数理解析研究所講究録
第631巻 1987年 66-69

実二次体に付随した Maass wave forms に関する一注意

京大・教養　加藤信一 (Shin-ichi Kato)

古典的な wave forms が，ある種の関数等式を満たす Dirichlet 級数に対応する保型形式として Maass [M] によって定義・研究されたものであることは周知であろう。例えば実二次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (Dは判別式) の量指標つき zeta 関数

$$(1)\quad \zeta_K(s\,;\,n,\rho) = \sum_{\substack{\mu \in (\mathcal{O} \setminus \{0\})/E_+(\sqrt{D}) \\ \mu \equiv \rho \pmod{\sqrt{D}}}} (\operatorname{sgn} N(\mu))^{\kappa} \left|\frac{\mu}{\mu'}\right|^{nci} \frac{1}{|N(\mu)|^s}$$

$\left(\begin{array}{l} \kappa = 0 \text{ 又は } 1,\ n \in \mathbb{Z},\ \rho \in \mathcal{O} = K \text{ の整数環}, \\ E_+(\sqrt{D}) \text{ は 総正単数 } \equiv 1 \pmod{\sqrt{D}} \text{ 全体のなす群}, \\ c = \pi/\log\varepsilon,\ \varepsilon > 1 \text{ は } K \text{ の基本単数}. \end{array}\right)$

に対応するものが，標題の"実二次体に付随した wave forms"で，

$$(2)\quad g(z_+; n, \rho) = l_0\,\delta(n,\rho)\,y^{1/2} + \sum_{\substack{\mu\in(\mathcal{O}\setminus\{0\})/E_+(\sqrt{D})\\ \mu\equiv\rho \pmod{\sqrt{D}}}} \left|\frac{\mu}{\mu'}\right|^{nci} y^{1/2} K_{nci}\!\left(\frac{2\pi|N(\mu)|}{D}\,y\right) e^{2\pi i\frac{N(\mu)}{D}x}$$

$$(z_+ = x+iy,\ y>0)$$

で与えられる。ここで $E_+(\sqrt{D}) = \langle\varepsilon_0\rangle$, $\varepsilon_0>1$ としたとき，$l_0=\log\varepsilon_0$; $\delta(n,\rho)=1$ ($n=0$ かつ $\rho\equiv 0\ (\sqrt{D})$ の時)，$=0$ (その他); また $K_{nci}(\ \ )$ は変形Bessel関数である。この $g(z_+;n,\rho)$ は"保型性"を持ち，上半平面上の Laplacian $\Delta = -y^2(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$ の，固有値 $\frac{1}{4}+n^2c^2$ の固有関数である。(その他，詳しくは[M].)

さて，それより以前，Hecke[H] はより"素朴"な zeta 関数(1)(の $n=0$ の場合)に対して"theta 級数"

$$(3)\quad \vartheta_\pm(z_\pm; n,\rho) = \sum_{\substack{\mu\in(\mathcal{O}\setminus\{0\})/E_+(\sqrt{D})\\ \mu\equiv\rho\ (\sqrt{D}),\ \pm N(\mu)>0}} |\mu|^{2nci}\, e^{2\pi i \frac{N(\mu)}{D} z_\pm}$$

($z_\pm \in H_\pm$, 上(下)半平面) を考え, その"変換公式"を計算した ($n=0$の場合). 勿論 (3) それ自身は"保型性"を持たないが, 超関数 (hyperfunction, 実はすぐわかるように distribution)

$$\vartheta(x;n,\rho) = \vartheta_+(x+i0,n,\rho) + \vartheta_-(x-i0;n,\rho) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

を考えれば, これは"保型的"になる。例えば

$$\vartheta\left(-\frac{1}{x};n,\rho\right) = \frac{|x|^{1+2nci}}{\sqrt{D}} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{O} \\ \beta \bmod \sqrt{D}}} e^{2\pi i \frac{\mathrm{Tr}(\rho'\beta)}{D}} \vartheta(x;n,\beta) \qquad (x \neq 0).$$

これより, 実射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (局所座標を v, w; $w = -\frac{1}{v}$) 上の実解析的直線束の超関数切断を

$$\begin{cases} v \longmapsto \vartheta(v;n,\rho) \\ w \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{D}} \displaystyle\sum_{\beta \bmod \sqrt{D}} e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(\rho'\beta)/D}\,\vartheta(w;n,\beta) \end{cases}$$

で定めよう; 言い換えれば, 超関数値誘導表現

$$\mathcal{B}\text{-}\mathrm{Ind}_P^G(nci) = \left\{ f \in \mathcal{B}(G) \,;\, f\left(g\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}\right) = |a|^{-1-2nci} \times f(g) \right\}$$

($G = SL_2(\mathbb{R})$, P = 上三角行列全体 $\subset G$) の "保型的な" 元 $\Theta_{n,\rho}$ を定める。そしてこの Poisson 積分 (上記 誘導表現の空間から, Laplacian の固有空間への G-準同型)

$$\int_K \Theta_{n,\rho}(gk)\,dk \qquad \left(\begin{array}{l} K = SO(2) \\ dk = \text{正規化された Haar 測度} \end{array} \right)$$

: $g \pmod K$ の関数

を計算すると, $G/K \simeq H_+$ の同一視のもとに, (2) の $g(z_+; n, \rho)$ が定数倍を除いて得られるのである。(計算については [K] を参照されたい。)

[M] H. Maass, Math. Ann. 121 (1949) 141-183

[H] E. Hecke, J. Reine Angew. Math. 157 (1927) 159 - 170 (Werke 25)

[K] S. Kato, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 34 (1987) (to appear)