数理解析研究所講究録
第632巻 1987年 17-41



# 対称空間の基本群についての注意

電通大数学教室　関口次郎
(Jiro Sekiguchi)

## §1　序文

本文の目的は三つある。はじめに半単純対称空間の基本群の基本的性質について注意を与える。一般の半単純対称空間は $G/H$ と表示される。ここで $G$ は連結な半単純リー群，$H$ はその閉部分群である。リーマン対称空間の場合、コンパクト，非コンパクトを問わず、$G$ として線型群を考えれば十分なことが知られている。線型半単純リー群は一般の半単純リー群よりいろいろな面で取り扱いやすい。したがって，$G$ として連結線型半単純リー群を動かしたとき，その等質空間として得られる半単純対称空間 $G/H$ は，一般の連結半単純リー群に対するものに比べてどうなっているかは一考する価値はある。これに対して定理1の結論は、かなりの半単純対称空間は線型リー群の等質空間となることを主張している。

半単純対称空間 $G/H$ に対してリー環レベルでの直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ が得られる。$\mathfrak{q}$ の半単純元からなる極大可換部分空間 $\underline{\mathfrak{a}}$ はリー環の Cartan 部分環の類似物である。[OM]ではこれらの共役類について考察しているが，いま $\underline{\mathfrak{a}}$ としてベクトル部分の次元が最大のものを考える。本文の第二の目的は $Z_G(\underline{\mathfrak{a}})$ の構造を調べることである。

さて $G/H$ の rank, split rank が [OS, 2] で定義されているが，$G/H$ の split rank が 1 であるものは，一般のものに比べて扱いやすい。第三の目的は，split rank が 1 であるような半単純対称空間 $G/H$ に対して，$Z_G(\underline{\mathfrak{a}})/Z_G(\underline{\mathfrak{a}}) \cap H$ の連結性について考察する。$Z_G(\underline{\mathfrak{a}})/Z_G(\underline{\mathfrak{a}}) \cap H$ は群の場合の Cartan 部分群の類似物であり，$G/H$ の調和解析で基本的な役割をしている。連結半単純リー群 $G$ があり，その rank は 1 より大で，split rank が 1 とする。このとき $G$ の任意の Cartan 部分群は連結になることが知られている。$G/H$ の場合にこの類似の命題を証明する。この結果は $G/H$ に対する $c$－函数を計算する時に必要になる。定理3がそれである。以前に青木茂氏による一般的な証明の試みのあることに注意しておく。

## §2. $G/H$ の基本群

$V$ が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間のとき，$V_c$ をその複素化とする。

$\mathfrak{g}$ が実半単純リー環，$\sigma$ をその包合同型とする。この時 $\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\sigma X=X\}$，$\mathfrak{q}=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\sigma X=-X\}$ とおけば，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{q}$ は直和分解になる。$G$ をリー環が $\mathfrak{g}$ である連結リー群とする。$\sigma$ は $G$ の包合同型に持ち上がるとする。この時，その包合同型を同じ記号で表わす。そして $G^\sigma=\{g\in G\,;\,\sigma(g)=g\}$ とし $G^\sigma_0$ を $G^\sigma$ の単位元をふくむ連結成分とする。$G$ の閉部分群 $H$ が $G^\sigma_0\subseteq H\subseteq G^\sigma$ をみたす時，$G/H$ を半単純対称空間という。$G'$ をリー環が $\mathfrak{g}$ であるもう一つの連結リー群で $H'$ を上と同様にして得られる $G'$ の閉部分群の時，$G/H$ と $G'/H'$ は局所同型という。$G$ と $G'$ が異なっても，$G/H$ と $G'/H'$ は同型になる場合もあることに注意する。例えば非コンパクト型リーマン対称空間は群 $G$ の選び方によらない。さて，半単純対称空間 $X$ が線型であるとは，連結線型半単純リー群 $G$ とその閉部分群 $H$ で $X\cong G/H$ と表わせる時にいう。コンパクト，非コンパクトを問わず，リーマン対称空間はこの意味で線型である。

M. Berger [B] により，$\sigma$ と可換である $\mathfrak{g}$ の Cartan

対合同型 $\theta$ が存在する。 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を対応する Cartan 分解とする。

$G, H$ を上のようにとり, $K$ を $\mathfrak{k}$ に対応する $G$ の解析部分群とする。 Berger によれば (cf. [B, Prop. 53.2]) $G/H$ は $K/K\cap H$ 上の fibre が $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ と同型なベクトル束になっている。 このことより次の補題が得られる。

補題 1. $\pi_1(G/H) \cong \pi_1(K/K\cap H)$

次の補題も基本的である。 例えば [L, Chap. IV. Th. 3.4] 参照.

補題 2. $G$ が単連結ならば $G/G^\sigma$ は単連結である。 特に $G^\sigma$ は連結になる。

次の補題は [He, Chap. VII, Th. 9.1] と同様な議論で証明できる。

補題 3. $X$ と $X'$ は半単純対称空間とする。 次の二条件を仮定する。

(i) $X$ は $X'$ の被覆空間である。 (特に $X$ と $X'$ は局所同型である。)

(ii) $X$ は線型である。

以上の条件のもとで，$X'$ は線型になる。

これから半単純対称空間の基本群の考察を始める。$G_1$ として $\mathfrak{g}$ の随伴群 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ をとる。$G_c$ をリー環が $\mathfrak{g}_c$ であるような単連結複素リー群とし，$G_2$ をリー環が $\mathfrak{g}$ である $G_c$ の連結閉部分群とする。また $G_3$ をリー環が $\mathfrak{g}$ である単連結リー群とする。定義より，$G_3 \to G_2$, $G_2 \to G_1$ は被覆写像である。

一般に，$G_3$ は次のいずれかの条件を満たす。

(a)　$G_3 = G_2$，他言すれば，$G_3$ は線型である。

(b)　$G_3$ は線型でないが，$G_3$ の中心は有限である。

(c)　$G_3$ の中心は有限でない。

各 $G_i$ に対して，$K_i$ をリー環が $\mathfrak{k}$ である $G_i$ の連結閉部分群とする。当分の間，$\mathfrak{g}_c$ は複素単純リー環と仮定して議論を進める。この条件のもとで次がわかる。

Case (a)：　$K_2$ は単連結である。

Case (b)：　$G_3$ の自明でない中心元 $z$ が存在して

$$1 \longrightarrow \{1, z\} \longrightarrow G_3 \longrightarrow G_2 \longrightarrow 1$$

は完全列である。

Case (c)：　この場合 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_s \oplus \mathfrak{z}$ となる。ここで，

$\mathfrak{k}_s$ は半単純で，$\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{k}$ の中心である。仮定より $\dim\mathfrak{t}=1$ となる。$(K_2)_s$ をリー環が $\mathfrak{k}_s$ である $K_2$ の連結閉部分群とし $T=\exp(\mathfrak{t})\subset K_2$ とおく。すると $(K_2)_s$ は単連結で $K_2=(K_2)_s\cdot T$ が成立つ。

定理 1　$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を対称対とし，上の記号はそのまま使う。$\mathfrak{g}_c$ は複素単純リー環，$\mathfrak{h}$ はコンパクトでないとする。

(i)　(a) の場合：　$\pi_1(G_1/G_1^\sigma)$ は有限で，$G_2/G_2^\sigma$ は単連結。

(ii)　(b) の場合：　$\pi_1(G_1/G_1^\sigma)$ は有限で，$G_2/(G_2^\sigma)_0$ は単連結。ここで $(G_2^\sigma)_0$ は $G_2^\sigma$ の単位元を含む連結成分。

(iii)　(c) の場合：　$\sigma(X)=X$ が任意の $X\in\mathfrak{t}$ に対して成立つ時は $\pi_1(G_1/G_1^\sigma)$ は有限で，$G_2/G_2^\sigma$ は単連結。一方，$\sigma(X)=-X$ が任意の $X\in\mathfrak{t}$ に対して成立つ時は $\pi_1(G_1/G_1^\sigma)$ は無限群。更に $\pi_1(G_2/(G_2^\sigma)_0)\cong\mathbb{Z}$.

(証) はじめにコンパクト対称空間 $L/M$ で $L$ が半単純であれば，その基本群 $\pi_1(L/M)$ は有限であることに注意しておく。

(i) は仮定より明らか。

(iii) の場合 $K_1$ は半単純で $\pi_1(G_1/G_1^\sigma)\cong\pi_1(K_1/K_1^\sigma)$ だから $\pi_1(G_1/G_1^\sigma)$ は有限である。一方，前に述べたことから $G_3$ の中心の元 $z$ で $G_3/Z\cong G_2$ となるものが存在す

る。ここで $Z=\{1, z\}$。$G$ の対合同型 $\sigma$ は $G_2$ と $G_3$ の両方に持ちあがるから $\sigma(z)=z$ が成立つ。ゆえに $z$ は $G_3^\sigma$ にふくまれる。補題2より $G_3^\sigma$ は連結だから $G_3/G_3^\sigma$ は $G_2/(G_2^\sigma)_0$ が成立つ。したがってやはり補題2より $G_2/(G_2^\sigma)_0$ は単連結になる。

(iii) の時は $\mathfrak{k}$ は半単純ではなく、以前の記号で $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_s+\mathfrak{t}$ と記す。$K_2=(K_2)_s\cdot T$ も前と同様とする。

はじめに $\sigma(X)=X$ がすべての $X\in\mathfrak{t}$ に対して成立つ時を考える。この場合 $\sigma(t)=t$ がすべての $t\in T$ に対して成立つので $K_2^\sigma=(K_2)_s^\sigma\cdot T$ となる。したがって $K_2/K_2^\sigma\cong(K_2)_s/(K_2)_s^\sigma$。$(K_2)_s$ は単連結だから Cartan の定理より $(K_2)_s/(K_2)_s^\sigma$ は単連結。ゆえに補題2より $G_2/G_2^\sigma$ は単連結になる。さて $K_2/K_2^\sigma$ は $K_1/K_1^\sigma$ の被覆空間だから $\pi_1(K_1/K_1^\sigma)$ が有限になることもわかる。

次に $\sigma(X)=-X$ がすべての $X\in\mathfrak{t}$ に対して成立つ時を考える。$G_2/(G_2^\sigma)_0$ は $G_1/G_1^\sigma$ の被覆空間であるから $\pi_1(G_2/(G_2^\sigma)_0)\cong\mathbb{Z}$ を示せば十分である。$(K_2)_s^\sigma$ は $K_2^\sigma$ の連結成分だから $\pi_1(G_2/(G_2^\sigma)_0)\cong\pi_1(K_2/(K_2^\sigma)_0)\cong\pi_1(K_2/(K_2)_s^\sigma)$
ところで $K_2/(K_2)_s^\sigma$ は $(K_2)_s/(K_2)_s^\sigma$ 上のファイバーが $T/T\cap(K_2)_s^\sigma$ であるファイバー束だから

$$\pi_1(T/T\cap(K_2)_s^\sigma)\to\pi_1(K_2/(K_2)_s^\sigma)\to\pi_1((K_2)_s/(K_2)_s^\sigma)$$

は完全列であり，$\pi_1((K_2)_s/(K_2)_s^\sigma)=1$ であり，$T/T\cap(K_2)_s^\sigma$ はやはりトーラスになるから，$\pi_1(T/T\cap(K_2)_s^\sigma)\cong\mathbb{Z}$。ゆえに $\mathbb{Z}\longrightarrow\pi_1(K_2/(K_2)_s^\sigma)\longrightarrow 1$ は完全列。$\pi_1(K_2/(K_2)_s^\sigma)$ が無限群になることは容易にわかるので，このことから $\pi_1(K_2/(K_2)_s^\sigma)\cong\mathbb{Z}$ がでる。したがって $\pi_1(G_2/(G_2^\sigma)_0)\cong\mathbb{Z}$ となる。

以上で定理1は完全に証明された。

系　定理1と同じ仮定のもとで，$\pi_1(G_1/G_1^\sigma)$ が有限であれば $G_1/G_1^\sigma$ と局所同型な半単純対称空間は線型である。

この系は定理1と補題3よりでる。

§2　$G/H$ に対する"Cartan部分群"

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$, $\sigma$, $\theta$ などは§1と同じものとする。$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とする。$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間，$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間で半単純元のみからなるものとする。この時 $[\mathfrak{a}_\mathfrak{p},\mathfrak{t}]=0$ が成立つ (cf. [OS, 2, Lemma 2.4])。そこで $\hat{\mathfrak{t}}$ を $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{t}$ を含む $\mathfrak{g}$ の Cartan部分代数とする。

$G, H, K$ なども §1 のものとする。$\tilde{J}$ を $\tilde{\mathfrak{t}}$ に対応する $G$ の Cartan 部分群とする。以下では，一般に $G$ の閉部分群 $C$ に対して $C_0$ を単位元を含む $C$ の連結成分とする。また $\mathfrak{v}$ が $\mathfrak{g}$ の部分空間，$C$ が $G$ の閉部分群のとき，$Z_C(\mathfrak{v}) = \{g \in C \,;\, Ad(g)X = X \text{ for } \forall X \in \mathfrak{v}\}$ とおく。

$\mathbb{Z}_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) = Ad_G^{-1}(Ad_G(K) \cap \exp(\sqrt{-1}\,\mathfrak{a}_\mathfrak{p}))$ とおく。この時次が成立つ。(cf. [W, Prop. 1.4.1.3])

補題4. $\tilde{J} = \tilde{J}_0 \cdot \mathbb{Z}_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$

これから $Z_G(\mathfrak{t})$ について，この補題の類似を示す。その準備として知られた補題を述べる。

補題5. $L$ を連結なコンパクト半単純リー群とし $\mathfrak{l}$ をそのリー環とする。$\sigma$ を $\mathfrak{l}$ の対合同型で $\sigma$ についての $\mathfrak{l}$ の直和分解を $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ + \mathfrak{l}_-$ とする。ここで $\mathfrak{l}_\pm = \{X \in \mathfrak{l} \,;\, \sigma(X) = \pm X\}$ とおいた。いま $\mathfrak{v}$ を $\mathfrak{l}_-$ の極大可換部分空間とすると，$Z_L(\mathfrak{v})$ は連結である。

定理2. $Z_G(\mathfrak{t}) = Z_H(\mathfrak{t})_0 \cdot \exp(\mathfrak{t}) \cdot \mathbb{Z}_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$.
ここで $\exp(\mathfrak{t})$ は $\mathfrak{t}$ に対応する $G$ のトーラス。

(証)　[OS, 2, §8] の記号をそのまま使う。まず [OS, 2, Lemma 8.12] より

$$Z_G(\mathfrak{a}) = U(\sigma) \cdot G(\sigma) \cdot M^\sigma \cdot T^\sigma \cdot Z^\sigma \cdot A_\sigma$$

となる。　$U(\sigma) = U(\sigma)_0 \cdot Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ で，$G(\sigma), M^\sigma, T^\sigma, Z^\sigma, A_\sigma$ は連結な $G$ の閉部分群である。　また $U(\sigma), G(\sigma), M^\sigma, T^\sigma, Z^\sigma, A_\sigma$ は互いに可換である。　さて，$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{t}$ だから $Z_G(\mathfrak{t}) \subseteq Z_G(\mathfrak{a})$ となる。　また定義より $G(\sigma), M^\sigma, T^\sigma, Z^\sigma, A_\sigma$ は $Z_G(\mathfrak{t})$ に含まれることがわかるから

$$Z_G(\mathfrak{t}) = Z_{U(\sigma)}(\mathfrak{t}) \cdot G(\sigma)\, M^\sigma T^\sigma Z^\sigma A_\sigma$$

となる。　$Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{t}$ と可換だから

$$Z_{U(\sigma)}(\mathfrak{t}) = Z_{U(\sigma)_0}(\mathfrak{t}) \cdot Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$$

となる。　ところで　$\mathfrak{u}(\sigma) = \mathfrak{u}(\sigma) \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{u}(\sigma) \cap \mathfrak{p}$ は $\sigma|\mathfrak{u}(\sigma)$ についての $\mathfrak{u}(\sigma)$ の直和分解であり　$\mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}(\sigma)$ は $\mathfrak{u}(\sigma) \cap \mathfrak{p}$ の極大可換部分空間である。　したがって補題5より $Z_{U(\sigma)_0}(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}(\sigma))$ は連結である。　$Z_{U(\sigma)_0}(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}(\sigma)) = Z_{U(\sigma)_0}(\mathfrak{t})$　だから，結局 $Z_{U(\sigma)_0}(\mathfrak{t})\, G(\sigma) M^\sigma T^\sigma Z^\sigma A_\sigma$ は連結になる。　ゆえに

$$Z_G(\mathfrak{t}) = Z_G(\mathfrak{t})_0\, Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$$

がわかる。　ところで $Z_G(\mathfrak{t})_0$ のリー環は $Z_\mathfrak{k}(\mathfrak{t}) \oplus \mathfrak{t}$ である。ここで $Z_\mathfrak{k}(\mathfrak{t})$ は $\mathfrak{k}$ における $\mathfrak{t}$ の中心化環。　したがって

$$Z_G(\mathfrak{t})_0 = Z_H(\mathfrak{t})_0\, \exp(\mathfrak{t})$$

となる。　ゆえに定理は証明された　□

系1　$Z_H(\underline{a})_c$, $Z_H(\underline{a})$ は $Z_G(\underline{a})$ の正規部分群である。

系2　$\exp(\underline{a})\, Z_G(\mathfrak{g}) / (\exp(\underline{a})\, Z_G(\mathfrak{g})) \cap H$

$$\simeq \tilde{J} / \tilde{J} \cap H$$

$$\simeq Z_G(\underline{a}) / Z_G(\underline{a}) \cap H$$

系3　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は既約な対称対で，$\mathfrak{g}_c$ は複素単純とする。この時 $Z_G(\underline{a})/Z_G(\underline{a}) \cap H$ には自然にアーベル群の構造が入る。

系1，系2の証明は容易。定理1より $\pi_1(\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}/(\mathrm{Int}\,\mathfrak{g})^\sigma)$ が有限の時は $G_2/(G_2^\sigma)_0$ は単連結になる。したがって $\tilde{J}$ としては線型リー群の Cartan 部分群にとれるので系2の同型よりアーベル群の構造が $Z_G(\underline{a})/Z_G(\underline{a}) \cap H$ に入る。
$\pi_1((\mathrm{Int}\,\mathfrak{g})/(\mathrm{Int}\,\mathfrak{g})^\sigma)$ が無限群の場合 $\mathfrak{g}$ の極大コンパクト部分環 $\mathfrak{k}$ は半単純でなく $\tilde{G}_3$ の中心は無限群。この場合 $\tilde{G}_3$ における $\tilde{\underline{a}}$ に対応する Cartan 部分群はアーベル群になるので，$\tilde{J}$ はやはりアーベル群になる。したがってこの場合も $Z_G(\underline{a})/Z_G(\underline{a}) \cap H$ にアーベル群の構造が入る。これで系3も証明できた。

$Z_G(\underline{a})/Z_G(\underline{a}) \cap H$ の半単純対称空間 $G/H$ の調和解析における役割は、半単純リー群の調和解析におけるベクトル部分の次元の最大な Cartan 部分群の役割と似ている。

§3　split rank $= 1$ の場合の $Z_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})\cap H$ の連結性

以下 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は既約な対称対で $\mathfrak{h}$ はコンパクトでないと仮定する。 $l' = \dim \mathfrak{a}$, $l = \dim \mathfrak{a}$ をそれぞれ $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ または $G/H$ の rank, split rank という。

real rank が 1 である半単純リー群は一般のものに比べて扱いやすいが、それと同様に split rank が 1 である半単純対称空間は基本的である。 [OS, 2, p 462, Table II] に split rank が 1 である既約対称対の分類表がある。

この節では次を証明する。

定理3　$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は既約な対称対とし $G/H$ を対応する半単純対称空間とする。

　$\mathfrak{h}$ はコンパクトでない。

　$G/H$ の split rank $= 1$

　$G/H$ の rank $> 1$

を仮定する。この時 $Z_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})\cap H$ は連結である。

(証) [OS, 2] の分類表にもとづいて、この定理を証明する。まず、次のことに注意する。

$\mathfrak{g}$ は実単純とする。

1. $\mathfrak{g}$ の rank $> 1$, $\mathfrak{g}$ の real rank $= 1$

2. $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数の共役類は唯一つ。

1, 2 のいづれかの条件をみたすような $\mathfrak{g}$ に対して，リー環が $\mathfrak{g}$ である任意の連結リー群 $G$ の任意の Cartan 部分群は連結になる。特に 2 の条件をみたすような $\mathfrak{g}$ はそれ自身複素単純リー環になるか，$\underline{su}^*(2n)$，$\underline{so}(2n+1,1)$，$\mathfrak{e}_{6(-26)}$ のいづれかに同型になる。

また $G/H$ がそれ自身群多様体になる場合，定理3の仮定をみたせば，$G=G'\times G'$，$G/H\cong G'$ と表示できる。ここで $G'$ は連結単純リー群で rank $>1$，real rank $=1$ となる。すると，この場合は上の 1 の場合より $Z_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})\cap H$ が連結であることがわかる。

以上の注意を考慮すれば [OS. 2, p.462] の表をみて

| | | |
|---|---|---|
| $IV_1$ | $(\underline{so}^*(2m+4),\ \underline{so}^*(2m+2)+\underline{so}^*(2))$ | $(m>1)$ |
| $IV_1^d$ | $(\underline{so}(2m+2,2),\ \underline{su}(m+1,1)+\sqrt{-1}\,\mathbb{R})$ | $(m>1)$ |
| $IV_2^d$ | $(\underline{su}(2(m+1),2),\ \underline{sp}(m+1,1))$ | $(m>0)$ |
| $IV_3^d$ | $(\underline{e}_{6(-14)},\ \underline{f}_{4(-20)})$ | |
| $V_2$ | $(\underline{su}(3,3),\ \underline{sp}(3,\mathbb{R}))$ | |
| $V_3$ | $(\underline{e}_{6(2)},\ \underline{f}_{4(4)})$ | |

以外で定理3の条件をみたす $G/H$ の場合，$\tilde{J}/\tilde{J}\cap H$ は連結になることがわかる。したがって，上の三系列と三個の対称対に対して $\tilde{J}/\tilde{J}\cap H$ が連結になることを調べればよい。

さて $\tilde{J}$ の連結性は $Z_G(\mathfrak{a}_p)$ の構造と関連深いので，

$G = \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ の場合に $Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ を調べる。

$\Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ のルート系、$\Pi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ を $\Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ の基本ルート系とする。各 $\lambda \in \Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ に対して $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \lambda)$ を $\lambda$ のルート空間とする。いま各 $\lambda_i \in \Pi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ に対して $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ の元 $p_i$ を次で定義する。

$$p_i X = \begin{cases} -X & X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \lambda_i) \\ X & X \in \mathfrak{g}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \lambda_j) \quad (j \neq i) \\ X & X \in Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) = \{Y \in \mathfrak{g}\,;\, [Y, \mathfrak{a}_\mathfrak{p}] = 0\} \end{cases}$$

この条件から $p_i$ は一意に $\mathfrak{g}$ の自己同型に拡張できることは明らか。定義より

$$p_i \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_c$$
$$p_i^2 = 1$$

となる。

$p_i \in K$ となる為の条件を調べる。そのために

$$\theta_i(X) = p_i(\theta X) \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

とおく。$p_i$ と $\theta$ は可換だから $\theta_i$ は $\mathfrak{g}$ の包合対合である。$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{p}_i$ $(\mathfrak{k}_i = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \theta_i(X) = X\},\ \mathfrak{p}_i = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \theta_i(X) = -X\})$ を対応する直和分解とする。この時 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_i)$ は $K_\varepsilon$ 型の対称対である。このような対称対の分類は [OS, 1] Appendix で得られている。$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{k}_i$ は $\mathfrak{k}_i$ の極大コンパクト部分環であり、したがって付随するコンパクト対称対 $(\mathfrak{k}, \mathfrak{k} \cap \mathfrak{k}_i)$ も

決定できる。一方コンパクト対称対に対して，それに付随する対合同型が内部同型か外部同型かは[H, p.514]よりわかる。ゆえに[H, p.514]と[OS, 1] Appendixより $p_i \in K$ か $p_i \notin K$ かを判定できる。($p_i \notin K \Leftrightarrow p_i \notin G$ に注意)

以上の注意を考慮して，今問題になっているリー環 $\mathfrak{so}^*(2n)$, $\mathfrak{so}(2n,2)$, $\mathfrak{su}(2n,2)$, $\mathfrak{e}_{6(-14)}$, $\mathfrak{su}(3,3)$, $\mathfrak{e}_{6(2)}$ について $p_i \in K$ か否かを表に表わす。$Ad_G(Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}))$ が $p_1, \cdots, p_r$ で生成される有限群に含まれることも容易にわかるから，$Ad_G(Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}))$ の構造は決定できる。

| $\mathfrak{g}$ | $\Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ | | $Ad_G(Z_G(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}))$ |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{so}^*(4n)$ $(n>1)$ | $\underset{\lambda_1}{\circ}-\cdots-\underset{\lambda_{n-1}}{\circ}\Leftarrow\underset{\lambda_n}{\circ}$ | $p_i \in K\ (1\le i\le n-1)$, $p_n \notin K$ | $\langle p_1, \cdots, p_{n-1}\rangle$ |
| $\mathfrak{so}^*(4n+2)$ $(n>1)$ | $\underset{\lambda_1}{\circ}-\cdots-\underset{\lambda_{n-1}}{\circ}\Rightarrow\underset{\lambda_n}{\circ}$ | $p_i \in K\ (\forall i)$ | $\langle p_1, \cdots, p_n\rangle$ |
| $\mathfrak{so}(2n,2)$ $(n>1)$ | $\underset{\lambda_1}{\circ}\Rightarrow\underset{\lambda_2}{\circ}$ | $p_1 \notin K$, $p_2 \in K$ | $\langle p_2\rangle$ |
| $\mathfrak{su}(3,3)$ | $\underset{\lambda_1}{\circ}-\underset{\lambda_2}{\circ}\Leftarrow\underset{\lambda_3}{\circ}$ | $p_1, p_2 \in K$, $p_3 \notin K$ | $\langle p_1, p_2\rangle$ |
| $\mathfrak{su}(2n,2)$ $(n>1)$ | $\underset{\lambda_1}{\circ}\Rightarrow\underset{\lambda_2}{\circ}$ | $p_1, p_2 \in K$ | $\langle p_1, p_2\rangle$ |
| $\mathfrak{e}_{6(2)}$ | $\underset{\lambda_1}{\circ}-\underset{\lambda_2}{\circ}\Rightarrow\underset{\lambda_3}{\circ}-\underset{\lambda_4}{\circ}$ | $p_1, p_2, p_3, p_4 \in K$ | $\langle p_1, p_2, p_3, p_4\rangle$ |
| $\mathfrak{e}_{6(-14)}$ | $\underset{\lambda_1}{\circ}\Rightarrow\underset{\lambda_2}{\circ}$ | $p_1, p_2 \in K$ | $\langle p_1, p_2\rangle$ |

さて $G/H$ が単連結になる場合に $\tilde{J}/\tilde{J}\cap H$ が連結になることを示せば十分であることに注意。 また $\pi_1(\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}/(\mathrm{Int}\,\mathfrak{g})^\sigma)$ を求めておけばどの場合に $G/H$ が単連結になるのかもわかるので都合がよい。 以上の注意を考慮して, $\mathrm{IV}_1$, $\mathrm{IV}_1^d$, $\mathrm{V}_2$, $\mathrm{IV}_2^d$, $\mathrm{V}_3$, $\mathrm{IV}_3^d$ の順に調べる。

(1) $\mathrm{IV}_1$ $\quad (\underline{so}^*(2m+4), \underline{so}^*(2m+2)+\underline{so}^*(2))$ $\quad (m>1)$

この場合 $\pi_1(\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}/(\mathrm{Int}\,\mathfrak{g})^\sigma)=1$ であるから, $G=\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}=SO^*(2m+4)/\{\pm 1\}$ の場合に調べればよい。 ところで, 今の場合, 実は $\tilde{J}$ が連結になることは比較的容易にわかる。 ゆえに $\tilde{J}/\tilde{J}\cap G^\sigma$ は連結である。

(2) $\mathrm{IV}_1^d$ $\quad (so(2m+2,2), su(m+1,1)+\sqrt{-1}R)$ $\quad (m>1)$

この場合も $\pi_1(\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}/(\mathrm{Int}\,\mathfrak{g})^\sigma)=1$ であるから $G=\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}=SO_c(2m+2,2)/\{\pm 1\}$ の場合に調べればよい。 また $G^\sigma$ は連結である。 さて $\sigma$ は $\Sigma(\mathfrak{a}_p)$ の対合をひきおこすが, $\Psi(\mathfrak{a}_p)$ を適当にとりかえれば,

$$\sigma\lambda_1=\lambda_1, \qquad \sigma\lambda_2=-\lambda_1-\lambda_2$$

となるようにできる。 このとき $\sigma(p_2)=p_2$ となることがわかる。 ゆえに $p_2\in G^\sigma$ となる。 すなわち $Z_G(\mathfrak{a}_p)\subset G^\sigma$。 これより $\tilde{J}/\tilde{J}\cap G^\sigma=\tilde{J}_0 Z_G(\mathfrak{a}_p)/\tilde{J}_0 Z_G(\mathfrak{a}_p)\cap G^\sigma\cong\tilde{J}_0/\tilde{J}_0\cap G^\sigma$ となり $\tilde{J}/\tilde{J}\cap G^\sigma$ は連結になる。

(3) $V_2$ $(su(3,3),\ sp(3,\mathbb{R}))$

この場合 $\pi_1(Int\,\mathfrak{g}/(Int\,\mathfrak{g})^\sigma)=\mathbb{Z}_3$ である。したがって，定理1より，単連結複素リー群 $SL(3,\mathbb{C})$ の実部分群 $G=SU(3,3)$ の場合に $G/G^\sigma$ は単連結になる。特に $G^\sigma$ は連結で $Sp(3,\mathbb{R})$ に同型。$G$ の中心 $Z(G)$ は $\mathbb{Z}_6$ に同型で，その生成元 $z\in Z(G)$ をとると，

$$z^3\in G^\sigma,\ z^2\in\tilde{J}_0,\ z\notin\tilde{J}$$

がわかる。また $Ad(k_i)=p_i$ となる $k_1,k_2\in\tilde{J}_0$ が存在することも容易に示せる。ゆえに $\tilde{J}=\tilde{J}_0\cup z^3\tilde{J}_0$ が成立ち $\tilde{J}/\tilde{J}\cap G^\sigma=\tilde{J}_0/\tilde{J}_0\cap G^\sigma$ となり連結。

(4) $IV_2^d$ $(su(2(m+1),2),\ sp(m+1,1))$ $(m>0)$

この場合 $\pi_1(Int\,\mathfrak{g}/(Int\,\mathfrak{g})^\sigma)=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}$ となる。そこで，$G$ として $SU(2(m+1),2)$ の普遍被覆群をとる。$Z(G)$ を $G$ の中心とすると $Z(G)\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}$ である (cf. [SS, p. 128]) そこで，$z,w\in Z(G)$ を生成元とする。$z$ の位数は $\infty$，$w$ の位数は 2 とする。このとき

$$z\in\tilde{J}_0$$

が成立つ。このことは比較的初等的な計算で示すことができるが長くなるので省略。(後で $e_{6(-14)}$ の場合に類似の議論をしているのでそれを参照)。$w\in Z(G)$ については $\sigma(w)\in Z(G)$ でやはり $\sigma(w)$ の位数は 2 だから $\sigma(w)=w$

となる。したがって $w \in G^\sigma$。一方 $Y_1, Y_2 \in \tilde{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{k}$ で $Ad(e^{Y_i}) = p_i \ (i=1,2)$ となるものをみつけることは容易。ゆえに $k_i = e^{Y_i} \in G \ (i=1,2)$ とおく。すると $k_1, k_2 \in \tilde{J}_0$ となる。$Z_G(\mathfrak{n}_\mathfrak{z})$ は $k_1, k_2, w, z$ で生成されるから

$$\tilde{J} = \tilde{J}_0 \cup w\tilde{J}_0$$

となる。ゆえに $\tilde{J}/\tilde{J} \cap G^\sigma = \tilde{J}_0/\tilde{J}_0 \cap G^\sigma$ となり連結。

(5) $V_3$ ($e_{6(2)}, f_{4(4)}$)

この場合 $\pi_1(Int\,\mathfrak{g}/(Int\,\mathfrak{g})^\sigma) = \mathbb{Z}_3$ となる。$G$ として $E_6$ 型単連結複素リー群の実解析部分群をとる。$Z(G)$ を $G$ の中心とすれば $Z(G) \cong \mathbb{Z}_3$ である。この場合 $G$ の対合同型 $\sigma$ は内部同型でないから $Z(G)$ に自明でなく作用している。したがって $G^\sigma$ は連結になり $G/G^\sigma$ は単連結となる。今、Appendix の記号で $Y = \sqrt{-1}(Y_1 - Y_3 + Y_5 - Y_6)$ とおくと $Y \in \tilde{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{k}$ となる。そして $z = e^{2\pi Y} \in \tilde{J}_0$ は $Z(G)$ の生成元になることもわかる。ゆえに $Z(G) \subset \tilde{J}_0$ となる。やはり Appendix の記号を使うと $k_3 = e^{\pi\sqrt{-1}(Y_3 - Y_5)}$, $k_4 = e^{\pi\sqrt{-1}(Y_1 - Y_6)} \in \tilde{J}_0$ であり $Ad(k_i) = p_i \ (i=3,4)$ がわかる。また $\sigma$ の $\Sigma(\mathfrak{n}_\mathfrak{z})$ への作用は

$$\sigma\lambda_i = \lambda_i \ (i=1,2,3),\ \sigma\lambda_4 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4$$

となっているから

$$\sigma(p_1) = p_1 p_4,\quad \sigma(p_2) = p_2,\quad \sigma(p_3) = p_3 p_4,\quad \sigma(p_4) = p_4$$

とくに $\sigma(p_1p_3)=p_1p_3$ となる。 $p_1p_3$，$p_2$ は位数 2 で $Z(G)$ は位数 3，$\sigma(z)=z^{-1}=z^2$ であることを考慮すれば $k_0, k_2 \in G^\sigma$ で $Ad(k_0)=p_1p_3$，$Ad(k_2)=p_2$ となるものが存在することが示せる。 さて $Z_G(\sigma_\mathfrak{g})$ は $k_0, k_2, k_3, k_4, z$ で生成され $k_0, k_2 \in G^\sigma$，$k_3, k_4, z \in \tilde{J}_0$ であることより $\tilde{J}=\tilde{J}_0 \cup k_0\tilde{J}_0 \cup k_2\tilde{J}_0$ で $\tilde{J}/\tilde{J}\cap G^\sigma = \tilde{J}_0/\tilde{J}_0\cap G^\sigma$ がわかり，$\tilde{J}/\tilde{J}\cap G^\sigma$ が連結になる。

(6) $IV_3^d$ ($\mathfrak{e}_{6(-14)}$, $\mathfrak{f}_{4(-20)}$)

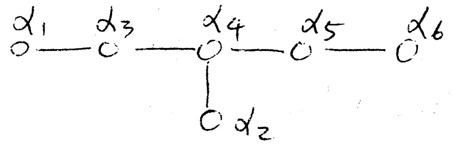
今の場合 $\pi_1(Int\,\mathfrak{g}/(Int\,\mathfrak{g})^\sigma)=\mathbb{Z}$ であるから，$G$ としてリー環が $\mathfrak{e}_{6(-14)}$ になる単連結リー群をとる。 $Z(G)$ を $G$ の中心とすれば $Z(G)\cong\mathbb{Z}$ である (cf. [SS, p. 130])。 Appendix で $Z(G)\subset\tilde{J}_0$ であることを証明する。 また $\sqrt{-1}(Y_1-Y_6)$，$\sqrt{-1}(2Y_3-2Y_1-Y_2)\in\tilde{\mathfrak{j}}\cap\mathfrak{k}$ だから $k_1=e^{\pi\sqrt{-1}(2Y_3-2Y_1-Y_2)}$ $k_2=e^{\pi\sqrt{-1}(Y_1-Y_6)}\in\tilde{J}_0$ とおけば $Ad(k_i)=p_i$ $(i=1,2)$ がわかる。 したがって $\tilde{J}$ は連結になることがいえる。 ゆえに $\tilde{J}/\tilde{J}\cap G^\sigma$ は連結である。

以上で $IV_1$，$IV_1^d$，$IV_2^d$，$IV_3^d$，$V_2$，$V_3$ の場合にも $Z_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})$ の $H$ が連結であることが証明できた。 よって定理 3 は完全に証明された。□

Appendix

$E_6$ 型リー環 $\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}$ の実型 $\mathfrak{e}_{6(2)}$, $\mathfrak{e}_{6(-14)}$ のCartan部分代数について調べる。

$\mathfrak{g}_c$ を $E_6$ 型複素単純リー環とし、$\tilde{\mathfrak{j}}_c$ をそのCartan部分代数とする。$\Sigma(\tilde{\mathfrak{j}}_c)$ を $(\mathfrak{g}_c, \tilde{\mathfrak{j}}_c)$ に関するルート系とする。いま $\Sigma(\tilde{\mathfrak{j}}_c)$ の基本ルート系 $\Pi(\tilde{\mathfrak{j}}_c)$ を次のようにとる。



そして $Y_1, \cdots, Y_6 \in \tilde{\mathfrak{j}}_c$ を $\alpha_i(Y_j) = \delta_{ij}$ となる元とする。

はじめに $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(2)}$ の場合を考察する。$\mathfrak{g}$ のCartan部分代数で本文の中にでてくるものを $\tilde{\mathfrak{j}}$ とする。すなわち $\tilde{\mathfrak{j}}$ のベクトル部分の次元は最大になるとする。この時、

$$\tilde{\mathfrak{j}} = \langle Y_1+Y_6,\ Y_2,\ Y_3+Y_5,\ Y_4,\ \sqrt{-1}(Y_1-Y_6),\ \sqrt{-1}(Y_3-Y_5)\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{j}} = \langle Y_1+Y_6,\ Y_2,\ Y_3+Y_5,\ Y_4\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\tilde{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{k} = \langle \sqrt{-1}(Y_1-Y_6),\ \sqrt{-1}(Y_3-Y_5)\rangle_{\mathbb{R}}$$

となるようにできる。$\mathfrak{g}$ のCartan対合同型 $\theta$ の $\Sigma(\tilde{\mathfrak{j}}_c)$ への制限で

$$\theta\alpha_1 = -\alpha_6,\ \theta\alpha_2 = -\alpha_2,\ \theta\alpha_3 = -\alpha_5,\ \theta\alpha_4 = -\alpha_4,\ \theta\alpha_5 = -\alpha_3,\ \theta\alpha_6 = -\alpha_1$$

となるように $\Pi(\tilde{\mathfrak{j}}_c)$ をえらぶ。また $(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{f}_{4(4)})$ に付随する対合同型 $\sigma$ の $\Pi(\tilde{\mathfrak{j}}_c)$ への制限で

$$\sigma\alpha_1 = -\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3-2\alpha_4-\alpha_5,\quad \sigma\alpha_i = \alpha_i\ (i=2,3,4,5)$$

$$\sigma\alpha_6 = -\alpha_2-\alpha_3-2\alpha_4-2\alpha_5-\alpha_6$$

となるようにできる。前の制限ルート系$\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$の基本ルート系$\Psi(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}$との関係は

$$\lambda_1=\alpha_2|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}},\ \lambda_2=\alpha_4|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}},\ \lambda_3=\alpha_3|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}},\ \lambda_4=\alpha_1|\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$$

である。すると$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$への$\sigma$の作用は

$$\sigma\lambda_i=\lambda_i\ (i=1,2,3),\quad \sigma\lambda_4=-\lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_3-\lambda_4$$

となる。

次に$\mathfrak{g}=\mathfrak{e}_{6(-14)}$の場合を考察する。$\underline{\tilde{\mathfrak{j}}}$を$\mathfrak{g}$のCartan部分代数で本文中に出たものとする。この時

$$\underline{\tilde{\mathfrak{j}}}=\langle Y_1+Y_6,\ Y_2,\ \sqrt{-1}(2Y_3-Y_1-Y_2-Y_6),\ \sqrt{-1}(2Y_4-Y_1-2Y_2-Y_6),$$
$$\sqrt{-1}(2Y_5-Y_1-Y_2-Y_6),\ \sqrt{-1}(Y_1-Y_6)\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}=\langle Y_1+Y_6,\ Y_2\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\underline{\tilde{\mathfrak{j}}}\cap\mathfrak{k}=\langle\sqrt{-1}(2Y_3-Y_1-Y_2-Y_6),\sqrt{-1}(2Y_4-Y_1-2Y_2-Y_6),\sqrt{-1}(2Y_5-Y_1-Y_2-Y_6)$$
$$\sqrt{-1}(Y_1-Y_6)\rangle_{R}$$

となる。$\mathfrak{g}$のCartan対合同型$\theta$の$\Sigma(\underline{\tilde{\mathfrak{j}}}_c)$への制限で

$$\theta\alpha_1=-(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)$$

$$\theta\alpha_2=-(\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5)$$

$$\theta\alpha_3=\alpha_3,\quad \theta\alpha_4=\alpha_4,\quad \theta\alpha_5=\alpha_5$$

$$\theta\alpha_6=-(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)$$

となるように$\Psi(\underline{\tilde{\mathfrak{j}}}_c)$をえらべる。$(\mathfrak{e}_{6(-14)},\mathfrak{f}_{4(-20)})$に付随する対合同型$\sigma$の$\Psi(\underline{\tilde{\mathfrak{j}}}_c)$への制限は$\mathfrak{e}_{6(2)}$の場合と同じで

ある。前の制限ルート系 $\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}})$ の基本ルート系 $\Pi(\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}})=\{\lambda_1,\lambda_2\}$ との関係は

$$\lambda_1=\alpha_2|\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}},\quad \lambda_2=\alpha_1|\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}}$$

である。

$\Sigma(\tilde{\mathfrak{t}}_c)$ のルート $\alpha$ に対して $X_\alpha$ を $\mathfrak{g}_c$ での $\alpha$ のルートベクトルとする。$B$ を $\mathfrak{g}_c$ の Killing 形式とし $H_\alpha\in\hat{\mathfrak{t}}_c$ を $[H,X_\alpha]=B(H_\alpha,H)X_\alpha\ (\forall H\in\hat{\mathfrak{t}}_c)$ となるようにして定義する。いま

$$\beta=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\ \gamma=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6\in\Sigma(\hat{\mathfrak{t}}_c)$$

とおき $X_\beta, X_\gamma$ を

$$B(H_\beta,H_\beta)B(X_\beta,\theta X_\beta)=-2$$
$$B(H_\gamma,H_\gamma)B(X_\gamma,\theta X_\gamma)=-2$$

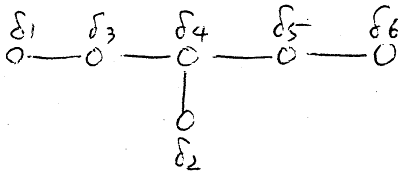
となるように正規化しておく。ここで $\theta$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合同型である。そして

$$Y_1'=\frac{1}{2}(Y_1-Y_2-\sqrt{-1}(X_\beta+\theta X_\beta))$$
$$Y_2'=\sqrt{-1}(X_\gamma+\theta X_\gamma)$$
$$Y_3'=\frac{1}{2}(2Y_3-Y_1-Y_2-Y_6+\sqrt{-1}(X_\gamma+\theta X_\gamma))$$
$$Y_4'=\frac{1}{2}(2Y_4-Y_1-2Y_2-Y_6+2\sqrt{-1}(X_\gamma+\theta X_\gamma))$$
$$Y_5'=\frac{1}{2}(2Y_5-Y_1-Y_2-Y_6+\sqrt{-1}(X_\gamma+\theta X_\gamma))$$
$$Y_6'=\frac{1}{2}(-Y_1+Y_6-\sqrt{-1}(X_\beta+\theta X_\beta))$$

とおく。$X_\gamma, X_\beta\in\mathfrak{g}$ であった。そして

$$\tilde{\mathfrak{t}}' = \langle \sqrt{-1}Y_1', \sqrt{-1}Y_2', \sqrt{-1}Y_3', \sqrt{-1}Y_4', \sqrt{-1}Y_5', \sqrt{-1}Y_6' \rangle_{\mathbb{R}}$$

とおくと $\tilde{\mathfrak{t}}'$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクトCartan部分代数になる。
また $(\mathfrak{g}_c, \tilde{\mathfrak{t}}_c')$ についてのルート系の基本ルート系を
$\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6\}$:




とすれば

$$\mathfrak{g}_c(\tilde{\mathfrak{t}}_c', \delta_i) = \mathbb{C}X_{\delta_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

とできる。ここで $\mathfrak{g}_c(\tilde{\mathfrak{t}}_c', \delta_i)$ は $\mathfrak{g}_c$ におけるルート $\delta_i$ のルート空間であり、 $X_{\delta_1}, \cdots, X_{\delta_6}$ は

$$X_{\delta_1} = X_{\alpha_1} + \sqrt{-1}[\theta X_\beta, X_{\alpha_1}]$$

$$X_{\delta_2} = X_{\alpha_2} + \sqrt{-1}[\theta X_\gamma, X_{\alpha_2}]$$

$$X_{\delta_i} = X_{\alpha_i} \quad (i = 3, 4, 5)$$

$$X_{\delta_6} = X_{\alpha_6} + \sqrt{-1}[\theta X_\beta, X_{\alpha_6}]$$

とできる。このとき

$$[Y_i', X_{\delta_j}] = \delta_{ij} X_{\delta_j}$$

が成立つ。したがって $\tilde{\mathfrak{t}}_c'$ がコンパクトCartan部分環で

$$\delta_i(Y_j') = \delta_{ij}$$

となることがわかる。Gをリー環が $\mathfrak{g}$ である単連結リー群とする。そして

$$z = \exp(2\pi\sqrt{-1}(Y_1' - Y_3' + Y_5' - Y_6')) \in G$$

とおけば [SS, p.130] より $Z$ は $G$ の中心 $Z(G)$ の生成元になることがわかる。ところで

$$\sqrt{-1}(Y_1'-Y_3'+Y_5'-Y_6') = \sqrt{-1}(Y_1-Y_3+Y_5-Y_6) \in \tilde{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{k}$$

であるから，実は

$$Z \in \tilde{J}_0$$

となることがわかる。

## References


[B] M. Berger : Les espaces symétriques non compacts Ann. Sci. École Norm. Sup. 74 (1957), 85–177.

[H]. S. Helgason : Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, 1978.

[L] O. Loos : Symmetric spaces I. Benjamin, 1969.

[OM] T. Oshima and T. Matsuki : Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, J. of Math. Soc. Japan, 32 (1980), 399–414.

[OS 1] T. Oshima and J. Sekiguchi : Eigenspaces of invariant differential operaters on an affine symmetric space. Invent. Math., 57 (1980), 1–81.

[OS 2] T. Oshima and J. Sekiguchi : The restricted root system of a semisimple symmetric pair. Adv. studies in Pure Math., 4 (1984), 433-497.

[SS] A. I. Sirota and A. S. Solodovnikov : Non-compact semisimple Lie groups. Uspehi Mat. Nauk., 18 (1963) 87-144.

[W] G. Warner : Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I. Springer Verlag 1972.

1985. 8. 19