数理解析研究所講究録
第 631 巻 1987 年 123-137

半単純リー群上の Whittaker 関数とその応用

岡山理科大　橋爪道彦（Michihiko HASHIZUME）

半単純リー群上の Whittaker 関数が関連する2つの話題；

(I) 保型関数論に登場する Whittaker 関数…… 保型形式のフーリエ係数

(II) 物理に登場する Whittaker 関数…… 量子戸田格子のスペクトル分解

について述べる。

(I) 保型関数論に登場する Whittaker 関数

1°) 保型形式の定義

よく知られている事ではあるが 上半平面 $H=\{z=x+iy;\ y>0\}$ 上の Modular 群 $\Gamma=SL_2(\mathbb{Z})$ に関する保型形式について想起しよう。$G=SL_2(\mathbb{R})$ は上半平面 H に1次分数変換 $g\cdot z=(az+b)(cz+d)^{-1}$ (但し $g=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in G$, $z\in H$) により推移的に作用している。

定義 1. $f\in C^\infty(H)$ が Γ－保型形式とは

(i) f は Γ-不変 即ち $f(\gamma\cdot z)=f(z)$ (各 $\gamma\in\Gamma$, $z\in H$).

(ii) f は H 上の微分作用素 $y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ の固有関数 即ち

$$y^2\left(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2\right)f = (\nu^2-1/4)f \qquad (\nu\in\mathbb{C}).$$

(iii) f は次の増大度条件を満たす. 即ち各 $p,q\geq 0$ (整数) に対し 正数 C と実数 r が存在して

$$\left|\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\partial y^q}f(x+iy)\right| \leq Cy^r.$$

G の部分群を夫々 $K=SO(2)$, $A=\left\{\begin{bmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2}\end{bmatrix} : y>0\right\}$, $N=\left\{\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1\end{bmatrix} : x\in\mathbb{R}\right\}$ で表わすと $N\times A\times K\ni\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\right) \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\in G$ は微分同型射 (岩沢分解) である。$K=SO(2)$ は G の極大コンパクト部分群かつ点 $i\in H$ における G の固定部分群 従って上半平面はリーマン対称空間 G/K と同一視できる。Γ-保型形式 f に対し G 上の関数 F を $F\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y^{1/2} & \\ & y^{-1/2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\right)=f(x+iy)$ で定めると F は左 Γ-不変, 右 K-不変な G 上の C^∞-関数である。又 H 上の G-不変微分作用素環は $y^2\left(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2\right)$ を生成元とする多項式環である事に注意する。

上に述べた例を考慮して 1 般の場合の保型形式の定義を述べよう。G を 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された連結半単純代数群 $\mathbb{G}$ の実有理点の成す Lie 群, Γ を G の数論的部分群とする。以下 $\mathbb{G}\subset GL_n(\mathbb{C})$ とする。K を G の極大コンパクト部分群

とする。G従ってKは$\mathbb{C}^n$に線型変換として作用する。$\mathbb{C}^n$にK-不変内積をとる。Gの元gを$\mathbb{C}^n$の線型変換とみなしたときその Hilbert-Schmit ノルムを $\|g\|$ で表わす。$\mathcal{U}$でG上の左不変微分作用素環（＝GのLie環$\mathfrak{g}$の複素化の展開環）を表わす。その部分環 $\mathcal{U}^K$を $\mathcal{U}^K = \{D \in \mathcal{U}\ ;\ Ad(k)D = D \quad (k \in K)\}$ で定める。

定義2。 $F \in C^\infty(G)$がΓ-保型形式とは

(i) Fは左Γ-不変かつ右K-有限

(ii) Fは$\mathcal{U}^K$に関する同時固有関数 即ち $\chi \in \mathrm{Hom}_{alg.}(\mathcal{U}^K, \mathbb{C})$が存在して

$$ZF = \chi(Z)F \qquad (Z \in \mathcal{U}^K)$$

(iii) 各$D \in \mathcal{U}$に対し正数Cと実数rが存在して

$$|DF(g)| \leq C\,\|g\|^r$$

注意 Fが右K-有限 $\Leftrightarrow$ $\{F(gk) : k \in K\}$は各$g \in G$に対し有限次元空間を張る，又とくにFが右K-不変のとき条件(ii)は Fが対称空間G/K上の左不変微分作用素環の同時固有関数である事に他ならない。

2°) 保型形式のFourier展開

最初に上半平面上の保型形式のFourier展開について復習し

よう。f を $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ - 保型形式とする。$\Delta = \Gamma \cap N = \{ \begin{bmatrix} 1 & m \\ & 1 \end{bmatrix} : m \in \mathbb{Z} \}$ とおくと f はもちろん Δ - 不変だから $f(x+m+iy) = f(x+iy)$ $(m \in \mathbb{Z})$ が成立つ 即ち y を固定すると $x \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} (= \Delta\backslash N)$ の C^∞-関数である。所で $L^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}) (= L^2(\Delta\backslash N)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} e^{2\pi i n \mathbb{Z}}$ より

$$w_f(y:n) = \int_{\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}} f(x+iy) e^{-2\pi i n x} dx \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

とおくと

$$f(x+iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_f(y:n) e^{2\pi i n x}$$

と表わされる。f が $y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2) f = (\nu^2 - 1/4) f$ を満たす事から $w_f(y:n)$ は

$$\frac{d^2}{dy^2} w_f(y:n) + \left(-4\pi^2 n^2 + \frac{1/4 - \nu^2}{y^2}\right) w_f(y:n) = 0$$

の解である。この微分方程式の解の基本系として $n=0$ のとき $y^{\nu+1/2}$, $y^{-\nu+1/2}$ が 又 $n \neq 0$ のとき 古典的な意味での Whittaker 関数

$$W_{0,\nu}(4\pi|n|y) = 2|n|^{1/2} y^{1/2} K_\nu(2\pi|n|y)$$

$$M_{0,\nu}(4\pi|n|y)$$

がとれる。$W_{0,\nu}(4\pi|n|y) \sim e^{-2\pi|n|y}$, $M_{0,\nu}(4\pi|n|y) \sim e^{2\pi|n|y}$ $(y \to +\infty)$ と増大度条件(iii)を考慮すると $a_0, b_0, a_n\ (n \neq 0) \in \mathbb{C}$ が存在して, $w_f(y:0) = a_0 y^{\nu+1/2} + b_0 y^{-\nu+1/2}$, $w_f(y:n) = a_n W_{0,\nu}(4\pi|n|y)$ と書ける事が分る. よって次を得る.

$$f(x+iy) = a_0 y^{\nu+1/2} + b_0 y^{-\nu+1/2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}-(0)} a_n W_{0,\nu}(4\pi|n|y) e^{2\pi i n x}$$

3°) $L^2(\Delta\backslash N)$の既約分解に応じた保型形式のFourier展開.

Fを定義2で与えたG上のΓ-保型形式とする。Pを$\mathbb{Q}$上定義された$\mathbb{G}$の放物型部分群の実有理点のなす群としNをPの巾単基とする。Nは単連結巾零リー群であり$\Delta=\Gamma\cap N$はNの離散部分群で$\Delta\backslash N$はコンパクトである。$g\in G$を固定するとき$F^g(n)=F(ng)$はN上のΔ-不変なC^∞-関数であり従って$L^2(\Delta\backslash N)$の元を与える。R_ΔでNの$L^2(\Delta\backslash N)$上の右正則表現を表わす。ユニタリ表現$(R_\Delta, L^2(\Delta\backslash N))$の既約分解を行い各既約成分から自然な基底を選ぶことにより$L^2(\Delta\backslash N)$の基底を構成しそれに関して$F^g(n)$を展開する事を考える。

$L^2(\Delta\backslash N)$の既約分解

$\hat{N}$でNの既約ユニタリ表現の同値類の集合を表わす。$\mathfrak{n}$をNのLie環, $\mathfrak{n}^*$を$\mathfrak{n}$の双対空間 Ad'をNの$\mathfrak{n}^*$への余随伴表現 即ち $Ad'(n)\lambda=\lambda\circ Ad(n^{-1})$ $(n\in N,\ \lambda\in\mathfrak{n}^*)$ とする。

$\lambda\in\mathfrak{n}^*$とし$\mathfrak{h}$がλに於ける実polarizationとは$\mathfrak{h}$が$\mathfrak{n}$の部分環で$\lambda([\mathfrak{h},\mathfrak{h}])=(0)$をみたすもののうち最大なるときをいう。実polarization $\mathfrak{h}$に対し$H=\exp\mathfrak{h}$ (対応するNの連結部分群) としHの1次元ユニタリ表現χ_λを$\chi_\lambda(\exp X)=\exp(2\pi i\lambda(X))$ $(X\in\mathfrak{h})$で定める。このとき誘導表現$\pi_{(\lambda,\mathfrak{h})}=\mathrm{Ind}_H^N(\chi_\lambda)$は既約ユニタリ表現でその同値類は$\lambda$を通る余随伴軌道にのみ依る。逆に$N$の任意の既

的ユニタリ表現は ある $\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}$ と同値である事が知られている。ここで $\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}$ の表現空間 $\mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})}$ は

$$\mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})} = \{\phi : N \to \mathbb{C} \mid \phi(hn) = \chi_\lambda(h)\phi(n)\ (h\in H),\ \int_{H\backslash N} |\phi|^2 d\dot{n} < \infty\}$$

で与えられる事を注意しておく。$\lambda \in \mathfrak{n}^*$ と λ における実polarization $\mathfrak{f}$ の対 $(\lambda, \mathfrak{f})$ への N の作用を

$$k\cdot(\lambda,\mathfrak{f}) = (\mathrm{Ad}'(k)\lambda,\ \mathrm{Ad}(k)\lambda) \quad (k \in N)$$

により定める。このとき $\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}$ と $\pi_{k(\lambda,\mathfrak{f})}$ は同値で 同値を与える写像は $\mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})} \ni \phi \longmapsto {}^k\phi \in \mathfrak{H}_{k(\lambda,\mathfrak{f})}$ (但し ${}^k\phi(n) = \phi(k^{-1}n)$) で与えられる。対 $(\lambda,\mathfrak{f})$ が有理対であるとは $\Delta\cap H\backslash H$ が compact で かつ $\chi_\lambda|_{\Delta\cap H} = 1$ が成立つときを言う。有理対 $(\lambda,\mathfrak{f})$ に対し

$$A_{(\lambda,\mathfrak{f})}(\phi)(n) = \sum_{\Delta\cap H\backslash\Delta \ni \delta} \phi(\delta n) \quad (\phi \in \mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})})$$

とおけば $A_{(\lambda,\mathfrak{f})} \in \mathrm{Hom}_N(\mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})}, L^2(\Delta\backslash N))$ が言える。実際次が成立つ。

定理 (Richardson-Howe) $\hat{N} \ni \pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}$ の $L^2(\Delta\backslash N)$ における重複度を $m_\Delta(\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})})$ $(= \dim \mathrm{Hom}_N(\mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})}, L^2(\Delta\backslash N)))$ と書くとき $m_\Delta(\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}) > 0$ である必要十分条件は $(\lambda,\mathfrak{f})$ が有理対である事である。

更に $m_\Delta(\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})})$ は以下のようにして求められる。先ず $\{k\cdot(\lambda,\mathfrak{f}) : k \in N\}$ に同値関係を

$$k_1(\lambda,\mathfrak{f}) \sim k_2(\lambda,\mathfrak{f}) \iff \mathrm{Ad}(k_1)\mathfrak{f} = \mathrm{Ad}(k_2)\mathfrak{f} \text{ かつ } \mathrm{Ad}'(k_1)\lambda|_{\mathrm{Ad}(k_1)\mathfrak{f}} = \mathrm{Ad}'(k_2)\lambda|_{\mathrm{Ad}(k_2)\mathfrak{f}}$$

で与え その同値類を $[K(\lambda,\mathfrak{f})]$ と表わす。$(\lambda,\mathfrak{f})$を有理対とし
$Q(\lambda,\mathfrak{f})=\{[K(\lambda,\mathfrak{f})]$: $K(\lambda,\mathfrak{f})$ は有理対なる集合を考える。
$(\lambda,\mathfrak{f})$が有理対なら $\delta(\lambda,\mathfrak{f})$ $(\delta\in\Delta)$ も有理対である。従ってΔ は $Q(\lambda,\mathfrak{f})$ に作用する。このとき $Q(\lambda,\mathfrak{f})$ 中の Δ－軌道の個数を $m_\Delta(\lambda,\mathfrak{f})$ とすると

$$m_\Delta(\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}) = m_\Delta(\lambda,\mathfrak{f})$$

が成立つ。Δ－軌道の代表系を $\{[K_j(\lambda,\mathfrak{f})] ; 1\leq j\leq m_\Delta(\lambda,\mathfrak{f})\}$ とし $A_{(\lambda,\mathfrak{f}),j} : \mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})} \to L^2(\Delta\backslash N)$ を

$$A_{(\lambda,\mathfrak{f}),j}(\phi)(n) = \sum_{\Delta\cap K_jHK_j^{-1}\backslash\Delta\ni\delta} \phi(K_j^{-1}\delta n)$$

で定めると $\{A_{(\lambda,\mathfrak{f}),j} : 1\leq j\leq m_\Delta(\lambda,\mathfrak{f})\}$ は $\mathrm{Hom}_N(\mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})}, L^2(\Delta\backslash N))$ の基底をなす。特に λ における polarization $\mathfrak{f}$ が $\mathfrak{n}$ に一致する場合 $\pi_{(\lambda,\mathfrak{n})}$ は1次元で $\pi_{(\lambda,\mathfrak{n})}=\psi_\lambda$ である。又 $m_\Delta(\psi_\lambda)>0$ となるのは $\psi_\lambda|\Delta=1$ のときで このとき $m_\Delta(\psi_\lambda)=1$ である。$\mathfrak{f}\neq\mathfrak{n}$ の場合は $\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}$ は ∞-dim. である。以上より

<u>定理</u>　$L^2(\Delta\backslash N)$の既約分解は次で与えられる。

$$L^2(\Delta\backslash N) = \bigoplus_{\substack{\psi_\lambda\in\hat{N}_{1\text{-dim.}}\\ \psi_\lambda|\Delta=1}} \mathbb{C}\psi_\lambda \oplus \bigoplus_{\substack{[\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}]\in\hat{N}_{\infty\text{-dim.}}\\ (\lambda,\mathfrak{f}):\text{有理対}}} \bigoplus_{1\leq j\leq m_\Delta(\lambda,\mathfrak{f})} A_{(\lambda,\mathfrak{f}),j}(\mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})})$$

又 $\mathfrak{H}_{(\lambda,\mathfrak{f})}$ の正規直交基を $\{\phi_k^{(\lambda,\mathfrak{f})} : k\geq 0\}$ とすると

$$\{\psi_\lambda\in\hat{N}_{1\text{-dim}} : \psi_\lambda|\Delta=1\} \cup \bigcup_{[\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}]\in\hat{N}_{\infty\text{-dim}},\ (\lambda,\mathfrak{f})\text{有理対}} \bigcup_{1\leq j\leq m_\Delta(\lambda,\mathfrak{f})} \{A_{(\lambda,\mathfrak{f}),j}(\phi_k^{(\lambda,\mathfrak{f})}) : k\geq 0\}$$

は $L^2(\Delta\backslash N)$ の基底をなす。

F を G 上の Γ-保型形式とする。$g\in G$ を固定し

$$\omega_F(g:\psi_\lambda)=\int_{\Delta\backslash N}F(ng)\overline{\psi_\lambda(n)}\,dn \qquad (\psi_\lambda\in\hat{N}_{1\text{-dim}}\ \ \psi_\lambda|\Delta=1)$$

及び $[\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}]\in\hat{N}_{\infty\text{-dim}}$ $(\lambda,\mathfrak{f})$:有理対, $1\le j\le m_\Delta(\lambda,\mathfrak{f})$, $k\ge 0$ に対し

$$\omega_F(g:(\lambda,\mathfrak{f}),j,k)=\int_{\Delta\backslash N}F(ng)\overline{A_{(\lambda,\mathfrak{f}),j}(\phi_k^{(\lambda,\mathfrak{f})})(n)}\,dn$$

とおけば次の展開を得る.

$$F(ng)=\sum_{\psi_\lambda\in\hat{N}_{1\text{-dim}}\ \psi_\lambda|\Delta=1}\omega_F(g:\psi_\lambda)\psi_\lambda(n)$$

$$+\sum_{\substack{[\pi_{(\lambda,\mathfrak{f})}]\in\hat{N}_{\infty\text{-dim}}\\(\lambda,\mathfrak{f}):\text{有理対}}}\ \sum_{j=1}^{m_\Delta(\lambda,\mathfrak{f})}\sum_{k\ge 0}\omega_F(g:(\lambda,\mathfrak{f}),j,k)A_{(\lambda,\mathfrak{f}),j}(\phi_k^{(\lambda,\mathfrak{f})})(n).$$

例1. $G=SL_3(\mathbb{R})$ 又は $GL_3(\mathbb{R})$, $\Gamma=SL_3(\mathbb{Z})$ $N=\{n(x_1,x_2,x_3):=\begin{bmatrix}1&x_1&x_3\\&1&x_2\\&&1\end{bmatrix}:x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ とする. $\Delta=\{n(m_1,m_2,m_3):m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}\}$ である。 $E_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\&0&0\\&&0\end{bmatrix}$, $E_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}$, $E_3=\begin{bmatrix}0&0&1\\&0&0\\&&0\end{bmatrix}$ とすれば N の Lie 環は $\mathfrak{n}=\mathbb{R}E_1\oplus\mathbb{R}E_2\oplus\mathbb{R}E_3$ である。$\mathfrak{n}^*$ と $\mathbb{R}^3$ を $\mathfrak{n}^*\ni\lambda\longmapsto(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ (但し $\lambda_i=\lambda(E_i)\ (1\le i\le 3)$) で同一視する。このとき $\hat{N}=\hat{N}_{1\text{-dim}}\cup\hat{N}_{\infty\text{-dim}}$ は次で与えられる。

$$\hat{N}_{1\text{-dim}}=\{\psi_{(\lambda_1,\lambda_2,0)};(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\},\quad \psi_{(\lambda_1,\lambda_2,0)}(n(x_1,x_2,x_3))=e^{2\pi i(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}$$

であり又 $\mathfrak{f}=\mathbb{R}E_2\oplus\mathbb{R}E_3$ として

$$\hat{N}_{\infty\text{-dim}}=\{[\pi_{(0,0,\lambda_3);\mathfrak{f}}]:\lambda_3\in\mathbb{R}-\{0\}\}$$

である。$\mathfrak{H}_{((0,0,\lambda_3),\mathfrak{f})}$ は $L^2(\mathbb{R})$ と同一視され $\pi_{((0,0,\lambda_3),\mathfrak{f})}$ は

$$\pi_{((0,0,\lambda_3),\mathfrak{f})}(n(x_1,x_2,x_3))\phi(u) = e^{2\pi i\lambda_3(x_3+ux_2)}\phi(u+x_1) \qquad \phi\in L^2(\mathbb{R})$$

で与えられる。又 $m_\Delta(\psi_{(\lambda_1,\lambda_2,0)})>0 \iff (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{Z}^2$ であり $m_\Delta(\pi_{((0,0,\lambda_3),\mathfrak{f})})>0 \iff \lambda_3\in\mathbb{Z}-(0)$ が成立ち このとき $m_\Delta(\pi_{((0,0,\lambda_3),\mathfrak{f})}) = |\lambda_3|$ で与えられる。更に $0\leq j\leq|\lambda_3|-1$ に対し

$$A_{((0,0,\lambda_3),\mathfrak{f}),j}(\phi)(n(x_1,x_2,x_3)) = e^{2\pi i\lambda_3x_3}\sum_{m\in\mathbb{Z},\, m\equiv j\,(\mathrm{mod}\,\lambda_3)} e^{2\pi imx_2}\phi(x_1+m/\lambda_3)$$

(但し $\phi\in L^2(\mathbb{R})$)

であり $L^2(\mathbb{R})$ の正規底として $\{c_k e^{-\pi u^2}H_k(u)\,;\,k\geq 0\}$ (H_k は k 次エルミット多項式) をとれば 上の函数はテーター函数である。従って $G=SL_3(\mathbb{R})$ 上の $\Gamma=SL_3(\mathbb{Z})$-保型形式は テーター函数を用いて展開される。

<u>例2</u> $G=Sp(2,\mathbb{R})$, $\Gamma=Sp(2,\mathbb{Z})$ $N=\left\{\begin{bmatrix} I_2 & X\\ & I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & \\ & {}^tU^{-1}\end{bmatrix}\,;\, X=\begin{bmatrix} x_4 & x_3\\ x_3 & x_2\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix} 1 & x_1\\ & 1\end{bmatrix}\right\}$ (N は G の極小放物部分群の巾単基), $\Delta=\Gamma\cap N$,

$$E_1=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & 0 & \\ & & -1 & 0\end{array}\right],\ E_2=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & \\ & 0 & & 1\\ \hline & & 0 & \\ & & & 0\end{array}\right],\ E_3=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & & & 1\\ & 0 & 1 & \\ \hline & & 0 & \\ & & & 0\end{array}\right],\ E_4=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & & 1 & \\ & 0 & & 0\\ \hline & & 0 & \\ & & & 0\end{array}\right]$$

とすれば $\mathfrak{n}=\bigoplus_{1\leq i\leq 4}\mathbb{R}E_i$, $\mathfrak{n}^*\ni\lambda\longmapsto(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ を $\lambda_i=\lambda(E_i)$ $(1\leq i\leq 4)$ で与える。$\hat{N}=\hat{N}_{1\text{-dim}}\cup\hat{N}_{\infty\text{-dim}}$ は

$\hat{N}_{1\text{-dim}}=\{\psi_{(\lambda_1,\lambda_2,0,0)}\,;\,(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\}$, 又 $\mathfrak{f}=\mathbb{R}E_2\oplus\mathbb{R}E_3\oplus\mathbb{R}E_4$ として

$\hat{N}_{\infty\text{-dim}}=\{\pi_{((0,0,\lambda_3,0),\mathfrak{f})}\,;\,\lambda_3\in\mathbb{R}-(0)\}\cup\{\pi_{((0,\lambda_2,0,\lambda_4),\mathfrak{f})}\,;\,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \lambda_4\in\mathbb{R}-(0)\}$

で与えられる。$m_\Delta(\psi_{(\lambda_1,\lambda_2,0,0)})>0 \iff (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{Z}^2$; $m_\Delta(\pi_{((0,0,\lambda_3,0),\mathfrak{f})})>0 \iff \lambda_3\in\mathbb{R}-(0)$ このとき $m_\Delta(\pi_{((0,0,\lambda_3,0),\mathfrak{f})})=2|\lambda_3|$; $m_\Delta(\pi_{((0,\lambda_2,0,\lambda_4),\mathfrak{f})})>0$

$\Longleftrightarrow$ $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$, $\lambda_4 \in \mathbb{Z}-(0)$, このとき $m_\Delta(\pi_{(0,\lambda_2,0,\lambda_4)}, \mathfrak{f}) = \#\{0 \leq j \leq |\lambda_4|-1;\ j^2 \equiv 0 \mod \lambda_4\}$ でよえられる。表現空間 $\mathfrak{H}_{((0,0,\lambda_3,0),\mathfrak{f})}$ 及び $\mathfrak{H}_{((0,\lambda_2,0,\lambda_4),\mathfrak{f})}$ は共に $L^2(\mathbb{R})$ と同一視され Intertwining 作用素は夫々

$$A_{((0,0,\lambda_3,0),\mathfrak{f}),j}(\phi)\left(\begin{bmatrix} I_2 & X \\ & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & \\ & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}\right) = e^{2\pi i \lambda_3 x_3} \sum_{m \in \mathbb{Z},\, m \equiv j \pmod{2\lambda_3}} e^{\pi i m x_2} \phi(x_1 + m/2\lambda_3)$$

$(0 \leq j < 2|\lambda_3|)$ 及び

$$A_{((0,\lambda_2,0,\lambda_4),\mathfrak{f}),j}(\phi)\left(\begin{bmatrix} I_2 & X \\ & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & \\ & {}^tU^{-1} \end{bmatrix}\right) = \exp(2\pi i(\lambda_2 x_2 + \lambda_4 x_4)) \sum_{m \in \mathbb{Z},\, m \equiv j \mod (\lambda_4)}$$
$$\exp 2\pi i(\lambda_4^{-1} m^2 x_4 + 2m x_3)\, \phi(x_1 + m/\lambda_4)$$

でよえられる。

以下 $\psi_\lambda \in \hat{N}_{1\text{-dim}}$ に対する"Fourier 係数"

$$w_F(g : \psi_\lambda) = \int_{\Delta\backslash N} F(ng)\overline{\psi_\lambda(n)}\, dn$$

について考察する。$w_F(g : \psi_\lambda)$ は

① $w_F(ng : \psi_\lambda) = \psi_\lambda(n)\, w_F(g : \psi_\lambda)$ $(n \in N)$ かつ右K−有限

② $(Z w_F)(g : \psi_\lambda) = \chi(Z)\, w_F(g : \psi_\lambda)$ $(Z \in \mathcal{U}^K)$

③ $|(D w_F)(g : \psi_\lambda)| \leq C' \|g\|^r$ $(D \in \mathcal{U})$

を満たす事は容易である。これらの条件をみたす G 上の関数の性質を調べようというのが問題である。以下性質①, ②をみたす G 上の関数を G 上の Whittaker 関数と呼ぶ。

4°) G 上の Whittaker 関数.

以下 N は G の極小放物型部分群 P の巾単基, 従って

Gの最大巾零単連結部分群とする。$P=NAM$をLanglands分解とするとAはGの半単純元からなる最大vector部分群である。GのLie環を$\mathfrak{g}$, AのLie環を$\mathfrak{a}$とし$\mathfrak{g}$の$\mathfrak{a}$に関するルート全体をΣで表わす. ルートαに対するルート空間を$\mathfrak{g}^\alpha$と書く. 正のルートの集合Σ^+を$\mathfrak{n}=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}^\alpha$となるように定める. 対応する単純ルートの集合を$\Pi$で表わす. ルート系$\Sigma$のワイル群を$W$で表わす. $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell\}$とする。

<u>定義</u> Nの1次元ユニタリ表現ψ_λが非退化とはλの各単純ルート空間$\mathfrak{g}^\alpha$への制限λ_αがnon-zeroのときを言う。

以下非退化指標の場合に限る. というのは1般の指標の場合はより次元の低い群に於ける非退化指標の話に帰着するからである。KをGの極大コンパクト部分群とし右K-不変なWhittaker関数を扱う。$\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$($=\mathfrak{a}$の複素双対空間)は$\mathfrak{U}^K$から$\mathbb{C}$へのalgebra準同型$\chi_\nu$を定める. しかも$\chi_{s\cdot\nu}=\chi_\nu$ (各$s\in W$) である事が知られている。そこで

$$C^\infty(G/K;\chi_\nu,\psi_\lambda)=\{w\in C^\infty(G);\ w(ngk)=\psi_\lambda(n)w(g),\ Zw=\chi_\nu(Z)w\ \ Z\in\mathfrak{U}^K\}$$

とおき$C^\infty(G/K:\chi_\nu,\psi_\lambda)$の元を右$K$-不変Whittaker関数と呼ぶ.

<u>定理</u> $\dim C^\infty(G/K:\chi_\nu,\psi_\lambda)=|W|$ ($=$ワイル群Wの位数) 更に

$$\dim\{w\in C^\infty(G/K:\chi_\nu,\psi_\lambda);\ 増大度条件\ |Dw(g)|\leq C\|g\|^r\ (D\in\mathfrak{U})\}\leq 1.$$

以下右K-不変Whittaker関数の構成について述べる。岩沢分

解 $G=NAK$ を考慮すれば G 上の Whittaker 関数はその A 上での値を決めればよい。$L^+=\{m=\sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i : m_i\in\mathbb{Z}_+\}$ とする。各 $m\in L^+$ に対し $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上の有理関数 $A_m(\nu)$ を $A_0(\nu)=1$,

$$(\langle\nu,m\rangle+\langle m,m\rangle)A_m(\nu)=\sum_{1\le i\le l}A_{m-\alpha_i}(\nu),\quad m\in L^+-(0)$$

なる漸化式の解とする。$A_m(\nu)$ は1意的である。$\rho\in\mathfrak{a}^*$ を $\rho=2^{-1}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}m_\alpha\alpha$ (但し $m_\alpha=\dim\mathfrak{g}^\alpha$) で与える。$\xi\in\mathfrak{a}$ とし A 上の関数を

$$V(\exp\xi:\nu,\psi_\lambda)=e^{(\nu+\rho)(\xi)}\sum_{m\in L^+}(2\pi^2)^{\sum m_i}\prod_{i=1}^{l}\|\lambda_{\alpha_i}\|^{2m_i}A_m(\nu)e^{2m(\xi)}$$

で定義する。これを G 上の関数に $V(nak:\nu,\psi_\lambda)=\psi_\lambda(n)V(a:\nu,\psi_\lambda)$ で延長する。$\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ が1般の位置にあるとき

定理 $\{V(g:s\nu,\psi_\lambda):s\in W\}$ は Whittaker 関数の空間 $C^\infty(G/K,\chi_\nu,\psi_\lambda)$ の基底をなす.

例1 ルート系 Σ が (A_2) 型の場合 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle=2$ と正規化する。又 $\nu_{\alpha_i}=\langle\nu,\alpha_i\rangle/\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle$ $(i=1,2)$ とおく。このとき $A_m(\nu)=A_{m_1\alpha_1+m_2\alpha_2}(\nu)$ は具体的に次で与えられる.

$$A_m(\nu)=\frac{\prod_{k=1}^{m_1+m_2}(\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}+k)}{2^{m_1+m_2}m_1!\,m_2!\prod_{k=1}^{m_1}(\nu_{\alpha_1}+k)\prod_{k=1}^{m_2}(\nu_{\alpha_2}+k)\prod_{k=1}^{m_1}(\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}+k)\prod_{k=1}^{m_2}(\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}+k)}$$

例2 G が実階数1のとき $\Sigma=\{\pm\alpha,\pm2\alpha\}$, $\Pi=\{\alpha\}$, $\langle\alpha,\alpha\rangle=2$ と正規化する. このとき $A_{m\alpha}(\nu)=\left(2^m m!\prod_{k=1}^{m}(\nu_\alpha+k)\right)$ $(m\in\mathbb{Z}_+)$ 従って

$$V(\exp\xi:\nu,\psi_\lambda)=\Gamma(\nu_\alpha+1)(\pi\|\lambda_\alpha\|)^{-\nu_\alpha}(e^{\alpha(\xi)})^{2^{-1}m_\alpha+m_{2\alpha}}I_{\nu_\alpha}(2\pi\|\lambda_\alpha\|e^{\alpha(\xi)}).$$

ここに　$I_\nu(z)$ は第1種変形Bessel関数である。
増大度条件 ③ を満たすWhittaker関数は次の積分で与えられる(＝Whittaker積分)関数である。

$$W(g:\nu,\psi_\lambda) = \int_N 1_\nu(s_0^{-1}ng)\overline{\psi_\lambda(n)}\,dn$$

ここに $s_0 \in W$ (最長元)，又 G 上の関数 1_ν は岩沢分解を用いて　$1_\nu(nak) = \exp(\nu+\rho)(\log a)$ で与えられる。

<u>定理</u> (i) $W(g:\nu,\psi_\lambda)$ は ν に関し整関数で $g\in G$ の関数として $C^\infty(G/K;\nu,\psi_\lambda)$ に属しかつ増大度条件③をみたす。
(ii) 各 $s\in W$ に対し ν の有理型関数 $M(s,\nu,\psi_\lambda)$ が存在して関数等式

$$W(g:\nu,\psi_\lambda) = M(s,\nu,\psi_\lambda)\,W(g:s\nu,\psi_\lambda)$$

が成立つ。
(iii) $W(g:\nu,\psi_\lambda)$ は基底 $\{V(g:s\nu,\psi_\lambda) : s\in W\}$ を用いて

$$W(g:\nu,\psi_\lambda) = \sum_{s\in W} M(s_0 s,\nu,\psi_\lambda)\,C(s_0 s\nu)\,V(g:s\nu,\psi_\lambda)$$

と書ける。
ここに $C(\nu)$ はHarish-Chandraの C－関数と呼ばれる。$C(\nu)$ 及び $M(s,\nu,\psi_\lambda)$ は具体的に Γ－関数の積で表わされる。

例1、G：実階数1のとき

$$W(\exp\xi:\nu,\psi_\lambda) = d(\nu)\left(e^{\alpha(\xi)}\right)^{2^{-1}m_\alpha+m_{2\alpha}} K_{\nu_\alpha}\left(2\pi\|\lambda_\alpha\|e^{\alpha(\xi)}\right)$$

但し $K_\nu(z)$ は才2種 ~~Bessel 関数~~ 変形 Bessel 関数，又

$$d(\nu)=\frac{2^{-(\nu_\alpha+m_\alpha/2+m_{2\alpha}-2)}\pi^{\nu_\alpha+(m_\alpha+m_{2\alpha}+1)/2}\|\lambda_\alpha\|^{\nu_\alpha}}{\Gamma(2^{-1}(\nu_\alpha+m_\alpha/2+1))\,\Gamma(2^{-1}(\nu_\alpha+m_\alpha/2+m_{2\alpha}))}$$

である。

例2. $G=GL_3(\mathbb{F})$ 但し $\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ $d=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F}=1,2,4.$

この場合

$$W(\exp q\cdot \nu,\psi_\lambda)=\frac{2^2\,\pi^{2(\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2})+3d/2}(\|\lambda_{\alpha_1}\|\,\|\lambda_{\alpha_2}\|)^{\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}}}{\Gamma(\nu_{\alpha_1}+d/2)\,\Gamma(\nu_{\alpha_2}+d/2)\,\Gamma(\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}+d/2)}$$

$$\times e^{(s_0\nu+\rho+(\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2})(\alpha_1+\alpha_2))(q)}\int_0^\infty K_{\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}}(e^{\alpha_1(q)}2\pi\|\lambda_{\alpha_1}\|(1+r^{-1})^{1/2})K_{\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}}(e^{\alpha_2(q)}2\pi$$

$$\|\lambda_{\alpha_2}\|(1+r)^{1/2})\,r^{(\nu_{\alpha_2}-\nu_{\alpha_1})/2}\,d^\times r$$

(II) 物理に登場する Whittaker 関数 ‥(量子戸田格子)

1直線上 n 個の同一粒子が 相互作用をしながら運動している量子系で 相互作用を記述する Hamiltonian が

$$\mathbb{H}=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}+\sum_{j=1}^{n-1}\eta_j^2\,e^{2(q_j-q_{j+1})}\quad(\text{on } L^2(\mathbb{R}^n))$$

で与えられる系を量子戸田格子という。ここに $q_1,\cdots,q_n$ は n 個の粒子の位置座標を表わす。又 $\eta_1^2,\cdots,\eta_{n-1}^2>0$ は結合定数である。$(n-1)$ 個の零でない結合定数の組 $(\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})=\eta$ を用いて $GL_n(\mathbb{R})$ の極大巾零部分群 $N=\left\{\begin{bmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ の

非退化指標 ψ_η が $\psi_\eta\left(\begin{bmatrix}1 & x_{ij} \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\exp\left(\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n-1}\eta_j x_{j,j+1}\right)$ で定義できる。又 $\mathbb{R}^n \ni (q_1,\cdots,q_n)$ と $\mathfrak{a}=\{\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_n)\}$ を同一視する ここに $\mathfrak{a}$ は $GL_n(\mathbb{R})$ の極大 $\mathbb{R}$-split torus A の Lie 環である。

$W(g:\nu,\psi_\eta)$ を $GL_n(\mathbb{R})$ 上の(K-不変)Whittaker 関数で増大度条件③をみたすものとする。$\mathfrak{a}$ 上の関数 $K(q:\nu,\psi_\eta)$ を

$$K(q:\nu,\psi_\eta)=e^{-\rho(q)}W(\exp q:\nu,\psi_\eta) \qquad (q\in\mathfrak{a})$$

で定義しよう

<u>定理</u> (i) $\mathbb{H}$ は $L^2(\mathbb{R}^n)=L^2(\mathfrak{a})$ 上の正値自己共役作用素.

(ii) $\mathbb{H}K(q:i\nu,\psi_\eta)=\frac{1}{2}\|\nu\|^2 K(q:i\nu,\psi_\eta) \qquad \nu\in\mathfrak{a}^*\cong\mathbb{R}^n$).

(iii) $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$(\mathcal{K}f)(\nu)=\int_{\mathbb{R}^n} f(q)\overline{K(q:i\nu,\psi_\eta)}\,dq$$

とおくと 1般固有関数展開

$$f(q)=\int_{\mathbb{R}^n/\mathfrak{S}_n}(\mathcal{K}f)(\nu)K(q:i\nu,\psi_\eta)\,|c(\nu)|^{-2}d\nu$$

をうる。

(iv) $\mathbb{H}$ のスペクトルは連続で $\sigma(\mathbb{H})=[0,+\infty)$

(注) $|c(\nu)|^{-2}=\left|\prod_{1\le i<j\le n}(\nu_i-\nu_j)\tanh\pi(\nu_i-\nu_j)/2\right|$

これまで~~述べた~~述べた事は 1般にルート系に付随した量子戸田格子の場合にも同様に成立つが 紙数が尽きたので省略する。