ の各項からなる集合は，$\{0,1,\dots,u_n-1\}$ に含まれることに注意して，

$$1-\Theta_n(x) = P_n(x)\,/\,Q_n(x),$$
$$P_n(x) = \sum_{l\in B_n} x^{u_n-1-l}, \quad Q_n(x) = \sum_{l=0}^{u_n-1} x^l$$

と書ける。そこで、数列 B_n の項を逆に並べかえた数列 $\overleftarrow{B_n}$ の各項の符号をかえた数列 $-\overleftarrow{B_n}$ を考え、

$$D_n' = -\overleftarrow{B_n} + u_n - 1$$

とおく。即ち、D_n' の第 m 項を $d_m^{(n)}$ とするとき、

$$d_j^{(n)} = -b_{u_{n-2}-j+1} + u_n - 1, \quad (j = 1, 2, \cdots, u_{n-2})$$

となる。このとき、(2)より D_n' の初項は、n の偶奇に関係なく常に 1 に等しい。今、D_n' の差分をとり、

$$C_n := \Delta D_n' := \{-b_{u_{n-2}-j} + b_{u_{n-2}-j+1}\}_{j=1}^{u_{n-2}-1}$$

とおくと、D_n' の作られ方から、$C_n = \overleftarrow{A_n}$ で、

(7) $$1-\Theta_n(x) = \sum_{l\in D_n'} x^l \Big/ \sum_{l=0}^{u_n-1} x^l$$

がなりたつ。ここで、~~とかく~~、$\Delta D_n' = C_n$ は次をみたす：

(8) $$\begin{cases} C_{2n+4} = C_{2n+3},\ 3,\ C_{2n+2} \\ C_{2n+5} = C_{2n+4},\ 2,\ C_{2n+3}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

但し、$C_1 = C_2 = C_3 = \emptyset$, $C_4 = 3$, $C_5 = 3, 2$.

たとえば、 $C_6 = 3, 2, 3, 3$

$C_7 = 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2$

$C_8 = 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, \overbrace{3, 2, 3, 3}$

等となる. 数列 τ_{n+1} は数列 τ_n を"延長"したものであるから, $\tau_n = \{c_m\}_{m=1}^{u_{n-2}-1}$ と書ける. 従って,

$$\tau = \lim \tau_n = \{c_m\}_{m=1}^{\infty}$$

が定義される. (7) で $n \to \infty$ として,

$$
\begin{aligned}
&\text{Ⓗ}(x) := \lim_{n\to\infty} \text{Ⓗ}_n(x) \\
(9)\qquad &= [0; 1, x^{-u_{-1}}, x^{-u_0}, x^{-u_1}, x^{-u_2}, \ldots] \\
&= 1 - (1-x)\sum_{\ell \in \mathcal{D}'} x^{\ell} \qquad , \quad |x| < 1
\end{aligned}
$$

を得る. ここで $\mathcal{D}'$ は, τ の和分, i.e.,

$$\Delta \mathcal{D}' = \tau \quad \& \quad \mathcal{D}' \text{の初項} = 1$$

で与えられる無限数列である.

Polya - Carleson の定理を使えば, 関数 Ⓗ(x) の自然境界は, 単位円 $|x| = 1$ であり, 従って, Ⓗ(x) は超越関数であることがわかる. $\Delta\mathcal{D}'$ の中に 1 が現われないことに注意して ($\Delta\mathcal{D}' = \tau$ は, 2 と 3 だけからなる数列) (9) より次を得る:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&\text{Ⓗ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n \quad \text{としたとき,} \\
&\sigma_0 = 1, \qquad \sigma_n = \begin{cases} -1 & (n \in \mathcal{D}') \\ +1 & (n \in \mathcal{D}'+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}
$$

§3 Ⓗ(g^{-1}) の g 進展開.

(10) において, $x = 1/g$ $(2 \leq g \in \mathbb{Z})$ を代入すれば,

$$\Theta(g^{-1}) = [0;1,g,g,g^2,g^3,g^5,g^8,\cdots]$$

$$(11) \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} k_n g^{-n},$$

但し,

$$k_n = \begin{cases} k := g-1 & (n \notin \mathcal{D} := \mathcal{D}'+1) \\ 0 & (n \in \mathcal{D}) \end{cases}$$

であることが導かれる．$\Theta_n(g^{-1})$ の g-進展開は，周期が u_n の無限循環小数となるが，$\Theta(g^{-1})$ は，無限正則連分数に等しいから，勿論，無理数であり，$\Theta(g^{-1})$ の g 進展開における digits $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，k と 0 のみからなる非周期的な無限列であることがわかる．従って数列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，他に，どの様な性質を持っているか興味のあるところである．これについて以下に述べ，併せて得られるいくつかの結果についても述べる．

§4 数列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ について．

任意の正整数は，隣接しない Fibonacci 数の和として，一意的に書けることはよく知られている．即ち，$0<n\in\mathbb{Z}$ に対し正整数 m 及び $u_{j_1},\cdots,u_{j_m}$ が一意的に決まり，

$$(B) \qquad n = \sum_{l=1}^{m} u_{j_l}$$

をみたす．但し，$j_1>0$，$\overbrace{j_{l+1}-j_l>1}^{m>1\text{ の時は}}$ $(l=1,2,\cdots,m-1)$ とする．このとき，$j_1=j_1(n)$ は n の関数と考えられる．

そこで，次がなりたつ：

(12) $\mathcal{D} = \{2+\sum_{k=1}^{n-1} c_k\}$

$= \{n ; j_1(n) \equiv 0 \pmod 2\}$

(注. 数列$\mathcal{D}$は単調列なので集合と同一視した)

(注. 空和 $\sum_{k=1}^{0} c_k = 0$ と考える)

(13) $c_n = \begin{cases} 3 & (j_1(n)=\text{odd}) \\ 2 & (j_1(n)=\text{even}) \end{cases}, \quad n=1,2,3,\cdots$

これらと(11)を併せて数列$\mathcal{C}=\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$と数列$\mathcal{K}=\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$は、文字の違いを除いて、本質的に同じ列であることがわかる。(つまり、$k(=g-1)\to 3$, $0\to 2$ できまる2文字の置換によって、数列$\mathcal{K}$は数列$\mathcal{C}$に移る) 従って、$\Theta(g^{-1})$のg進小数表示は数列$\mathcal{C}$を書き下せば機械的に得られる:

(14) $\mathcal{C}$: 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, ...

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \cdots$

$\Theta(g^{-1}) = 0.k\,0\,k\,k\,0\,k\,0\,k\,k\,0\,k\,k\,0\cdots$

ここで数列$\mathcal{C}$は"再帰接続関係"(8)より得られる。

ところで数列$\mathcal{C}$は、次の驚くべき性質(証明は(12)(13)から既に明らかであるが)を持っている:

(15) 数列$\mathcal{C}=\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$の$(2+\sum_{k=1}^{n-1}c_k)$-番目の項は2に等しく、それ以外の項は3に等しい。

この(15)より数列$\mathcal{C}$が機械的に((8)を使わないで)求められる:

(15)′ 　1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 …

τ: 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, …

$\mathcal{D}$: 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, …

説明：数列τと数列$\mathcal{D}$の初項は、それぞれ3, 2とする。3行目の最初の数が2だから1行目の2に○印をつける。1行目の○印の下には2と書く。2行目の和分をとると2, 5, 7（3行目）が得られる。1行目の2, 5, 7に○印をつける。（2には既に○印がついているので、5と7だけに○印をつける）○印の下（2行目）に2と書いて既に○印のついている数より左にある1行目の無印の数の下には3と書き入れる。2行目の和分をとって3行目の2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20が得られる。1行目の~~7, 10, 13~~ 10, 13, 15, 18, 20に新しく○印をつける。以下同様にこれをくりかえす。

また、(8)より、数列τは substitution

$$T: \begin{cases} 3 \mapsto 3\ 2 \\ 2 \mapsto 3 \end{cases}$$

によって生成される：

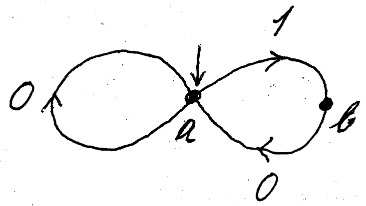
(16) $3 \mapsto 3, 2 \to 3, 2, 3 \to 3, 2, 3, 3, 2 \to \cdots$

即ち、τは constant length でない substitution によって書かれる "automaton" (pseudo-automaton) の生成

する列と考えられる．(実際また(13)に注意すれば，$\mathscr{C}$ は pseudo-automaton:

(注) 2進法の代りに Fibonacci representation (§4, (B)) を使う．即ち $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ の代りに $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を base にとる．

(17)



によって生成される列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ a. & b. & a. & a. & b. & a. & b. & \cdots \\ (3. & 2. & 3. & 3. & 2. & 3. & 2. & \cdots) \end{array}$$

と考えられる．

他方，次の正規連分数 (regular continued fraction)

$$\Phi(x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{1+\cfrac{x^5}{1+\cfrac{x^8}{1+x^{13}\cdots}}}}}}, \quad |x|<1$$

(右辺の x の肩の数は Fibonacci 数)

で与えられる関数についても同様の結果を得る．たとえば，$k=g-1$ として，(14)に対応する結果：

(18)

$$\Phi(g^{-1}) = 0.0\,\underline{k0kk0k0}\cdots$$

$$\downarrow$$

$$\mathscr{E}: 2.1.2.2.1.2.1\cdots = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$$

($\mathscr{E}$ は 2, 1 の列として (8)と同様にして与えられる)

や，(15)′ に対応する結果：

(19) $\mathcal{E}$: ①, 2, ③, ④, 5, ⑥, 7, ⑧, ⑨, 10, ⑪
$\quad$ 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, …
$\mathcal{F}$: 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, … $= \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$

等が示される。ところで、連分数の直接の変形によって、

$$\Phi(x) = x \, ④(x)$$

であることが確められるから、(14), (18)より 数列 $\mathcal{C} = \{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ は(数列 $\mathcal{X}$ を媒介に) 数列 $\mathcal{E} = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ と文字の違いを別にすれば同一の pattern を持っていることがわかる。従って、数列 $\mathcal{C}$ は

$$(20) \quad c_n = \begin{cases} 3 & \text{iff } n \in \mathcal{F} = \{f_m\}_{m=1}^{\infty} \\ 2 & \text{iff } n \in \mathcal{D} = \{d_m\}_{m=1}^{\infty} \end{cases}$$

によって与えられることがわかる。ここで (15)′, (18), (20) より、

$$d_n = f_n + n$$
$$\mathcal{D} \cup \mathcal{F} = \mathbb{N}, \quad \mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \emptyset$$

であることがわかる。これより $\mathcal{D}$ 及び $\mathcal{F}$ は $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ としたとき、

$$(21) \quad \begin{cases} d_n = [\alpha^2 n] \\ f_n = [\alpha n] \end{cases}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

~~が得られる~~で与えられることがわかる。(これより §0 の (A)) ~~また~~ も導かれる。

また、連分数の級数表示 (Euler's transformation) を用いれば、T_n を不定方程式の解の個数

$$T_n = \#\{(k, l, m) \in \mathbb{N}^3 ;\ u_{2m} \cdot (k-1) + u_{2m+1} \cdot l = n\}$$

で与えられる数としたとき、

$$\Theta(x) = \frac{1}{1+x} + \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{u_{2m+2}}}{(1-x^{u_{2m}})(1-x^{u_{2m+2}})}$$

(22)

$$= \frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} (T_n - 2T_{n+1} + T_{n+2}) x^n, \quad |x|<1$$

を得る。数列 $\{T_n - 2T_{n+1} + T_{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$ は 数列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ の差分を2回とったものであることに注意して、(9),(21)及び(22)を使えば、

(23) $$T_n = \frac{1}{2}n - \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}(n-1)\right] + \frac{1}{4}(-1)^{n-1} - \frac{3}{4}$$

$$\sim \frac{\sqrt{5}-2}{2} n$$

を得る。一般に、不定方程式

$$xx' + yy' = n$$

の正整数解の個数については、興味あるが、これに数論的な制限をつけて、解の個数を考えたものとしては、Tonkov の論文[4]などがある。

以上の諸結果のうち(16)については、M. Mendès France、また、(14)については、C. Mauduit に教示を得たことを記し、併せて感謝の意を表する。

最後に、$\Theta(x)$の値の超越性について述べる。既に見たように、$\Theta(x)$は、級数

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{[\alpha n]}, \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と結びつけられるが. αを一般の2次無理数としたとき,
$f_\alpha(g^{-1})$ ($2 \le g \in \mathbb{Z}$) が超越数であることは知られている.
従って, 勿論 ④(g^{-1})も超越数である. 最近 D.W.
Masser が相異なる1より小さい代数的数たちを $f_\alpha(x)$
に代入した値たちの代数的独立性を示した. ([3])
これに対して, finite pseudo-automaton によって与えられる数列を digits とする無限小数の超越性については,
④(g^{-1})の他には, 一般に何も知られていない. 文献:

1. Adams, W. W. and Davison, J. L.: A remarkable class of continued fractions, Proc. AMS vol. 65 No. 2 (1977), p. 194–

2. Bundschu, P.: Über eine Klasse reeler Transzendenter Zahlen mit explizit angebbarer g-adischer und Kettenbruch-Entwicklung, Journal für die reine und angewandte Math. (Crelle) 318 (1980), p. 110–

3. Masser, D. W.: An algebraic independence theorem (1–1)

4. Тонков, Т.: Новые применения метода «стаканчиков» Виноградова, Труды математического института АН СССР (1984) том 163, p. 234–