数理解析研究所講究録
第631巻 1987年 205-234

特異点の解消と Igusa local zeta-functions

筑波大 数学系 木村達雄(Tatsuo KIMURA)

K = p-adic field $\supset O_K \supset \pi O_K$, $\mathbb{F}_q = O_K/\pi O_K$ (q=odd, を仮定する), $U_K = O_K - \pi O_K$: units, として $|\ |_K$ で K の絶対値で $|\pi|_K = q^{-1}$ となるものを表わす.
($\Rightarrow O_K = \{x \in K ; |x|_K \leq 1\}$, $\pi O_K = \{x \in K ; |x|_K < 1\}$, $U_K = \{x \in K ; |x|_K = 1\}$)

dx : K^n 上の Haar measure で $vol(O_K^n) = \int_{O_K^n} dx = 1$ なるものとする。

$f(x) \in O_K[x_1, \cdots, x_n]$ に対して,

$Z(s) \overset{def}{=} \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx$ を考えると, これは

$t = q^{-s}$ の有理関数になることが知られている(J. Igusa).
J.P. Serre により, $Z(s)$ は Igusa local zeta function と名付けられた。 本論の目的は与えられた $f(x)$ に対し $Z(s) = \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx$ の計算法を考えることである。

一番簡単な例は次のように直接計算できる。

Proposition 1. $\displaystyle\int_{O_K}|x|_K^s\,dx=\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-(s+1)}}\left(=\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-1}t}\right)$

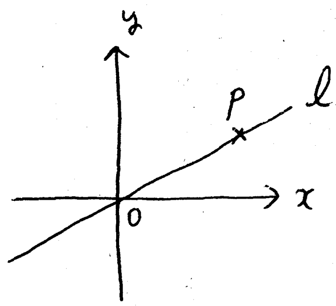
Proof) $\displaystyle\int_{O_K}|x|_K^s\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\pi^kU_K}|x|_K^s\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k(s+1)}\int_{U_K}dx$

$\displaystyle=\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-(s+1)}}\quad(d(\pi^kx)=q^{-k}dx,\ vol(U_K)=1-q^{-1})$ //

我々の基本的な考えは特異点の解消(resolution of singularity of $\{f=0\}$)を用いて，一般の $Z(s)$ の計算を Prop. 1 へ帰着させようというものである。

そこで <u>blowing up</u> とは何かを簡単に復習してみよう。

$n=2$ の場合，$\mathbb{A}^2=\{(x,y)\}$ の原点 $\{(0,0)\}$ に関する blowing up とは，原点を通る直線 l と，l 上の点 P の組 (P,l) 全体を考えることである。$\{(P,l)\}$.



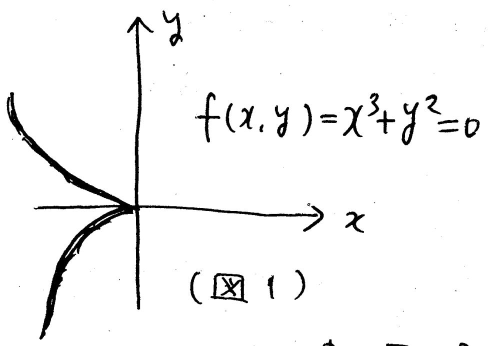
$P\neq 0$ なら，l は原点 0 と P を結ぶ直線として unique に定まるから $\{(P,l)\,;\,P\neq 0\}\cong\mathbb{A}^2-\{(0,0)\}$ であるが，$P=0\,(=(0,0))$ のところでは l は自由，即ち $\{l: tx-uy=0\}=\{(t:u)\}=\mathbb{P}^1$ となり blowing up $\{(P,l)\}$ は原点 $(0,0)$ のかわりに $\mathbb{P}^1$ を入れ

たようなもの（即ち原点Oを$\mathbb{P}^1$にふくらましたもの）である。

$\{(p, l)\}$に於て $l \neq \{x=0\}$ （$\Rightarrow u \neq 0$; $y = \frac{t}{u}x$ ）のところで考えると，l は $y = \frac{t}{u}x$ と表わされ，l上の点pは，x座標で unique に定まるから，そこでの局所座標として $(x, \frac{t}{u})$ をとることができる。

そこで $\lambda = x$, $\frac{t}{u} = y'$ とおくと，そこでは

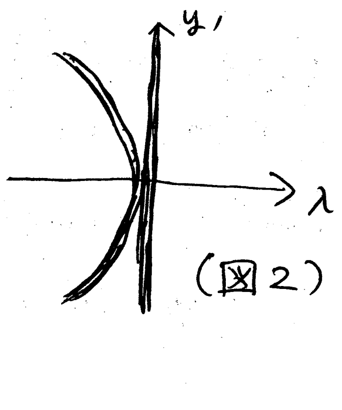
$(x, y) = (\lambda, \lambda y')$ となっている。



(図1)

例として cusp の場合，即ち $f(x, y) = x^3 + y^2 = 0$ を考えてみよう。これは原点のみに singularity をもっている（$f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$ ）が 原点を blowing up した$\{(p, l)\}$の $l \neq \{x=0\}$ なる部分の局所座標 (λ, y') でみてみると

$f(x, y) = x^3 + y^2 = \lambda^3 + (\lambda y')^2 = \lambda^2(\lambda + y'^2) = 0$ となり，$f=0$ の singularity は

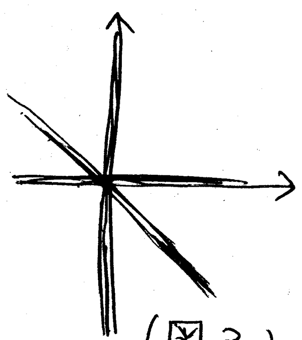


(図2)

図1に比べて，図2のように弱まっている。（$l \neq \{y=0\}$ の所では局所座標として (μ, x') 但し $(x, y) = (\mu x', \mu)$

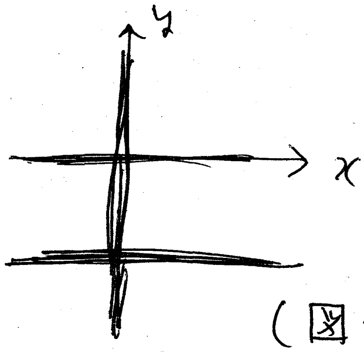
をとることができて $f(x,y)=\mu^2(\mu x'^3+1)=0$ となり，$\mu=0$ も $\mu x'^3+1=0$ も nonsingular になる）

更に blowing up すると 図２は 図３のようになる． もう１回 更に blowing up すると



（図３）

$\Rightarrow$



（図４）

図４のようになり $f=0$ の既約成分が transversal に交わる（その tangent が１次独立）ことがわかる．

n が一般のときも原点の x_i に関する blowing up は $(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)=(\lambda x_1',\cdots,\lambda x_{i-1}',\lambda,\lambda x_{i+1}',\cdots,\lambda x_n')$ により $(x_1',\cdots,x_{i-1}',\lambda,x_{i+1}',\cdots,x_n')$ なる局所座標で考えることに相当する。 blowing up に無関係の変数が入っていることもある。

一般に 次の embedded resolution (of singularity of $\{f=0\}$) (by H. Hironaka 1964) が知られている．

K上 定義された nonsingular absolutely irreducible variety Y と K上 定義された regular map h

$h: Y \to \mathbb{A}^n$ で 次の3条件をみたすものがある。

(1) $Y - \{f\circ h = 0\} \cong \mathbb{A}^n - \{f = 0\}$ biregular

(2) h は（K上定義された nonsingular center をもつ）blowing up の有限回の合成である。

(3) $\{f\circ h = 0\} = \bigcup_{i\in T} C_i$, C_i = K-irreducible かつ nonsingular で，$\{f\circ h = 0\}$ のところでの交わりはすべて transversal である．

このとき，$(f\circ h) = \sum_{i\in T} N_i C_i$，$(h^* dx) = \sum_{i\in T} (\nu_i - 1) C_i$ とおく（( ) は divisor を表わす．local にいえば $C_i = \{y_i = 0\}$ とするとき，これは $f\circ h = y_1^{N_1}\cdots y_t^{N_t}$ ($T = \{1,\cdots,t\}$)，$h^* dx = y_1^{\nu_1 - 1}\cdots y_t^{\nu_t - 1} dy_1 \cdots dy_t \cdots dy_n$，という感じである）

$f(x, y) = x^3 + y^2$ の例でいえば 次のようになる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
Y & = & W_1 & \cup & W_2 & \cup & W_3 & \cup & W_4 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle h} & & \| & & \| & & \| & & \| \\
 & & \{\xi_1, \eta_1\} & & \{\xi_2, \eta_2\} & & \{\xi_3, \eta_3\} & & \{x_3, y_3\}
\end{array}$$

$$\mathbb{A}^2 \ni (x, y) = (\xi_1\eta_1, \xi_1) = (\xi_2, \xi_2^2\eta_2) = (\xi_3^2\eta_3, \xi_3^3\eta_3^2) = (x_3^2 y_3, x_3^3 y_3)$$

$$h^* dx = -\xi_1 d\xi_1 d\eta_1 = \xi_2^2 d\xi_2 d\eta_2 = \xi_3^4 \eta_3^2 d\xi_3 d\eta_3 = -x_3^4 y_3\, dx_3 dy_3$$

$$f\circ h = \xi_1^2(1+\xi_1\eta_1^3) = \xi_2^3(1+\xi_2\eta_2^2) = \xi_3^6\eta_3^3(1+\eta_3) = x_3^6 y_3^2(1+y_3)$$

$$\downarrow h$$

$$f = x^3 + y^2$$

$\{f\circ h = 0\} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ となっており

$$\begin{array}{ll} C_1 = \{\xi_1 = 0\} = \{y_3 = 0\} & (N_1, \nu_1) = (2, 2) \\ C_2 = \{\xi_2 = 0\} = \{\eta_3 = 0\} & (N_2, \nu_2) = (3, 3) \\ C_3 = \{\xi_3 = 0\} = \{x_3 = 0\} & (N_3, \nu_3) = (6, 5) \\ C_4 = \{\eta_3 = -1\} = \{y_3 = -1\} & (N_4, \nu_4) = (1, 1) \end{array}$$

$\{1+\xi_1\eta_1^3 = 0\} = C_2 \cup C_3 \cup C_4$, $\{1+\xi_2\eta_2^2 = 0\} = C_3 \cup C_4$

である（容易に check できる！）

ここで Denef の結果を一つ紹介する。

$Y(O_K)$ を mod πO_K で考え $Y(\mathbb{F}_q)$ 上で考えたものを $\overline{}$ をつけて表わす.

（仮定） $\overline{C_i}$ $(i \in T)$ も $\mathbb{F}_q$-irreducible, nonsingular で transversal に交わる.

（注：この仮定をみたさぬ例はいくらでもある. 数体 K から出発すれば，有限個の finite place $\mathfrak{p}$ を除いてこの仮定がみたされるが，我々は p-adic field から出発しているので，これをちゃんと仮定しなければならない）

このとき，各 $\overline{C_i}$ に対し関数 $c_i(s)$ を

$c_i(s) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{(q-1)q^{-N_i s-\nu_i}}{1-q^{-N_i s-\nu_i}}$ とおき T の subset I

に対して, $Z_I(s) \overset{\text{def}}{=} q^{-n} \prod_{i\in I} c_i(s)$ とおく.

Theorem (Denef) 2. $\bar{a} \in Y(\mathbb{F}_q)$ に対し T の subset $I(\bar{a})$ を $I(\bar{a}) \overset{\text{def}}{=} \{ i \in T ; \bar{a} \in \bar{C}_i \}$ と定め

$$Z_{\bar{a}}(s) \overset{\text{def}}{=} \int_{\substack{y\in Y(O_k) \\ y\equiv \bar{a} \bmod \pi}} |f\circ h|^s |h^* dx|$$

とおくと

$Z_{\bar{a}}(s) = Z_{I(\bar{a})}(s)$ が成り立つ. $Z(s) = \sum_{\bar{a}\in Y(\mathbb{F}_q)} Z_{\bar{a}}(s)$

ゆえ, $Z(s) = \sum_{I\subset T} c_I Z_I(s)$ 但し

$$c_I = \#\{ \bar{a} \in Y(\mathbb{F}_q) ; \bar{a} \in \bigcap_{i\in I} \bar{C}_i , \bar{a} \notin \bigcup_{j\notin I} \bar{C}_j \}$$

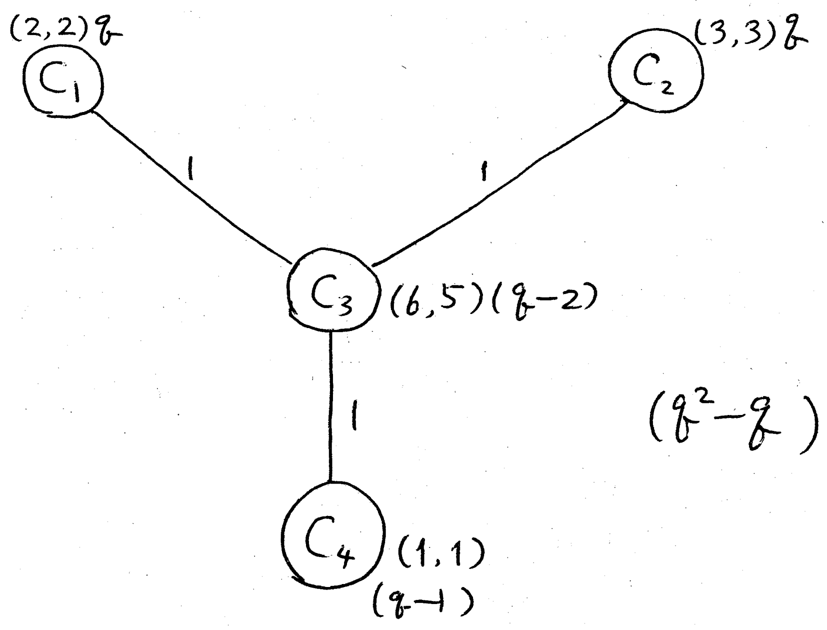
この定理により 6頁の仮定がみたされる $f \in O_k[x_1,\dots,x_n]$ の Igusa local zeta function $Z(s)$ を知るには, 次の Nerve complex with data が重要になる.

$\bar{C}_i$ $(i \in T)$ による Nerve complex とは

$$\{\bar{C}_{i_1},\dots,\bar{C}_{i_p}\} = p\text{-simplex} \Leftrightarrow \bar{C}_{i_1}\cap\dots\cap\bar{C}_{i_p} \neq \emptyset$$

で, 各 p-simplex に対し data c_I $(I = \{i_1,\dots,i_p\})$ を attach させる. 特に各 $\bar{C}_i$ に対しては data (N_i, ν_i) も attach させる. 全体には $c_\emptyset$ を attach させる.

例えば $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2$ の Nerve complex with data は

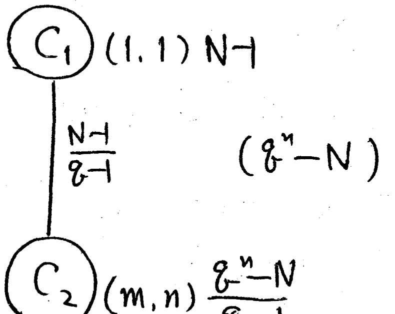


$$Z(s) = q^{-2} \sum_{I \subset \{1,\cdots,4\}} c_I \prod_{i \in I} c_i(s)$$

$$= \frac{(1-q^{-1})\{1 - q^{-(s+2)}(1-q^{-s}) - q^{-5(s+1)}\}}{(1-q^{-(s+1)})(1-q^{-(6s+5)})}$$

となる.

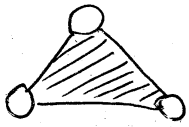
(もう1つの例.) $f(x_1,\cdots,x_n) = m$次 homogeneous で $df(x) \neq 0$ for $\forall x \neq 0$ (i.e. 原点にのみ singularity をもつ) $N \overset{\text{def}}{=} \#\{\xi \in \mathbb{F}_q^n ; f(\xi) = 0\}$ とおくと,



$$Z(t) = \frac{(1-q^{-n}N)(1-t) + (1-q^{-1})(1-q^{-n})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^m)}$$

$(t = q^{-s})$

このニつの例はdiagramで表わせるが一般にはcomplexゆえ平面に書けない.

$f(X) = \det X$ ($X = 3$次行列) $\Rightarrow$  etc.

我々は $K = p$-adic field を与えて, そこから出発しているから $f \in O_K[x_1, \cdots, x_n]$ の Igusa local zeta 関数を計算しようとするとき 6頁の(仮定)が満たされないと Denef の結果は使えないので不便である.
(Denef は 6頁の(仮定)がみたされる f = homog. of degree d にたいしては $Z(s) = \frac{P(T)}{Q(T)}$ ($T = q^{-s}$, P, Q は T の多項式) にたいし $\deg_T Z(s) \overset{\text{def}}{=} \deg P - \deg Q$ が $-d$ に等しい という Igusa conjecture を証明したが そのときに 7頁の結果(Th)を使ったのである。井草先生によると予想の証明よりも, むしろ このThにより Nerve complex で記述されるという発見(これはDenefではなく井草先生が気付かれた)の方が重要とのこと)

そこで, 実際の計算で役に立つ公式をみつけるため まず次のことを示す.

Lemma 3. $O_K^n - \{0\} \cong D_1' \sqcup \cdots \sqcup D_n'$ (disjoint union)
$D_i' = \{(x_1^{(i)}, \cdots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}) \in O_K^n \,;\, (x_1^{(i)}, \cdots, x_{i-1}^{(i)}) \in \pi O_K^{i-1},\ \lambda_i \neq 0\}$ $(i=1, \cdots, n)$.

Proof. $O_K^n - \{0\} \ni x = (x_1, \cdots, x_n)$ に対して $\exists^1 i$ s.t. $\min\{\mathrm{ord}\, x_1, \cdots, \mathrm{ord}\, x_n\} = \mathrm{ord}\, x_i$ ($\neq \mathrm{ord}\, x_j$ for $\forall j < i$) のとき，$(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = (\lambda_i x_1^{(i)}, \cdots, \lambda_i x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, \lambda_i x_{i+1}^{(i)}, \cdots, \lambda_i x_n^{(i)})$ の関係で $(x_1^{(i)}, \cdots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$ を定めると $(x_1^{(i)}, \cdots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}) \in D_i'$．逆に D_i' の $\forall$元に対し，上の関係で $(x_1, \cdots, x_n)$ を定めると $\min\{\mathrm{ord}\, x_1, \cdots, \mathrm{ord}\, x_n\} = \mathrm{ord}\, x_i$ ($\neq \mathrm{ord}\, x_j$ for $\forall j < i$).（但し $\mathrm{ord}\, 0 = +\infty$） //

公式 4. $D_i = \{(x_1^{(i)}, \cdots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \cdots, x_m^{(i)}) \in O_K^m \,;\, (x_1^{(i)}, \cdots, x_{i-1}^{(i)}) \in \pi O_K^{i-1}\}$ とおくと，

$$\int_{O_K^n} |f(x)|_K^s \, dx =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{D_i \times O_K^{n-m}} \left| f(\lambda_i x_1^{(i)}, \cdots, \lambda_i x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, \lambda_i x_{i+1}^{(i)}, \cdots, \lambda_i x_m^{(i)}, x_{m+1}, \cdots, x_n) \right|_K^s \lambda_i^{m-1} d\lambda_i \, dx_1^{(i)} \cdots dx_m^{(i)} \cdots dx_n$$

Proof. $\int_{O_K^n} = \int_{O_K^n - \{0\}}$，$\int_{D_i \times O_K^{n-m}} = \int_{D_i' \times O_K^{n-m}}$ と Lemma 3 より //

例 $$Z_n(s) \overset{\text{def}}{=} \int_{M_n(O_k)} |\det X|^s \cdot dX = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-q^{-i}}{1-q^{-(s+i)}}$$

n に関する帰納法で示す。$n=1$ のときは Prop 1 により正しい。第1行に関して blowing up する.

$$Z_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \int_{D_i \times O_k^{n^2-n}} \left| \det \begin{pmatrix} \lambda x_{11}', \cdots, \lambda, \cdots, \lambda x_{1n}' \\ x_{21}, \cdots, x_{2i}, \cdots, x_{2n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ x_{n1}, \cdots, x_{ni}, \cdots, x_{nn} \end{pmatrix} \right|^s_k \lambda^{n-1} d\lambda \, dx_{11}' \cdots dx_{nn}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\substack{x_{11}', \cdots, x_{1,i-1}' \in \pi O_k \\ \lambda, x_{kl} \in O_k}} |\lambda^s|_k \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & \cdots & & 0 & & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & & 0 & & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \right|^s \lambda^{n-1} d\lambda \, dx_{11}' \cdots dx_{nn}$$

(変数変換をしている!)

$$= \sum_{i=1}^{n} q^{-(i-1)} \int_{O_k} |\lambda|_k^{s+n-1} d\lambda \cdot Z_{n-1}(s)$$

$$= \left(\frac{1-q^{-n}}{1-q^{-1}} \right) \left(\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-(s+n)}} \right) Z_{n-1}(s) = Z_{n-1}(s) \cdot \frac{1-q^{-n}}{1-q^{-(s+n)}}$$

$$\Rightarrow Z_n(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-q^{-i}}{1-q^{-(s+i)}} \qquad //$$

原点に $f=0$ の singularity があるときは 公式4 を何回かくり返せば, 原点で nonsingular な場合の計算に

帰着する。原点以外の singularity についても公式4の考え方でやればよい。$f(x)$ が weighted homogeneous ならば公式4(またはそれを modify したもの)をくり返すと積分は

$$\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx$$ の形に帰着する。

但し $C_i = \{f_i = 0\}$ は K-irreducible, nonsingular で C_i $(i \in T = \{1, \cdots, t\})$ は transversal に交わる.

ここで mod π による reduction $\overline{C_i}$ $(i \in T)$ たちはもはや同じ条件をみたすとは限らない。

例えば $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_1 - \pi$, $f_3(x) = x_1 + \pi \cancel{y} - \cancel{y}^2$ (x_2, x_2^2)

とすると $C_i = \{f_i = 0\}$ $(i = 1, 2, 3)$ は既約, nonsingular で transversal に交わるが $\overline{C_1} = \overline{C_2} = \{\overline{x}_1 = 0\}$, $\overline{C_3} = \{\overline{x}_1 - \overline{x}_2^2 = 0\}$ となり条件がくずれる. Th 2 の特殊な場合として次の公式を得る. 証明簡単故与えておく.

公式5 (Denef) $\overline{C_i} = \{\overline{f_i} = 0\}$ $(i \in T)$ たちも ~~K~~ irreducible, nonsingular で C_i は transversal に交わると仮定する.

$$\Rightarrow \int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = q^{-n} \sum_{I \subset T} C_I \prod_{i \in I} \frac{(q-1) q^{-N_i s - 1}}{1 - q^{-N_i s - 1}}$$

但し $C_I = \#\{\overline{a} \in \mathbb{F}_q^n \,;\, \overline{a} \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i},\ \overline{a} \notin \bigcup_{j \notin I} \overline{C_j}\}$

証明）$\displaystyle\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1}\cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = \sum_{\bar{\xi}\in \mathbb{F}_q^n} \int_{\xi+\pi O_K^n} |f_1(x)^{N_1}\cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx$

今 $\bar{\xi} \in \bigcap_{i\in I} \overline{C_i} = \overline{C_{i_1}} \cap \cdots \cap \overline{C_{i_k}}$ ，$\bar{\xi} \notin \bigcup_{j\notin I} \overline{C_j}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\xi+\pi O_K^n} |f_1(x)^{N_1}\cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = q^{-n} \int_{O_K^n} |f_1(\xi+\pi x)^{N_1}\cdots f_t(\xi+\pi x)^{N_t}|^s dx$ $^{(*)}$

一般に $f_j(\xi+\pi x) = f_j(\xi) + \pi(\cdots\cdots)$ と表わせるから

$\bar{\xi} \notin \overline{C_j} \Rightarrow f_j(\xi) \in U_K \Rightarrow |f_j(\xi+\pi x)| = 1$ for $\forall x$

$\Rightarrow (*) = q^{-n} \displaystyle\int_{O_K^n} \Big| \prod_{i\in I} f_i(\xi+\pi x)^{N_i} \Big|^s dx$ $^{(**)}$

$\bar{\xi} \in \overline{C_i} \Rightarrow f_i(\xi) = \pi u_i \ (u_i \in O_K)$ と表わせる.

nonsingular という仮定により，例えば $\overline{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\xi)} \neq 0$ と

すると $f_i(\xi+\pi x) = \pi u_i + \pi \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi)\cdot x_j + \pi^2(\cdots)$

$= \Big[x_1 \underbrace{\Big(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\xi) + \pi(\cdots) \Big)}_{\text{unit}} + (x_1 \text{に無関係な項}) \Big] \pi$

と表わせる.　$x_1' = \dfrac{1}{\pi} f_i(\xi+\pi x) \longleftrightarrow x_1$ なる変換

$x_j' = x_j \ (\forall j \neq 1)$

は $O_K^n \longleftrightarrow O_K^n$ の bijection で $dx' = dx$ である.

$\overline{f_i}$ $(i \in I)$ が $\overline{\xi}$ で transversal に交わるという

仮定から $O_K^n \longleftrightarrow O_K^n$ bijection

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

s.t. $\frac{1}{\pi} f_{i_1}(\xi + \pi x) = y_1, \cdots, \frac{1}{\pi} f_{i_k}(\xi + \pi x) = y_k$

$dx = dy$

となるものが存在する.

$$\Rightarrow (**) = q^{-n} \int_{O_K^n} \left| \prod_{i \in I} (\pi y_i)^{N_i s} \right| dy$$

$$= q^{-n} \prod_{i \in I} \int_{O_K} (\pi y_i)^{N_i s} dy_i = q^{-n} \prod_{i \in I} \frac{(q-1) q^{-N_i s - 1}}{1 - q^{-N_i s - 1}}$$

即ち $\overline{\xi} \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}$, $\overline{\xi} \notin \bigcup_{j \notin I} \overline{C_j}$

$$\Rightarrow \int_{\xi + \pi O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = q^{-n} \prod_{i \in I} \frac{(q-1)^{-N_i s - 1}}{1 - q^{-N_i s - 1}}$$

公式 5

さて公式5は $\overline{C_i}$ $(i \in I)$ たちが nonsingular で transversal に交わる（そして既約）の場合だが，

一般の場合の

$$\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx \text{ , 但し } C_i = \{f_i = 0\} \text{ は}$$

K-irreducible, nonsingular で transversal に交わる，

はどうか？　結論を先にいうと

$$\int_{O_K^n} |f(x)|^s dx = \sum_{\xi \in \mathbb{F}_q^m} \int_{(\xi + \pi O_K^m) \times O_K^{n-m}} |f(x)|^s dx \quad (m \leq n)$$

という公式を有限回使って公式5の場合に帰着させることができる。　その証明をするためにいくつかの概念を導入する。（これは講演では述べなかった部分）

$$A \overset{\mathrm{def}}{=} O_K[x_1, \cdots, x_n] - \pi O_K[x_1, \cdots, x_n]$$

$$\cup$$

$$A' \overset{\mathrm{def}}{=} \{f \in A \,;\, \{f = 0\} \text{ は nonsingular}\}.$$

$\xi \in O_K^n$ に対して二つの map $\underset{(\text{reduction})}{R_\xi} : A \to A$ と

$\underset{(\text{lifting})}{L_\xi} : A \to A$ を次のように定義する。

$f \in A$ に対して $f(\xi + \pi x) = \pi^r \cdot (R_\xi f)(x)$

(但し r は $R_\xi f \in A$ という条件で unique に定まる)

により $R_\xi f \in A$ を定める。

一方 $f \in A$ に対して $\pi^{s'} f\left(\frac{x-\xi}{\pi}\right) = (L_\xi f)(x)$

(s' は $L_\xi f \in A$ という条件で unique に定まる)

により $L_\xi f$ を定める. 次の事は容易にわかる.

$$\boxed{\text{命題6}: R_\xi : A \to A \text{ 及び } L_\xi : A \to A \text{ は共に bijection で } R_\xi L_\xi = L_\xi R_\xi = id_A}$$

さて $\displaystyle\int_{O_K^n} |f(x)|^s dx = \sum_{\xi \in \mathbb{F}_q^n} \int_{\xi + \pi O_K^n} |f(x)|^s dx$ に於て

$$\int_{\xi + \pi O_K^n} |f(x)|^s dx = q^{-n} \int_{O_K^n} |f(\xi + \pi x)|^s dx = q^{-rs-n} \int_{O_K^n} |R_\xi f(x)|^s dx$$

ゆえ $\displaystyle\int_{O_K^n} |f(x)|^s dx$ の計算は $\displaystyle\int_{O_K^n} |R_\xi f(x)|^s dx$ $(\xi \in \mathbb{F}_q^n)$

の計算に帰着する。 従って,

$f_1(x), \cdots, f_t(x)$ （但し $C_i = \{f_i = 0\}$ は K-irreducible, nonsingular で transversal に交わる）が与えられたとき $t' \in \mathbb{N}$ が存在して $\forall \xi_1, \cdots, \xi_{t'} \in O_K^n$ に対して

$R_{\xi_{t'}} \cdots R_{\xi_1} f_1, \cdots, R_{\xi_{t'}} \cdots R_{\xi_1} f_t$ は 公式5の条件を

みたすことを示せば良いことになる。

$\begin{cases} \xi \in O_K^n \\ f(x) \in A \end{cases}$ に対し，$f(x) = \sum_d \pi^{a_d} f_d(x-\xi)$ と

表わす．ここで $f_d(x-\xi) \in A$ は $x-\xi = (x_1-\xi_1, \cdots, x_n-\xi_n)$

に関して d 次 homogeneous. このとき

> 命題7 $\deg \bar{f} = d_0$ とするとき，次は同値
>
> (1) $\deg \overline{R_\xi f} < \deg \bar{f}$
>
> (2) $\exists\, d < d_0$ s.t. $a_d + d < d_0$

これは明らかである．とくに $\bar{f} \neq$ homog w.r.t. $(x-\xi)$

$\Rightarrow \deg \overline{R_\xi f} < \deg \bar{f}$，が成り立つ．

$\deg \bar{f} = 0 \Rightarrow |f(x)| = 1$

$\deg \bar{f} = 1 \Rightarrow \bar{f}(x)$ nonsingular, irreducible

よって $\deg \bar{F} = d_0 \geqq 2$ のとき $R_{\xi_1}, \cdots, R_{\xi_t}$ たちの作用によって $\deg \overline{R_{\xi_1} \cdots R_{\xi_t} f} \leqq 1$ とすることができることをいえば $\overline{R_{\xi_1} \cdots R_{\xi_t} f}$ nonsingular, irreducible までがいえる。(transversality についてはあとで扱う)

定義8. $f(x) \in A$ が $\underline{\xi \in O_K^n \text{ に関して special type}}$ とは, $f(x) = \sum_d \pi^{a_d} f_d(x - \xi)$, $a_d + d \geqq d_0$ $(= \deg \bar{f})$ for $\forall d < d_0$, と表わせること.

これは $\deg \overline{R_\xi f} = \deg \bar{f}$ と同値である。

定理9. $F(x) \in A$, $\deg \bar{F} = d_0$ とするとき次の条件は同値.

(1) $\xi_i \in O_K^n$ の無限列 $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_m, \cdots$ で $\forall m$ に対して $R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F$ は ξ_{m+1} に関して special type i.e. $\deg \overline{R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F} = d_0$ for $\forall m$

(2) $\exists \eta \in O_K^n$ s.t. $F(x) = \sum_{d \geqq d_0} F_d(x - \eta)$

但し $F_d(x-\eta)$ は $(x-\eta) = (x_1 - \eta_1, \cdots, x_n - \eta_n)$ の d次 homogeneous 多項式

証明 (2)⇒(1) $\xi_1=\eta$, $\xi_j=0$ ($\forall j\geqq 2$) とすればよい。 (1)⇒(2) が重要である.

$R_{\xi_m}\cdots R_{\xi_1}F$ は ξ_{m+1} に関して *special type* だから

$$R_{\xi_m}\cdots R_{\xi_1}F(x)=\sum_d \pi^{a_{m,d}} f_{m,d}(x-\xi_{m+1})$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{但し } f_{m,d}\in A,\quad a_{m,d}>0 \text{ for } \forall d>d_0,\\ a_{m,d_0}=0,\quad d+a_{m,d}\geqq d_0 \text{ for } \forall d<d_0\end{array}\right)$$

と表わせる.

このとき $R_{\xi_{m-1}}\cdots R_{\xi_1}F=L_{\xi_m}(R_{\xi_m}\cdots R_{\xi_1}F)$ を計算しよう。

$$\sum_d \pi^{a_{m,d}} f_{m,d}\left(\frac{x-\xi_m}{\pi}-\xi_{m+1}\right)=\sum_d \pi^{a_d-d} f_{m,d}(x-\xi_m-\pi\xi_{m+1})$$

だが $\deg L_{\xi_m}(R_{\xi_m}\cdots R_{\xi_1}F)=d_0$ に注意すると

(f_{m,d_0} の係数は π^{-d_0} ゆえ)

$$L_{\xi_m}(R_{\xi_m}\cdots R_{\xi_1}F)=\sum_d \pi^{a_{m,d}+(d_0-d)} f_{m,d}(x-\xi_m-\pi\xi_{m+1})$$

以下くり返して

$$F(x)=\sum_d \pi^{a_{m,d}+m(d_0-d)} f_{m,d}(x-\xi_1-\pi\xi_2-\cdots-\pi^m\xi_{m+1})$$

が $\forall m$ に対して成り立つ。左辺は m と無関係ゆえ

$$F(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_d \pi^{a_{m,d}+m(d_0-d)}f_{m,d}(x-\xi_1-\pi\xi_2-\cdots-\pi^m\xi_{m+1})$$

今 $\eta=\lim_{m\to\infty}(\xi_1+\pi\xi_2+\cdots+\pi^m\xi_{m+1})\in O_K^n$ とおく。

$F(x)=\sum_d F_d(x-\eta)$ と表わしたとき

$$F_d(x-\eta)=\lim_{m\to\infty}\pi^{a_{m,d}+m(d_0-d)}f_{m,d}(x-\xi_1-\pi\xi_2-\cdots-\pi^m\xi_{m+1})$$

ゆえ $d<d_0$ なら（$a_{m,d}\geq 0$ ゆえ）$F_d(x-\eta)=0$

$\Rightarrow F(x)=\sum_{d\geq d_0}F_d(x-\eta)$ //

> **Corollary 10.** $F(x)\in A'$ (i.e. nonsingular, $\in A$) かつ $\deg\overline{F}(x)=d_0\geq 2$ とする。このとき自然数 N が定まって $\forall \xi_1,\cdots,\xi_N\in O_K^n$ に対して
>
> $$\deg\overline{R_{\xi_N}\cdots R_{\xi_1}F}<\deg\overline{F}(=d_0)$$

（証明）このような自然数 N が存在しなければ，$\xi_1,\cdots,\xi_m,\cdots$ なる無限列を適当にとって定理 9 の (1) をみたすようにとれるから，$F(x)=\sum_{d\geq d_0}F_d(x-\eta)$ $(d_0\geq 2)$ と表わせる。これは η が $\{F=0\}$ の singular point で

あることを意味するから $F(x)\in A'$ に反する. //

この Cor 10 により, 結局 $\displaystyle\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1}\cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx$,

但し $\{f_i=0\}$ は K-irred, non-singular, transversal に交わり $\deg \overline{f_i}=1$ ($\Rightarrow \{\overline{f_i}=0\}$ irred, nonsingular)

の計算に帰着した。

注) $R_\xi : A'\to A'$, $L_\xi : A'\to A'$ となっている.

例えば $f\in A'$ に対し $R_\xi f\in A'$ をいうには

$F(x)=f(\xi+\pi x)$ が nonsingular をいう。

例えば η が $F(x)$ の singular point ならば,

$F(\eta)=0$ ($\to f(\xi+\pi x)=0$), $\forall \frac{\partial F}{\partial x_i}(\eta)=0$ $\left(\to \pi\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi+\pi\eta)=0\right)$

$\Rightarrow$ $\xi+\pi\eta$ が f の singular pt. 矛盾. //

注) $f=$ 既約 $\Rightarrow$ $R_\xi f=$ 既約

$\because$) $R_\xi f=f_1\cdot f_2 \Rightarrow f=(L_\xi f_1)\cdot(L_\xi f_2)$ //

命題 11 $f_1,\cdots,f_t$ の $\forall\xi\in O_K^n$ での交わりが transversal ならば, $\forall\xi$ に対し $R_\xi f_1,\cdots,R_\xi f_t$ の $\forall\eta\in O_K^n$ での交わりも transversal である.

証明）　$f(\xi+\pi x) = \pi^{r}\cdot(R_\xi f)(x)$ なる r が存在する。

$x_0=\xi+\pi\eta$ に於て，$f_1(x_0)=\cdots=f_l(x_0)=0$，$f_{l+1}(x_0)\neq 0$，$\cdots$，$f_t(x_0)\neq 0$ とすると $f_1,\cdots,f_l$ は x_0 で transversal に交わるから

$$f_1(x)=a_{11}(x_1-(x_0)_1)+\cdots+a_{1n}(x_n-(x_0)_n)+(\underset{(x-x_0)\text{に関して}}{2\text{次以上の項}})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_l(x)=a_{l1}(x_1-(x_0)_1)+\cdots+a_{ln}(x_n-(x_0)_n)+\{2\text{次以上の項}\}$$

と表わしたとき　$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln}\end{pmatrix}=l$.　　そして

$$f_1(\xi+\pi x)=\pi a_{11}(x_1-\eta_1)+\cdots+\pi a_{1n}(x_n-\eta_n)+\left(\begin{matrix}x-\eta \text{ の}\\ 2\text{次以上}\end{matrix}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_l(\xi+\pi x)=\pi a_{l1}(x_1-\eta_1)+\cdots+\pi a_{ln}(x_n-\eta_n)+(\quad〃\quad)$$

従って

$$\begin{cases}(R_\xi f_1)(x) = a_{11}(x_1-\eta_1)+\cdots+a_{1n}(x_n-\eta_n)+(2\text{次以上の項})\\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\ (R_\xi f_l)(x) = a_{l1}(x_1-\eta_1)+\cdots+a_{ln}(x_n-\eta_n)+(2\text{次以上の項})\end{cases}$$

即ち，$R_\xi f_1,\cdots,R_\xi f_l$ は $\forall\eta$ で transversal に交わる.

そして 明らかに $(R_\xi f_k)(\eta)\neq 0$　$(l+1\leq k\leq t)$　　//

命題 12　$f(x)\equiv a_0+\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \mod \pi^m$　$(m\geq 1)$

$\xi\in O_K^n \Rightarrow$ (1) $|R_\xi f|=1$，または

(2) $R_\xi f(x)\equiv a_0'+\sum_{i=1}^{n}a_i'x_i \mod \pi^{m+1}$ 但し $\forall a_i'\equiv a_i \mod \pi^m$

証明） $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \pi^m \left(\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k} a_{ijk} x_i x_j x_k + \cdots \right)$

$\Rightarrow f(\xi + \pi x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (\xi_i + \pi x_i)$

$+ \pi^m \left(\sum_{i,j} a_{ij} (\xi_i + \pi x_i)(\xi_j + \pi x_j) + \sum_{i,j,k} a_{ijk} (\xi_i + \pi x_i)(\xi_j + \pi x_j)(\xi_k + \pi x_k) + \cdots \right)$

$$= \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i\right) + \pi \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \pi^m \left(\underset{\substack{\uparrow \\ 0\text{次 homog.}}}{F_0(x)} + \pi \underset{\substack{\uparrow \\ 1\text{次 homog.}}}{F_1(x)} + \cdots + \pi^r \underset{\substack{\uparrow \\ r\text{次 homog.}}}{F_r(x)} \right)$$

$$= \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i + \pi^m F_0 \right) + \pi \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \pi^m F_1(x) \right) + \pi^{m+2} \left(F_2(x) + \cdots + \pi^{r-2} F_r(x) \right)$$

もし $a_0 + \sum a_i \xi_i \in U_K$ ならば $f(\xi + \pi x) = R_\xi f(x)$ で $|f(\xi + \pi x)| = 1$ 即ち (1) になる。

$a_0 + \sum a_i \xi_i = \pi u$ のときは

$$R_\xi f = (u + \pi^{m-1} F_0) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \pi^m F_1(x) \right) + \pi^{m+1} \left(F_2(x) + \cdots + \pi^{r-2} F_r(x) \right)$$

即ち (2) の場合を得る。 //

命題13 O_K^n の無限列 $\xi_1, \cdots, \xi_m, \cdots$ で $R_{\xi_{m-1}} \cdots R_{\xi_1} f = a^{(m)} + \sum_{i=1}^{k} a_i^{(m)} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i^{(m)} x_i + \pi^m F_{m-1}(x)$, $|R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} f| \neq 1$, $a_i^{(m)} \equiv 0 \ (\pi^m)$ for $\forall m, (k+1 \leq i \leq n)$ を満たすものがあるとする。$\eta = \xi_1 + \pi \xi_2 + \cdots \in O_K^n$ とおく。

然らば $R_\eta f(x) = b + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \pi\{x$ の2次以上の項$\}$
となる。

証明） まず次の Lemma を示そう。

Lemma 14 (1) $\forall \xi_1, \cdots, \xi_{m+1} \in O_K^n$ に対して
$\eta = \xi_1 + \pi\xi_2 + \cdots + \pi^m \xi_{m+1}$ とおくと
$$R_{\xi_{m+1}} \cdots R_{\xi_1} f = R_0^m R_\eta f \quad \text{for } \forall f \in A$$
(2) O_K^n の無限列 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ に対し $\eta = \xi_1 + \pi\xi_2 + \cdots \in O_K^n$
とおくと $\forall f \in A$ に対して
$$R_0^m R_\eta f = R_\xi R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} f \quad \text{with } \xi \equiv \xi_{m+1} (\pi).$$

証明） (2) は $\xi = \xi_{m+1} + \pi\xi_{m+2} + \cdots$ とおけば
(1) に帰着する。 (1) の証明： $f(\xi_1 + \pi x) = \pi^{r_1}(R_{\xi_1} f)(x)$
$(R_{\xi_1} f)(\xi_2 + \pi x) = \pi^{r_2}(R_{\xi_2} R_{\xi_1} f)(x)$
$\Rightarrow f(\xi_1 + \pi\xi_2 + \pi^2 x) = \pi^{r_1 + r_2}(R_{\xi_2} R_{\xi_1} f)(x)$
$= \pi^{r_1 + r_2}(R_0 R_{\xi_1 + \pi\xi_2} f)(x)$ 以下同様。 //

命題13の証明） $|R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} f| \neq 1$ ($\forall m$) という
仮定より $|R_0^m R_\eta f| \neq 1$ ($\forall m$) が Lemma 14 よりわかる。
従って このとき， R_η の1次の項と $R_0^m R_\eta$ の1次の項
は一致する。 $R_\eta f$ の x_i ($k+1 \leq i \leq n$) の係数は
$\forall m$ に対し π^m で割れることをイミするから $= 0$. //

定義15　作用素 R_ξ を次のように一般化する。
$1 \leq m \leq n$, $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m) \in O_k^m$ に対して $R_\eta f$ を
$f(\eta + \pi x', x'') = \pi^r (R_\eta f)(x)$ で定義する。r は
$R_\eta f \in A$ という条件で unique に定まる。ここで
$x = (x', x'')$, $x' = (x_1 \cdots x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \cdots, x_n)$
である。R_η に関しても 21頁に述べた性質が成り立つ。

定理16　$f_i(x) = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \pi^m F_i(x) \in A$
$(i = 1, \cdots, t)$ が既約，非特異，で transversal に交わるとする。$F_i(x)$ は x の2次以上の項。
このとき，自然数 N が存在して (1) $|R_{\xi_N} \cdots R_{\xi_1} f_i|_k = 1$ for some i　又は (2) $\overline{R_{\xi_N} \cdots R_{\xi_1} f_i}$ $(1 \leq i \leq t)$ は transversal に交わる。
ここで各 $k = 1, \cdots, N$ に対し，自然数 m_k が定まり $1 \leq m_k \leq n$ で，ξ_k は $O_k^{m_k}$ の任意の元である。

この定理を示せば我々の目的は達せられる。
t に関する induction．$t = 1$ なら明らか ゆえ
$t \leq p-1$ で成り立つとして $t = p$ のときを示す。

Lemma 17 一般性を失なうことなく $a_1 = \cdots = a_l = 0$ かつ $(\overline{a_{ij}}) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$ としてよい.

Proof. $\mathrm{rank}(\overline{a_{ij}}) = l$ なる変数の1次変換と $f_1, \cdots, f_t$ の順番を(必要なら)変えることにより $(\overline{a_{ij}}) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$ としてよい. $\xi \in O_K^n$ ($\forall$ given) に対し, $f_i(\xi) \not\equiv 0\ (\pi)$ となる i が存在すれば, $|R_\xi f_i|_K = 1$ ゆえ $t \leq T-1$ に帰着する. よって $f_i(\xi) \equiv 0\ (\pi)$ としてよい. Hensel's lemma により $\xi' \equiv \xi\ (\pi)$ なる ξ' で $f_i(\xi') = 0$ $(1 \leq i \leq l)$ となるものがある. ξ は $\mathrm{mod}\ \pi$ で自由にとれるから最初から $\xi' = \xi$ としてよい. すると命題12より $R_\xi f_i$ $(i = 1, \cdots, t)$ はこの Lemma の条件をみたす. //

Lemma 18 $a_1 = \cdots = a_l = 0$, $(\overline{a_{ij}}) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$, かつ $\mathrm{rank}(a_{ij}) > l$ とし, 更にある $j \geq l+1$ に対し $\min_i \mathrm{ord}\, a_{ij}$ に比べて m を十分大きくとれるとすると ある N があって (1) $|R_{\eta_N} \cdots R_{\eta_1} f_i| = 1$, 又は (2) $R_{\eta_N} \cdots R_{\eta_1} f_i$ に関して $(\overline{a_{ij}}) > l$ となる

∵) $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_\ell)\not\equiv 0\ (\pi)$ 例えば $\eta_i\not\equiv 0\ (\pi)$ なる $|R_\eta f_i|=1\ (1\leq i\leq \ell)$ ゆえ $\eta=(0,\cdots,0)\in O_K^\ell$ としてよい。もし $a_i\not\equiv 0\ (\pi)\ (\exists i=\ell+1,\cdots,n)$ ならば $|R_0 f_i|=1$ ゆえ

$$f_i=\pi a_i'+\sum_{j=1}^{\ell}a_{ij}x_j+\sum_{j=\ell+1}^{n}\pi a_{ij}'x_j+\pi^m F_i(x)$$

$(a_1'=\cdots=a_\ell'=0,\ 1\leq i\leq t)$、

よって $R_\eta f_i=a_i'+\sum_{j=1}^{\ell}a_{ij}x_j+\sum_{j=\ell+1}^{n}a_{ij}'x_j+\pi^{m-1}F_i(x)$

これをくり返せばよい。($x_j\ (j=\ell+1,\cdots,n)$ の係数の order があがってくることに注意!) //

ここで Case I と Case II にわける。

Case I では Lemma 18 をくり返して適用できるときで このとき $\mathrm{rank}(\overline{a_{ij}})=$ maximal 即ち $\mathrm{rank}(a_{ij})=\mathrm{rank}(\overline{a_{ij}})$ としてよい。

Lemma 18 が適用できない Case II は命題13 が成り立ってるときである。

Case I は次のようにして解決する。

命題19 $f_k(x)=a_k+a_{k1}x_1+\cdots+a_{kn}x_n+\pi^m F_k(x)$ $(1\leq k\leq t)$, $a_1=\cdots=a_\ell=0$, $\mathrm{rank}(a_{ij})\ \left(\begin{smallmatrix}1\leq i\leq t\\ 1\leq j\leq n\end{smallmatrix}\right)$

$= l = \mathrm{rank}\,(\overline{a_{ij}})\ (1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq n)$. 然らば自然数Nが存在して O_K^n の $\forall$元 $\xi_1, \cdots, \xi_N$ に対して

(1) $|R_{\xi_N} \cdots R_{\xi_1} f_k|_k = 1$ for $\exists k$, 又は

(2) $\overline{R_{\xi_N} \cdots R_{\xi_1} f_k}\ (1 \leq k \leq t)$ は transversal に交わる.

Proof. 無限列 $\xi_1, \cdots, \xi_m, \cdots$ で $\forall m$ と $\forall k = 1, \cdots, t$ に対して $|R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} f_k|_k \neq 1$ なるものが存在すると仮定する。Hensel's lemma により $\xi_1' \equiv \xi_1 (\pi)$ なる ξ_1' で $f_1(\xi_1') = \cdots = f_l(\xi_1') = 0$ なるものがある. ξ_1 は mod π の自由度があるから $\xi_1' = \xi_1$ としてよい. 同様にくり返して $(R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} f_k)(\xi_{m+1}) = 0$ が $\forall m$ と $\forall k = 1, \cdots, l$ に対し成り立つとしてよい.

これは $f_k(\xi_1 + \pi \xi_2 + \cdots + \pi^m \xi_{m+1}) = 0$ をイミする.

$\eta = \sum_{i=0}^{\infty} \pi^i \xi_{i+1} \in O_K^n$ とおくと $f_k(\eta) = 0\ (1 \leq k \leq l)$.

transversal に交わるという条件と $\mathrm{rank}(a_{ij}) = l$ より $f_k(\eta) \neq 0\ (l+1 \leq k \leq t)$. しかし $\eta \equiv \xi_1 (\pi)$ ゆえ $f_k(\eta) \equiv 0\ (\pi)\ (l+1 \leq k \leq t)$. よって

$R_\eta f_k(x) = a_k' + a_{k1}' x_1 + \cdots + a_{kn}' x_n + \pi^{m+1} F_k'(x)$ $(1 \leq k \leq t)$ 但し $a_k' = 0\ (1 \leq k \leq l)$, $a_k' \neq 0\ (l+1 \leq k \leq t)$, かつ $(\overline{a_{ij}}) = (\overline{a_{ij}'})$. さて,

$t=l$ なる 明らかに $R_\eta f_k$ は transversal に交わる。
$t>l$ のとき，例えば $a_t=\pi^r u$ ($u\in U_K=O_K-\pi O_K$)
とすれば $|R_0^{r+1}R_\eta f_t|_K=1$. Lemma 14 により
これは $|R_\xi R_{\xi_{r+1}}\cdots R_{\xi_1}f_t|_K=1$ ($\xi\equiv\xi_{r+2}(\pi)$)
従って $|R_{\xi_{r+2}}\cdots R_{\xi_1}f|_K=1$ を意味する. これは
仮定に反する. //

最後に Case II の場合を扱う. 即ち O_K^n の
無限列 $\xi_1,\cdots,\xi_m,\cdots$ で $R_{\xi_m}\cdots R_{\xi_1}f_j$ ($j=1,\cdots,t$)
の x_i ($l+1\leq i\leq n$) の係数 $\equiv 0 \bmod \pi^m$ ($\forall m$)
が成り立つとする. $\eta=\xi_1+\pi\xi_2+\cdots\in O_K^n$ とおく.
命題 13 により $R_\eta f_i=b_i+\sum_{j=1}^{l}b_{ij}x_j+\pi^m$(2次以上の項) と表わせる.

ある $b_i\neq 0$ なる $b_i=\pi^r u$ ($u\in U_K$) と表わせるが
このとき $|R_0^{r+1}R_\eta f_i|_K=1$, Lemma 14 により
$|R_\xi R_{\xi_{r+1}}\cdots R_{\xi_1}f_i|=1$, $\xi\equiv\xi_{r+2}(\pi)$ 即ち
$t\leq T-1$ の場合に帰着する。

$b_i=0$ ($\forall i=1,\cdots,t$) のときは, $R_\eta f_i$ は 0 で
transversal に交わるから $t=l$ でなければならない. よって $\overline{R_\eta f_i}$ は transversal に交わる.

//

参考文献:

[1] J. Denef, On the degree of Igusa's local zeta function, preprint.

[2] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Annals of Math. (1964), 109–326

[3] J. Igusa, Some results on p-adic complex powers, Amer. J. Math. 106 (1984), 1013–1032.

[4] T. Kimura, Complex powers on p-adic fields and a resolution of singularities, preprint.