数理解析研究所講究録
第 631 巻 1987 年 99-109

有理型多変数関数の代数的独立性と楕円積分の周期の超越測度

Noriko HIRATA

平田典子

Institut Henri Poincaré :

11 rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris CEDEX 05 France

Abstract　Schneider-Langの定理（§1に述べる）を用いると共通な周期をもつある二変数関数を二つ考えたときに その周期のlattice の点は algebraic numberにより定義された直線を決して通らないことがいえる。 このlattice の点と直線の distance を下から評価したのが以下に述べる定理の内容である. この定理により いろいろな超越数の transcendence measures が得られる。

§1 Result in General case

まずことばの説明をする.

$H(\beta)$ が代数的数 β の <u>height</u> $\Longleftrightarrow$ $H(\beta)$ は β の minimal polynomial の係数の絶対値の最大値.

整関数 $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ の <u>order</u> $\leq \rho$ $\Longleftrightarrow$ ある正の実数 A, B で

$$\log \sup_{\|z\|=R} |f(z)| \leq A R^{\rho} \quad \text{for } R > B$$

となるものが存在する.

但し $\| \ \|$ は $\mathbb{C}^n$ のノルムとする.

有理型関数 $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ の <u>order</u> $\leq \rho$ $\Longleftrightarrow$ 整関数 g, h で

$h \neq 0$, g の order $\leq \rho$, h の order $\leq \rho$

をみたし $f = \dfrac{g}{h}$ と書けるものが存在する.

さて Schneider-Lang の定理とは次に述べられた事柄である。

<u>Th. (Schneider-Lang, [W1] Th. 3.3.1)</u>

K を degree δ の代数体とし $f_1, \ldots, f_h$ ($h \geq 2$) を有理型一変数関数で $\dfrac{d}{dz} f_j \in K[f_1, \ldots, f_h]$ for $1 \leq j \leq h$ をみたすとする. また f_1 と f_2 はそれぞれ order $\leq \rho_1, \rho_2$ で f_1 と f_2 は algebraically independent とする. このとき $1 \leq {}^{\forall}j \leq h$ に対し $f_j(a) \in K$ (a は f_j の pole でない点) となる点 $a \in \mathbb{C}$ の個数は $\delta(\rho_1 + \rho_2)$ を越えない。

この定理によると次のようなことがわかる。

K: degree δ の代数体

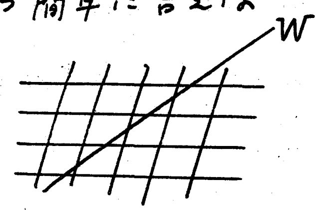
$f_1, \dots, f_k$ $(k \geqq 2)$ は有理型二変数関数, 0 で analytic で $i=1,2$, $1 \leqq j \leqq k$ に対し $\frac{\partial}{\partial z_i} f_j \in K[f_1, \dots, f_k]$ をみたすとする. また f_1, f_2 は共通の周期 $0 \neq \Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ をもつ周期関数で f_1 は order $\leqq \rho_1$, f_2 は order $\leqq \rho_2$ とする. このとき W: K 上定義された任意の直線をとり f_1 と f_2 の W 上 restrictions f_1/W, f_2/W を考えると もし $\Theta \in W$ ならば

$$f_1/_W(n\Theta_1) = f_1(0, 0) \in K$$

$$f_2/_W(n\Theta_1) = f_2(0, 0) \in K$$

$$\text{for } \forall n \in \mathbb{Z}$$

となり Schneider-Lang の定理に反することになる. 従って $\Theta \notin W$ ということがいえるわけである. 即ち簡単に言えば 周期の lattice を考えたときに 直線 $z_2 = \beta z_1$ (β: algebraic) は決して格子点を通らないというわけである.



さて この Θ と W の距離 $\mathrm{dist}(\Theta, W)$ は 0 にならないと言っても その大きさは具体的に測れるのだろうか? その lower bound を与えるのが次の定理である.

Theorem

K : degree δ の代数体

$f_1, \ldots f_h$ $(h \geq 2)$ 有理型二変数関数 0でanalytic.

$\frac{\partial}{\partial z_i} f_j \in K[f_1, \ldots f_h]$ $(i = 1, 2,\ 1 \leq j \leq h)$,

$f_j(0) \in K$ $(1 \leq j \leq h)$ をみたすものとする. また

f_1, f_2 はそれぞれ order $\leq \rho_1, \rho_2$ $(\rho_1 + \rho_2 \geq 2)$ とする.

さて degree $= \delta$, height $\leq H$ $(H \geq e)$ なる任意の

$\beta \in K$ に対し $f_1(z, \beta z)$ と $f_2(z, \beta z)$ がalgebraically

independent over K ならば次のような effective

constant $c > 0$ で β に independent なものが存在する:

$$\log|\theta_2 - \beta\theta_1| > -c\ |\theta|^{\rho_1+\rho_2}(\log H + \delta\log\delta + \delta\log(|\theta| + 1))^{\rho_1+\rho_2-1}.$$

これにより $\mathrm{dist}(\theta, W)$ の effective lower bound が得られたわけである。 この定理の意味は 次の系を見るとよくわかる.

§2 Results in Special case

Notations $\overline{\mathbb{Q}}$: 有理数体 $\mathbb{Q}$ の algebraic closure in $\mathbb{C}$

Λ : $\mathbb{C}$ の lattice with invariants $g_2, g_3 \in \overline{\mathbb{Q}}$

$\sigma, \zeta, \wp$: Weierstrass の σ関数, ζ関数,

$\wp$関数, associated with Λ.

$\eta = \zeta(z + \omega) - \zeta(z)$ for $\omega \in \Lambda$, $|\omega| \geq 1$.

u : すべての $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ に対し $nu \notin \Lambda$ となり
また $\wp(u) \in \overline{\mathbb{Q}}$ となるような $\mathbb{C}$ の点、とする。

さてこれらの記号の下に次のような transcendence measures が与えられる。

Corollary 1

degree $= \delta$, height $\leq H$ ($H \geq e$ とする) なる全ての algebraic number β に対し次をみたす effective constant $c_1 > 0$ が存在する:

$$\log | \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u - \beta | > - c_1 (\delta \log \delta + \log H)^3 .$$

この $\zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u$ は第三種楕円積分の周期で、その超越性は最近 Chudnovsky ([C]) によって得られたが transcendence measure は知られていなかったものである。

Corollary 2

degree $= \delta$, height $\leq H$ ($H \geq e$ とする) なる全ての algebraic number β に対し次をみたす effective constant $c_2 > 0$ が存在する:

$$\log | \frac{\eta}{\omega} - \beta | > - c_2 (\delta \log \delta + \log H)^3 .$$

実際には定理の証明を見直すことにより次のような改良ができる：

$$\log\left|\frac{\eta}{\omega}-\beta\right| > -c_2'\,\delta\,(\log H\log\log H+\delta^2(\log\delta)^3).$$

この $\frac{\eta}{\omega}$ の超越性は Schneider-Lang の定理により得られ，transcendence measure は Reyssat（[R]）によって与えられているが上の結果はこれよりも強い．

<u>Corollary 3</u>

degree $=\delta$，height $\leqq H$（$H\geqq e$ とする）なる全ての algebraic number β に対し次をみたす effective constant $c_3>0$ が存在する：

$$\log\left|\frac{\pi}{\omega}-\beta\right| > -c_3\,(\delta\log\delta+\log H)^2.$$

<u>Corollary 4</u>

Λ_1，Λ_2 を $\mathbb{C}$ の lattices として それぞれ Λ_i に対し g_{2i}，g_{3i} なる algebraic invariants をもつとする $(i=1,2)$．$|\omega_i|\geqq 1$ なる $\omega_i\in\Lambda_i$ $(i=1,2)$ をとると degree $=\delta$，height $\leqq H$（$H\geqq e$ とする）なる全ての algebraic number β に対し $\frac{\omega_1}{\omega_2}\neq\beta$ ならば次をみたす effective constant $c_4>0$ が存在する：

$$\log \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \beta \right| > -C_4 \left(\delta \log \delta + \log H \right)^3 .$$

このCorollary 4 については，$\frac{\omega_1}{\omega_2}$ が β と異なる algebraic number であっても成立つ（Liouville の定理より明らか）．

Corollary 4 の評価は ［B－M 1］にアナウンスされている結果（証明なし）と同じで，［Y］に示されている評価とは比較ができない（場合により より良くもより悪くもなる）．

§3 Key Lemma for the proof of the theorem

以上の結果の詳しい証明は近く publish の予定であるが，ここでは定理の証明のための Key Lemma の statement のみを述べる．

Lemma

K : degree δ の代数体

W : $z_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} z_i \quad (\beta_{ij} \in K)$

で定義された $\mathbb{C}^d$ の vector subspace.

（d, n は $d \geq 2$, $1 \leq n < d$ なる自然数，$1 \leq i \leq d-n$, $1 \leq j \leq n$）

$f_1, \ldots, f_h$: $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ なる有理型関数（$h \geq d \geq 2$）

0 で analytic とし

$\frac{\partial}{\partial z_i} f_j \in K[f_1, \ldots, f_h]$ （$1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq h$）をみたすとする．

$f_1, \ldots, f_d$ それぞれ order $\le \rho_1, \ldots, \rho_d$

($\rho_1 + \cdots + \rho_d \geqq d$ とする) で

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d) \neq 0$ を基本周期とする周期関数

また $f_j(0) \in K$ $(1 \le j \le k)$ とする.

このとき $\theta \notin W$ ならば 次をみたす effective constants

$c_6, c_7 > 0$ と polynomial $P \in \mathcal{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$

が存在する:

$$\gamma = \max_{1 \le i \le d-n} \left| \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \theta_j - \theta_{n+i} \right| \neq 0$$

に対し $\log \gamma \leqq - c_5 \cdot U$ なる $c_5 > 0$

が存在するならば

$$\deg_{X_j} P \leqq c_6 \cdot L_j \qquad (1 \le j \le d)$$

かつ $\operatorname{Ord}_{z=0} P(f_1/w, \ldots, f_d/w) \geqq c_7 \cdot T$ となる.

但し $H = \max_{\substack{1 \le i \le d-n \\ 1 \le j \le n}} (H(\beta_{ij}), e)$

$$U = |\theta|^{\frac{\rho_1 + \cdots + \rho_d}{d-n}} (\log H + \delta \log \delta + \delta \log(|\theta| + 1))^{\frac{\rho_1 + \cdots + \rho_d - n}{d-n}}$$

$$T = |\theta|^{\frac{\rho_1 + \cdots + \rho_d}{d-n}} (\log H + \delta \log \delta + \delta \log(|\theta| + 1))^{\frac{\rho_1 + \cdots + \rho_d - d}{d-n}}$$

$$L_j = |\theta|^{\frac{\rho_1 + \cdots + \rho_d}{d-n} - \rho_j} (\log H + \delta \log \delta + \delta \log(|\theta| + 1))^{\frac{\rho_1 + \cdots + \rho_d - n}{d-n} - \rho_j}$$

$(1 \le j \le d)$ とする.

§4 Nullstellensatz

定理の証明には次の形のNullstellensatzを用いるのでここに掲げておく.

Th. (Brownawell - Masser

$f_1, \dots, f_n$ $(n \geq 2)$ 一変数関数, 0で正則

$\frac{d}{dz} f_j \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ $(1 \leq j \leq n)$ をみたす.

このとき $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ に対し

$P(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ ならば

$$\mathrm{Ord}_{z=0}\, P(f_1, \dots, f_n) \leq c \cdot D^{2^n}$$

但し D は P の degree

c は P に independent な constant

このNullstellensatzは最近次の改良を得た.

Th. (Nesterenko)

上と同じ situations において

$$\mathrm{Ord}_{z=0}\, P(f_1, \dots, f_n) \leq c \cdot D^n$$

Nesterenkoの定理についてはアナウンスのみで証明は未発表であるがこの exponent の改良は本質的なものであり transcendence method によるいろいろな結果を改良することができる. 多変数においてこの exponent の best possible となる評価を得ることが当面の問題である。

§5 最後に

transcendence method というのは今迄超越数論のいろいろな証明に用いられている手法をひっくるめて呼んだものであるが特色が多く、代数的数を扱う問題に対しても今まで何ら解決の糸口がみられなかったものであっても このtranscendence method は応用できるという例がいくつかあることは日本ではほとんど知られていないのではないかと思う。Leopoldt's conjecture のある特殊な場合の解決（1986. M. Laurent）や Lehmer's problem の解決（1986. M. Langevin）などがそれである。1970年の Bombieri の代数点に関する仕事いらい 調和解析、代数群、などを用いた超越数論の研究は 整数論の中で一分野を確立し、世界では常識的なレベルとなりつつある内容をもっているにも拘らず 日本では特殊な問題のように扱われているのは残念でならない。

Références

[B-M 1] Brownawell, W.D. and Masser, D.W. -Multiplicity estimates for analytic functions I, J.Reine Angew. Math. 314 (1980) p 200-216.

[B-M 2] Brownawell, W.D. and Masser, D.W. -Multiplicity estimates for analytic functions II, Duke Math. Journal 47, No.2 (1980) p 273-295.

[C] Chudnovsky, G.V. -Algebraic independence of values of exponential and elliptic functions, Proc. Int. Congress of Math., Helsinki (1978).

[H] Hirata, N. -Approximation de périodes de fonctions méromorphes, preprint.

[R] Reyssat, E. -Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle, Bull. Soc. Math. France 108 (1980) p 47-79.

[S] Schneider, Th. -Introduction aux nombres transcendants, Grundlehren der Mat. Wiss. 81, Springer-Verlag (1957), Gauthier-Villars (1959).

[W 1] Waldschmidt, M. -Nombres transcendants, Lecture Notes in Math. 402, Springer-Verlag (1974).

[W 2] Waldschmidt, M. -Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque 69-70 (1979).

[W 3] Waldschmidt, M. -Nombres transcendants et fonctions sigma de Weierstrass, C.R.Math. Rep. Acad. Sci. Canada 1 (1979) p 111-114.

[Y] Yu, K. -Linear forms in elliptic logarithms, J. Number Theory 20 (1985) p1-69.