数理解析研究所講究録
第631巻 1987年 55-65

あるDirichlet級数の関数等式について

岡山理大教養部 船倉武夫 (Takeo Funakura)

(1) Dirichlet級数展開で定義され,

(2) 関数等式 $\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}$
を満足し,

(3) $s=1$で1位の極を持つ以外は全平面で正則であり,

(4) Eulerの無限積の表示を持つ,

などが複素関数として, Riemannのζ関数の保有する基本的性質である。逆にこれらの性質によって, Riemannのζ関数を特徴付ける問題にHamburger [3] が最初に有意な結果を与えた。

定理 (Hamburger) $f(s)$が以下の(1)〜(3)の条件を総て, 満足するならば,

$$f(s)=a_1\zeta(s)$$

となる。

(1) Dirichlet級数展開

$$f(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s} \qquad Re(s)>1$$

が可能である。

(2) 関数等式

$$f(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=g(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}$$

が成立つ。ここで，$g(1-s)$ は $Re(s)\ll 0$ で Dirichlet 級数で定義された関数とする。

(3) $G(s)$ を全平面で正則な関数，$P(s)$ を多項式として，

$$f(s)=\frac{G(s)}{P(s)}$$

と表示できる。

さて，この定理の証明は Siegel [9] において簡易化されている。Hamburger は Dirichlet の L 関数に対しても，興味を持ち，同様な議論を展開している。彼の研究を継承して，周期的係数を持つ Dirichlet 級数達の中で，Dirichlet の L 関数の特徴付けを関数等式を使って考察してみる。別の視点からの特徴付けを Turán [10] が行なっている。なお，Hecke はいわゆる Hecke 理論を Hamburger の14年後に [4]

で発表している。この拙論の内容とも，一部抵触するが，それには触れないことにする。

周期nのarithmetical関数fに対して，

$$L(s,f)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f(m)}{m^s}$$

と定義する。正数$a(f)$と，実数$b(f)$を任意に与え，それらを固定して，

$$\Lambda(s,f)=a(f)^s\Gamma\left(\frac{s+b(f)}{2}\right)L(s,f)$$

とおく。

fを剰余群$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$上の関数と看做したときの，Fourier変換$\hat{f}$は

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}f(m)e^{-\frac{2\pi ixm}{n}}$$

で与えられる。さて，次の定理が成立つ。

<u>定理1.</u> f,gの基本周期が共にnであると仮定する。このとき，関数等式

$$\Lambda(1-s,f)=\Lambda(s,g)$$

が成立するための必要十分条件は次の(a)～(d)が満足するこ

とである。

(i) f, g ともに奇関数あるいは偶関数である。

(ii) $a(f)a(g) = \frac{n}{\pi}$

(iii) $b(f) = b(g) = \begin{cases} 1 & f: \text{奇関数} \\ 0 & f: \text{偶関数} \end{cases}$

(iv) $\hat{f} = i^{b(g)} \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, a(g)\, g$

Hurwitz の方法 (Zeitschrift für Math. und Phys. 27 (1882) 86–101, あるいは, Whittaker–Watson [11] の 13 章) に従い, Schnee [8] は周期的係数を持つ Dirichlet 級数の満足する関数等式を与えた。彼の結果を整理すれば, (i) ~ (iv) の十分性を得る。この十分性の証明を仔細に見直すことによって, 必要性が判明する。

従って, これからは,

(i) f の基本周期を n

(ii) f は奇関数または偶関数

(iii) $a(f) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}$

(iv) $b(f) = \begin{cases} 1 & f: \text{奇関数} \\ 0 & f: \text{偶関数} \end{cases}$

であることを常に仮定することにする。定理1から次の系

を獲得する。

<u>系</u>　ωを絶対値が1の複素数とする。このとき，関数等式

$$\Lambda(1-s,\ f)=\omega\Lambda(s,\ \bar{f})$$

が成立し，かつ

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{n}\ i^{b(f)}}\sum_{m=1}^{n}f(m)\,e^{\frac{2\pi i m}{n}}$$

となるための必要十分条件は，

$$\hat{f}=\omega\bar{f}$$
$$f(1)=1$$

が成立つことである。

各ωに対して，$L(s,\ f)$が無限に存在することが分るので，関数等式のみで，DirichletのL関数を特徴付けることは不可能である。ところで，ωの絶対値が1でなければ，系の要請を満足する$L(s,\ f)$は存在しない。

$s\to1$の極限に関しては，Chowla [2] 以降に，多くの研究成果がある。我々の考察の範囲では，

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}\right)=-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

であるから，$\lim_{s\to 1} L(s,f)$が収束するための必要十分条件は$\hat{f}(n)=0$である。系の要請を仮定するもとでは，これは

$$f(n)=0$$

と同値である。更に，Dirichletの L関数の場合と同様に，

$$L(1,f)=-\frac{\hat{f}(1)}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\overline{f(m)}\log\left(1-e^{-\frac{2\pi i m}{n}}\right)$$

と計算できる。もし f が奇関数であれば，$\hat{f}=\hat{f}(1)\bar{f}$ および $\hat{f}(n)=0$ を用いて，

$$L(1,f)=-\frac{\pi}{2n}\sum_{m=1}^{n-1}f(m)\cot\frac{m\pi}{n}$$

と変形できる。Okada[5] によって一般化された Chowla[2] の定理

「 $\cot\frac{m\pi}{n}$; $1\leqq m\leqq\left[\frac{n}{2}\right]$, $(m,n)=1$
は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である」

を適用すれば，次の定理が証明できる。

<u>定理2.</u> n と $\varphi(n)$ が互いに素であると仮定する。このとき，

(i) $\hat{f} = \hat{f}(1)\bar{f}$

(ii) $(m, n) = 1$ に対して，$f(m) = 0$

(iii) f は奇関数

(iv) f の値域は $\varphi(n)$ 次の円分体に包含

を総て満足するならば，

$$L(1, f) \neq 0, \ \infty$$

である。

ところで，Baker-Birch-Wirsing [1] によれば，(i) の仮定なしに，定理2は成立する。更に，また

(iii)' f は偶関数

の場合，(i)，(iv) は

(i)' $\hat{f}(n) = 0$

(iv)' f の値域は有理数体の代数的閉包に包含

と条件を弱めても，定理2は成立つ。なお，$L(1, f) = 0$ となる f の構成問題に関しては，例えば，Okada [6] などを参照せよ。

最後に，条件として強過ぎて，面白味に欠ける感があるが，Euler の無限積を仮定してみる。これに関連して，Ryavec [7]

の研究がある。 このとき，fは乗法的関数である上に，周期がnであることより，

$$f(xy)=f(x)f(y), \qquad (x,n)=(y,n)=1$$

が成立つ。故に，$L(s,f)$はnの素因子に対応する因子を無視すれば，関数等式を仮定するまでもなく，$L(s,f)$はDirichletのL関数と一致する。それにもかかわらず，次の反例がある。

<u>例</u> pを奇素数とし，χを法pの非自明なDirichlet指標とする。γを絶対値が1である任意の複素数とし，$n=p^2$とおく。このとき，

$$f(x)=\chi(x) \qquad (x,n)=1$$
$$f(p)=\gamma\sqrt{p}$$
$$f(p^2)=0$$

で基本周期nの乗法的関数を定義する。fは完全乗法的ではないので，$L(s,f)$はDirichletのL関数と一致しない。一方，$L(s,f)$はEulerの無限積の表示を持つ上に，関数等式

$$\Lambda(1-s,f)=\gamma W(\chi)\Lambda(s,\bar{f})$$

を満足する。ここで

$$W(\chi)=\frac{1}{\sqrt{p}\,i^{b(\chi)}}\sum_{m=1}^{p-1}\chi(m)e^{\frac{2\pi i m}{p}}$$

しかも，$L(1,f)\neq 0,\infty$ でもある。

直接，fに適当な条件を附加するならば，このような反例を棄却することは容易である。例えば，定理2の(ii)の条件を仮定すれば，$L(s,f)$がEulerの無限積の表示を持つことと$L(s,f)$がDirichletのL関数と一致することは同値であることは明らかである。ところが，定理2の(ii)と関数等式の双方を仮定しても，$L(s,f)$がDirichletのL関数と一致しない例は無限に存在する。要するに，Eulerの無限積より弱い適切な条件を探すことが，今後の課題であろう。

最後に，次の定理を述べて，この拙論を締め括る。

定理3. nをsquare freeな自然数とする。このとき，

(1) $L(s,f)$は基本周期 nのDirichlet 級数展開が出来る。

(2) 関数等式

$$\Lambda(1-s,f)=\omega\Lambda(s,\bar{f}) \quad \exists\omega\in\mathbb{C}$$

が成立つ。

(3) $\lim_{s\to 1} L(s,f)$は収束する。

(4) Eulerの無限積の表示を持つ。

以上の条件をすべて満足するならば，$L(s,f)$はDirichletのL関数と一致する。

n が square free でない場合，このままでは定理は成立しない。更に

$$(5) \qquad |f(m)| \leqq 1 \qquad \forall m$$

を追加すれば，定理が成立する。

文 献

[1] A. Baker − B. J. Birch − E. A. Wirsing: On a problem of Chowla, J. Number Theory, 5 (1973), 224−236.

[2] S. Chowla: The nonexistence of nontrivial linear relations between the roots of certain irreducible equation, J. Number Theory, 2 (1970), 120−123.

[3] H. Hamburger: Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion, Math. Z. 10 (1921), 240−254; ibid. 11 (1921), 224−245; ibid. 13 (1922), 283−311.

[4] H. Hecke: Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Ann. 112 (1936), 644−699.

[5] T. Okada: On a theorem of S. Chowla, Hokkaido Math. J. 6 (1977), 66–68.

[6] T. Okada: Dirichlet series with periodic algebraic coefficients, J. London Math. Soc. 33 (1986), 13–21.

[7] C. Ryavec: Riemann's functional equation, Rocky Mountain J. Math. 5 (1975), 623–627.

[8] W. Schnee: Die Funktionalgleichung der Zetafunktion und der Dirichletschen Reihen mit periodischen Koeffizienten, Math. Z. 31 (1930), 378–390.

[9] C. L. Siegel: Bemerkungen zu einem Satz von Hamburger uber die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 86 (1922), 276–279.

[10] P. Turán: On a characterization of Dirichlet's L-function, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 8 (1965), 65–69.

[11] E. T. Whittaker–G. N. Watson: A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge, 1927.