数理解析研究所講究録
第 631 巻 1987 年 138-149

Laplacian の spectre と Selberg zeta 関数

福山大教養　若山正人（Masato Wakayama）

$G = SL(2.\mathbb{R})$, $K = SO(2)$, $H = G/K$（上半平面）とする。Γ を G の discrete torsion free な部分群で $\Gamma\backslash G$ が compact なものとする。Γ の有限次元ユニタリー表現 T に付随した Selberg zeta 関数とは，その対数微分 $\psi_\Gamma(s.\chi)$（χ は T の指標）が $\mathrm{Re}\, s > 1$ で絶対かつ一様収束する級数

$$\psi_\Gamma(s.\chi) = \sum_{\gamma \in C_\Gamma \setminus \{1\}} \chi(\gamma)\, u_\gamma\, j(\gamma)^{-1} C(\gamma) \exp\left(\tfrac{1}{2} - s\right) u_\gamma$$

で与えられるものであった。ここで，C_Γ は Γ の元の Γ 共役類の全体，u_γ は γ（$\gamma \neq 1$ のときすべて双曲的）の定める測地流の長さ，$j(\gamma)$ は γ を primitive な元のベキで書いたときの exponent（正整数），$C(\gamma)$ は正の量である。詳くは［1］，［3］等を見られたい。

ψ_Γ の主な性質としては次の様なものがある。

(i) 有理型関数として全平面に解析接続できる。(ii) 極はすべて1位で，それ等は次の2種類から成る：① 自明な極：そ

の位置や留数はexplicite に計算できる。② 非自明な極：その位置及び留数は Laplacian の固有値及びその重複度に対応する。更に区間 (0.1) に含まれる有限個の例外を除いて，それらはすべて $\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}$ の所に分布する。(iii) 関数等式が成立。

本稿の目的は，trace formula に具体的な関数を apply することにより，より直接的に（この意味については後述する）以上の諸性質を示すことである。

§1. 定理とそれから分かること

Δ を $\Gamma\backslash H$ の Laplacian とし，$0\leqq\lambda_0(\chi)\leqq\lambda_1(\chi)\leqq\cdots$ を $\Delta F+\lambda F=0$ （$F(\gamma x)=\chi(\gamma)F(x)$，$\gamma\in\Gamma$. $x\in H$）の固有値達とする。$m_{j.\chi}$ を $\lambda_j(\chi)$ の重複度，さらに $r_{j.\chi}\,(\in\sqrt{-1}\,[0.\frac{1}{2}]\cup\mathbb{R}_+)$ を $\lambda_j(\chi)=\frac{1}{4}+r_{j.\chi}^2$ で定まる数とする。$A=\mathrm{area}(\Gamma\backslash H)$ とおく。

定理 $\Psi_\Gamma(p+\frac{1}{2}.\chi)$ は $p=\frac{1}{2}$ で高々１位の極を持ち，そこでの留数を a_χ とすると次の等式が成立する。

$$\cot\pi p\,\Psi_\Gamma(p+\tfrac{1}{2}.\chi)+\pi a_\chi+\frac{2}{\pi}(p^2-\tfrac{1}{4})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(p^2-n^2)(\frac{1}{4}-n^2)}\Psi_\Gamma(n+\tfrac{1}{2}\chi)$$

$$=\frac{\chi(1)A\pi}{2}(p-\tfrac{1}{2})-2(p^2-\tfrac{1}{4})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_{n.\chi}\,r_{n.\chi}\coth(\pi r_{n.\chi})}{(p^2+r_{n.\chi}^2)(\frac{1}{4}+r_{n.\chi}^2)}\quad(p\in\mathbb{C}).$$

ここで両辺に現れる級数は，０でない整数点及び数列

$\{\sqrt{-1}\, r_{n,x}\}$ にタッチしない任意の compact 集合上で p に関し一様収束し、$\psi_\Gamma(p+\frac{1}{2}, x)$ の有理型関数としての解析接続を与えている。

注意 1. 実際には $a_x = n_{0,x}$ となるのだが、我々の証明方法では残念ながら得られないようである。

系 1. 関数等式が成立する：

$$\psi_\Gamma\left(p+\frac{1}{2}, x\right) + \psi_\Gamma\left(-p+\frac{1}{2}, x\right) = \chi(1) A \pi p \tan \pi p \, .$$

証明は定理の式で $p \to -p$ として辺々引けばよい。

系 1 で $p \to -m+\frac{1}{2}$ ($m \geqq 0$, 整数) として留数をとれば、自明な極についての情報が得られ、定理で $p \to \sqrt{-1}\, r_{n,x}$ として留数をとれば非自明な極についての情報が得られる。

さらに、例えば $p \to m+\frac{1}{2}$ (m：正整数) とすれば、次のような $\psi_\Gamma(s, x)$ の半整数点での値の和と spectre についての和の関係式が得られる。

$$\frac{\pi a_x}{2m(m+1)} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, \psi_\Gamma(n+\frac{1}{2}, x)}{\{(m+\frac{1}{2})^2 - n^2\}(\frac{1}{4} - n^2)}$$

$$= \frac{\chi(1) A \pi}{4(m+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{n,x}\, r_{n,x} \coth(\pi r_{n,x})}{\{(m+\frac{1}{2})^2 + r_{n,x}^2\}(\frac{1}{4} + r_{n,x}^2)} \, .$$

注意2.　ψ_r に関する性質を見い出す為の方法として，元来のものと我々のものとを比較すると次のようになる。

元来の方法	今の方法
$\boxed{\text{ある種の“不定性”を持った関数}}$	$\boxed{\text{Hの Plancherel 測度から決まる具体的な関数}}$
⇩　trace formula に apply	⇩
$\boxed{\text{解析接続（極の情報）}}$	$\boxed{\text{定理の公式}}$
⇩　留数計算	↑ すべての情報を含んでいる
$\boxed{\text{関数等式}}$	

このような意味で先程“直接的”という言葉を用いた。

§2.　定理の証明

まず我々の道具である trace formula について述べる。

Fが複素1変数の関数で (i) $F(r)=F(-r)$, (ii) $\exists\,\varepsilon>0$ s.t. Fは $\{|\mathrm{Im}\,r|<\frac{1}{2}+\varepsilon\}$ で正則，(iii) Fは $\{|\mathrm{Im}\,r|<\frac{1}{2}+\varepsilon\}$ で急減少，なる条件を満たすときFは trace formula に apply 可能でその形は次のようになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{n,\chi} F(r_{n,\chi}) = \frac{1}{4}\chi(1)A\int_{-\infty}^{\infty} F(r)\, r\tan\pi r\, dr + \sum_{\gamma\in \Gamma\setminus\{1\}} \varepsilon_{\gamma,\chi} F^{*}(u_{\gamma}) .$$

ここで　$\varepsilon_{\gamma,\chi} = \chi(\gamma) u_{\gamma} j(\gamma)^{-1} C(\gamma)$,

$$F^*(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(r)\, e^{iru}\, dr \qquad (i=\sqrt{-1})$$

とおいた。

Fとして我々は　$F_t(r) = \pi r \coth \pi r\, e^{-r^2 t}$ $(t>0)$ をとる（F_tはもちろん先の条件を満たしている）。trace formula に apply すると　$F_t(\frac{i}{2})=0$ だから

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty} m_{n,\chi}\, r_{n,\chi} \coth(\pi r_{n,\chi})\, e^{-r_{n,\chi}^2 t} - \frac{\pi}{4}\chi(1) A \int_{-\infty}^{\infty} r^2 e^{-r^2 t}\, dt$$

$$= \sum_{\gamma\in G\setminus\{1\}} \varepsilon_{\gamma,\chi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi r \coth(\pi r)\, e^{-r^2 t}\, e^{iru_\gamma}\, dr\right\}$$

$t>0$ のとき両辺の級数は絶対収束しているので，その値を $\theta_\chi(t)$ と記すことにする。

$$\sum_{r_{n,\chi}\neq 0} \frac{m_{n,\chi}}{|r_{n,\chi}|^k} < \infty \quad (k>2=\dim(\Gamma\backslash H))$$

が知られているので　$p>\frac{1}{2}$ のとき $\theta_\chi(t)$ に $te^{-p^2 t}$ をかけたものを $[0,\infty)$ で積分すると，Lebesgue の収束定理より左辺は項別積分可能で

$$\int_0^{\infty} t\,\theta_\chi(t)\, e^{-p^2 t}\, dt = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_{n,\chi}\, r_{n,\chi}\coth(\pi r_{n,\chi})}{(r_{n,\chi}^2+p^2)^2} - \frac{\chi(1) A\pi^2}{8p} \quad \text{—①}$$

が得られる。ここで，公式

$$\int_0^\infty t^\nu e^{-at}\,dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+1}} \quad (a>0)$$

を用いた。① の級数は，分母が0になる点を除いたところで絶対かつ広義一様収束しているから，p の有理型関数を与えている。

次に右辺について考えてみる。

$|\varepsilon|<\frac{1}{4}$ なる実数 ε に対して

$$F_t^*(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \pi r \coth(\pi r)\, e^{-r^2 t} e^{iru}\,dr \quad (u>0)$$

に $e^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)u}$ をかけたものを Euclid 空間における急減少関数の Paley-Wiener 型定理の証明のように，積分路を実軸から $\mathrm{Im}\, r = \frac{1}{2}+\varepsilon$ 迄 shift して評価すると

$$\sup_{u>0} \left| F_t^*(u)\, e^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)u} \right| \leqq {}^{\exists}C \max\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right) e^{t(\frac{1}{2}+\varepsilon)^2}$$

$(t>0)$ が得られる。

よって $\varepsilon>0$ とすると

$$|\text{右辺の}\ \theta_\chi(t)| \leqq C \max\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right) e^{t(\frac{1}{2}+\varepsilon)^2} \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{1\}} |\varepsilon_{\gamma,\chi}|\, e^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)u_\gamma}$$

$$\leqq C \max\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}\right) e^{t(\frac{1}{2}+\varepsilon)^2} \chi(1)\, \Psi_\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon, 1\right)$$

を得る。ただし $\mathbb{1}$ は Γ の trivial character である。

正なる ε を十分小にとれば、Lebesgue の収束定理によって $1 > p > \frac{1}{2} + 2\varepsilon$ のとき

$$\int_0^\infty t\theta_\chi(t)e^{-p^2t}dt$$

$$= \sum_{r \in C_\Gamma \setminus \{1\}} \varepsilon_{r,\chi} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \pi r \coth(\pi r) e^{-r^2t} e^{iru_\gamma} dr \right\} te^{-p^2t}dt .$$

ところで

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty |\pi r \coth \pi r\, e^{-r^2t} e^{iru}\, te^{-p^2t}|\, dt\, dr$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{\pi r \coth \pi r}{(p^2+r^2)^2} dr < \infty$$

だから、Fubini の定理より積分の順序交換が許されて

$$\int_0^\infty t\theta_\chi(t)e^{-p^2t}dt$$

$$= \sum_{r \in C_\Gamma \setminus \{1\}} \varepsilon_{r,\chi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\pi r \coth(\pi r)}{(p^2+r^2)^2} e^{iru_\gamma} dr$$

が得られた。ここで部分分数展開

$$\pi r \coth(\pi r) = 1 + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{r^2}{r^2+n^2}$$

を用いると

$$\frac{\pi r\coth(\pi r)}{(p^2+r^2)^2} = \frac{1}{(p^2+r^2)^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^2}{(r^2+n^2)(p^2+r^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(p^2+r^2)^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2}{(n^2-p^2)^2(r^2+p^2)}\right.$$

$$\left. - \frac{p^2}{(n^2-p^2)(r^2+p^2)^2} - \frac{n^2}{(n^2-p^2)^2(r^2+n^2)}\right\}$$

と書ける。ところで $u>0$ のとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixu}}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2a}e^{-au}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixu}}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{4a^3}(au+1)e^{-au}$$

であるから，再度 Lebesgue の収束定理を用いると項別積分が出来て

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi r\coth(\pi r)}{(p^2+r^2)^2}e^{iru}dr$$

$$= \frac{1}{4p^3}(pu+1)e^{-pu} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2-p^2)^2}\frac{1}{2p}e^{-pu}$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^2}{(n^2-p^2)}\frac{1}{4p^3}(pu+1)e^{-pu} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2-p^2)^2}\frac{1}{2n}e^{-nu}$$

$$= \frac{1}{4p}\left\{\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2p}{p^2-n^2}\right\}ue^{-pu} - \frac{1}{4p}\frac{d}{dp}\left\{\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2p}{p^2-n^2}\right\}e^{-pu}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-p^2)^2}e^{-nu}$$

$$= -\frac{\pi}{4p}\frac{d}{dp}\left\{\cot\pi p\, e^{-pu}\right\} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-p^2)^2}e^{-nu}$$

が分かる。

一方 $\psi_r(p+\frac{1}{2}, x)$ は $\mathrm{Re}\, p > \frac{1}{2}+2\varepsilon$ で絶対かつ一様収束する級数で与えられているから，p に関して項別微分可能であること，及び $^{\forall}\gamma\ (\neq 1)$ に対して $0 < \varepsilon_0 \leqq u_\gamma$ なる ε_0 の存在が知られているから，不等式

$$\left|\psi_r(n+\tfrac{1}{2}, x)\right| \leqq x(1)\left|\psi_r(n+\tfrac{1}{2}, 1)\right|$$
$$\leqq x(1)\,\psi_r(\tfrac{3}{2}, 1)\, e^{-\varepsilon_0(n-1)}$$
(n：正整数)

より無限和の順序交換が可能なことに注意すると，その結果

$$\int_0^{\infty} t\,\theta_x(t)\, e^{-p^2 t}\, dt$$
$$= -\frac{\pi}{4p}\frac{d}{dp}\left\{\cot\pi p\ \psi_r(\tfrac{1}{2}+p, x)\right\} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-p^2)^2}\psi_r(\tfrac{1}{2}+n, x)$$
——②

を得る。①②より

$$\frac{d}{dp}\left\{\cot\pi p\ \psi_r(\tfrac{1}{2}+p, x)\right\} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4pn}{(n^2-p^2)^2}\psi_r(\tfrac{1}{2}+n, x)$$

$$= \frac{x(1)A\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4p\, m_{n,x}\, r_{n,x}\coth(\pi r_{n,x})}{(r_{n,x}^2+p^2)^2} \quad \text{——③}$$

が得られた。③式は $\frac{d}{dp}\{\cot\pi p\, \Psi_\Gamma(\frac{1}{2}+p.x)\}$ の有理型関数としての全平面への解析接続を与える関係式と見做せる。また $\cot\pi p$ は $p=\frac{1}{2}$ で1位の零点を持つから、$\Psi_\Gamma(\frac{1}{2}+p.x)$ は $p=\frac{1}{2}$ で高々1位の極を持つことが分かる。そこで $\Psi_\Gamma(\frac{1}{2}+p.x)$ の $p=\frac{1}{2}$ での極の留数を a_x（極でなければ $a_x=0$ とする）とすると

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \cot\pi p\, \Psi_\Gamma(\tfrac{1}{2}+p.x) = -\pi a_x$$

だから $0<p<\frac{1}{2}$ として

$$\int_{\frac{1}{2}}^{p} \frac{d}{dp}\{\cot\pi p\, \Psi_\Gamma(\tfrac{1}{2}+p.x)\}dp = \cot\pi p\, \Psi_\Gamma(\tfrac{1}{2}+p.x)+\pi a_x$$

となる。更に

$$\int_{\frac{1}{2}}^{p} \frac{p}{(p^2+r^2)^2}dp = \frac{p^2-\frac{1}{4}}{2(p^2+r^2)(\frac{1}{4}+r^2)}$$

等を用いると、両辺の級数部分は項別積分出来るから定理の公式を得る。

§3. 補足

我々が trace formula に apply した関数は

$$F_t(r) = \pi r \coth\pi r\, e^{-r^2 t} \qquad (t>0)$$

であった。 G/K が一般の rank 1 の non-compact 対称空間のときに Plancherel measure が $P(r)\tanh\pi r$ or $P(r)\coth\pi r$ or $P(r)$ ($G=SO_0(2n+1,1)$ のとき)(但し、$P(r)$ は degree が $\dim(G/K)-1$ の多項式)の形で与えられていたことを思い出すと $F_t(r)$ として、それぞれ $P(r)^2\coth\pi r$, $P(r)^2\tanh\pi r$, $P(r)^2$ $\times$ e^{-r^2t} $(t>0)$ を考えれば同様の議論が行える。ただし、このときは $\int_0^\infty t\,\theta_x(t)e^{-\rho^2 t}dt$ のかわりに $\int_0^\infty t^{\frac{\dim(G/K)}{2}}\theta_x(t)e^{-\rho^2 t}dt$ とするべきである。詳細については、他の機会に述べたいと思う。

文　献

[1] R. Gangolli, Zeta function of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one, Illinois J. Math. 21 (1977), 1-41.

[2] M. Kuga, 弱対称リーマン空間における位相解析とその応用, 数学 vol. 9 (1958), 166-185.

[3] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous subgroups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., 20 (1956), 47-48.

[4] N. Wallach, An asymptotic formula of Gelfand and Gangolli for the spectrum of $\Gamma \backslash G$, J. Differential Geometry, 11 (1976), 91-101.

[5] M. Wakayama, Zeta functions of Selberg's type associated with homogeneous vector bundles, Hiroshima Math. J., 15 (1985), 235-295.