数理解析研究所講究録
第 632 巻 1987 年 55-69

例外リー群の実現について

信州大理　横田一郎
(Ichiro Yokota)

G_2 :

(0) $G_2^C = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{C}^C) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}$.

(1) $G_2 = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{C}) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}$.

(2) $G_{2(2)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{C}') \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}$
$\simeq SO(4) \times R^8$.

F_4 :

(0) $F_4^C = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \}$.

(1) $F_4 = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \}$.

(2) $F_{4(4)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}') \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \}$
$\simeq (Sp(1) \times Sp(3))/Z_2 \times R^{28}$.

(3) $F_{4(-20)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}_1) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \}$
$\simeq Spin(9) \times R^{16}$.

E_6 :

(0) $E_6^C = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det\alpha X = \det X \}$.

(1) $E_6 = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det\alpha X = \det X, \langle\alpha X, \alpha Y\rangle = \langle X, Y\rangle \}$.

(2) $E_{6(6)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}') \mid \det\alpha X = \det X \}$
$\simeq Sp(4)/Z_2 \times R^{42}$.

(3) $E_{6(2)} = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det\alpha X = \det X,\ \langle\alpha X, \alpha Y\rangle_\gamma = \langle X, Y\rangle_\gamma \}$
$\simeq (Sp(1) \times SU(6))/Z_2 \times R^{40}$.

(4) $E_{6(-14)} = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det\alpha X = \det X,\ \langle\alpha X, \alpha Y\rangle_\sigma = \langle X, Y\rangle_\sigma \}$
$\simeq (U(1) \times Spin(10))/Z_4 \times R^{32}$.

(5) $E_{6(-26)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}) \mid \det\alpha X = \det X \}$
$\simeq F_4 \times R^{26}$.

E_7 :

(0) $E_7{}^C = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{P}^C) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q \}$.

(1) $E_7 = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{P}^C) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q,\ \langle\alpha P, \alpha Q\rangle = \langle P, Q\rangle \}$.

(2) $E_{7(7)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{P}') \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q \}$
$\simeq SU(8)/Z_2 \times R^{70}$.

(3) $E_{7(-5)} = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{P}^C) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q,\ \langle\alpha P, \alpha Q\rangle_\sigma = \langle P, Q\rangle_\sigma \}$
$\simeq (SU(2) \times Spin(12))/Z_2 \times R^{64}$.

(4) $E_{7(-25)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{P}) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q \}$
$\simeq (U(1) \times E_6)/Z_3 \times R^{54}$.

E_8 :

(0) $E_8{}^C = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{e}_8{}^C) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2] \}$.

(1) $E_8 = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{e}_8{}^C) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2],\ \langle\alpha R_1, \alpha R_2\rangle = \langle R_1, R_2\rangle \}$.

(2) $E_{8(8)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{e}_8{}') \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2] \}$
$\simeq Ss(16) \times R^{128}$.

(3) $E_{8(-24)} = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{e}_8{}^C) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2],\ \langle\alpha R_1, \alpha R_2\rangle_\upsilon = \langle R_1, R_2\rangle_\upsilon \}$
$\simeq (SU(2) \times E_7)/Z_2 \times R^{112}$.

表の各(0)の群は単連結複素単純リー群であり，各(1)の群は単連結コンパクト単純リー群であり，(2)以下の群は連結な非コンパクト単純リー群でその下にその群の極分解を与えている．

以下これらの群の定義を与えよう．ただし紙面の都合上 G_2, F_4, E_6 型に限り E_7, E_8 型については省略した．まず一般的な記号の約束をしておく．

(i) V を体 $K = R, C$ 上のベクトル空間のとき，$Iso_K(V)$ で K-線型同型写像全体のつくる群を表わす．

(ii) V を R-ベクトル空間とするとき，$V^C = \{ u + iv \mid u, v \in V \}$ をその複素化ベクトル空間とし，V^C における複素共役写像を τ で表わす：
$\tau(u + iv) = u - iv$.

(iii) σ を群 G の対合的 ($\sigma^2 = 1$) 自己同型写像とするとき，σ に関する G の不動点部分群を G^σ で表わす：$G^\sigma = \{ g \in G \mid \sigma g = g \}$. 特に σ が元 $a \in G$ より導かれる内部自己同型写像であるとき，G^σ を G^a で表わす：
$G^a = \{ g \in G \mid ag = ga \}$.

G_2

1.1. $\mathfrak{C} = H \oplus He$ (H は四元数体) において積を

$$(a + be)(c + de) = (ac - \overline{d}b) + (b\overline{c} + da)e$$

で与えた(非可換，非結合的) R-多元環 $\mathfrak{C}$ を Cayley (division) algebra という．
$\mathfrak{C}$ の内積 (x, y)，共役元 $\overline{x}$ をそれぞれ

$$(a + be,\ c + de) = (a,\ c) + (b,\ d),$$

$$\overline{a + be} = \bar{a} - be$$

で与える. また $\mathfrak{C}' = H \oplus He$ において積を

$$(a + be)(c + de) = (ac + \bar{d}b) + (b\bar{c} + da)e$$

で与えた(非可換, 非結合的, 非 division) R-多元環 $\mathfrak{C}'$ を split Cayley algebra という. $\mathfrak{C}'$ にも内積 $(x,\ y)$, 共役元 $\bar{x}$ が $\mathfrak{C}$ と同様に

$$(a + be,\ c + de) = (a,\ c) - (b,\ d)$$

$$\overline{a + be} = \bar{a} - be$$

で与えられている.

1.2. $G_2 = \{\ \alpha \in \mathrm{Iso}_R(\mathfrak{C})\ |\ \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y)\ \}$

は G_2-型単連結コンパクト単純リー群である.

1.3 写像 $\gamma : \mathfrak{C} = H \oplus He \longrightarrow \mathfrak{C}$ を

$$\gamma(a + be) = a - be$$

で定義すると $\gamma \in G_2$, $\gamma^2 = 1$ である. さて群準同型写像 ψ: $Sp(1) \times Sp(1) \longrightarrow (G_2)^{\gamma}$,

$$\psi(p,\ q)(a + be) = qa\bar{q} + (pb\bar{q})e, \qquad a + be \in H \oplus He = \mathfrak{C}$$

は群同型

$$(G_2)^{\gamma} \cong (Sp(1) \times Sp(1))/Z_2, \qquad Z_2 = \{\ (1,\ 1),\ (-1,-1)\ \}$$

を誘導する. なおこの群は $SO(4)$ と同型である. 次に群

$$G_{2(2)} = \{\ \alpha \in \mathrm{Iso}_R(\mathfrak{C}')\ |\ \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y)\ \}$$

は G_2-型連結非コンパクト単純リー群であり, その極分解は

$$G_{2(2)} \simeq SO(4) \times R^6$$

で与えられる.（$G_{2(2)}$の極大コンパクト部分群 $SO(4)$は上記の $(G_2)^\gamma \cong SO(4)$に対応している. すなわち $\gamma : \mathfrak{C}' = H \oplus He \longrightarrow \mathfrak{C}'$ を $\gamma(a + be) = a - be$ で定義すると $\gamma \in G_{2(2)}$であり, 上記と同様にすると $(G_{2(2)})^\gamma \cong SO(4)$となっている. このような現象は以下の群でもなりたっているので再記しないことにする).

1.3. $$G_2{}^C = \{ \alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{C}^C) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}$$

はG_2-型単連結複素単純リー群であり, その極分解は

$$G_2{}^C \simeq G_2 \times R^{14}$$

で与えられる.

F_4

2.1. $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}) = \{ X \in M(3, \mathfrak{C}) \mid X^* = X \}$において, 積 $X \circ Y$ を

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

で与えた R-代数を (exceptional) Jordan algebra という. $\mathfrak{J}$に内積 (X, Y)と$\mathrm{tr}(X, Y, Z)$をそれぞれ

$$(X, Y) = \mathrm{tr}(X \circ Y), \qquad \mathrm{tr}(X, Y, Z) = (X, Y \circ Z)$$

で与える. さらに $\mathfrak{J}$に Freudenthal's product $X \times Y$, (X, Y, Z)と行列式 $\det X$ をそれぞれ

$$X \times Y = \frac{1}{2}(2X \circ Y - \mathrm{tr}(X)Y - \mathrm{tr}(Y)X + (\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y) - (X, Y))E),$$

$$(X, Y, Z) = (X, Y \times Z), \qquad \det X = \frac{1}{3}(X, X, X)$$

（ E は単位行列 ）で定義する．積 $X \times Y$ をもつ $\mathfrak{J}$ を Frendenthal algebra ということにする．

2.2. $F_4 = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \}$

$= \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}) \mid tr(\alpha X, \alpha Y, \alpha Z) = tr(X, Y, Z), (\alpha X, \alpha Y) = (X, Y)\}$

$= \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}) \mid \det\alpha X = \det X, (\alpha X, \alpha Y) = (X, Y) \}$

$= \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}) \mid \det\alpha X = \det X, \alpha E = E \}$

$= \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}) \mid \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y \}$

は F_4-型単連結コンパクト単純リー群である．群 F_4 は次の同一視で G_2 を部分群として含んでいる．$\alpha \in G_2$ に対して写像 $\alpha : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ を

$$\alpha\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \alpha x_3 & \overline{\alpha x_2} \\ \overline{\alpha x_3} & \xi_2 & \alpha x_1 \\ \alpha x_2 & \overline{\alpha x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

で定義すると $\alpha \in F_4$ である．

2.3. $\gamma \in G_2$ を F_4 の元と考える．群 $(F_4)^\gamma$ を決定するために Freudenthal algebra $\mathfrak{J}$ のもう1つの定義を与えよう．$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_H \oplus H^3$（ここに $\mathfrak{J}_H = \mathfrak{J}(3, H) = \{ X \in M(3, H) \mid X^* = X \}$ で Fruedenthal積 $X \times Y$ を $\mathfrak{J}$ のように与えた algebra, $H^3 = \{ (a_1, a_2, a_3)$ 横ベクトル $\mid a_i \in H \}$ である）において Freudenthal 積を

$$(X + \mathbf{a}) \times (Y + \mathbf{b}) = (X \times Y - \frac{1}{2}(\mathbf{a}^*\mathbf{b} + \mathbf{b}^*\mathbf{a})) - \frac{1}{2}(\mathbf{a}Y + \mathbf{b}X)$$

で与える．このとき γ は

$$\gamma(X + \mathbf{a}) = X - \mathbf{a}$$

に対応している. さて群準同型写像 $\psi : Sp(1) \times Sp(3) \longrightarrow (F_4)^\gamma$,

$$\psi(p, A)(X + \mathfrak{a}) = AXA^* + p\mathfrak{a}A^*, \qquad X + \mathfrak{a} \in \mathfrak{J}_H \oplus H^3 = \mathfrak{J}$$

は群同型

$$(F_4)^\gamma \cong (Sp(1) \times Sp(3))/Z_2, \qquad Z_2 = \{ (1, E), (-1, -E) \}$$

を誘導する.

split Cayley algebra $\mathfrak{C}'$ を用いて $\mathfrak{J}' = \{ X \in M(3, \mathfrak{C}') \mid X^* = X \}$ をつくり $\mathfrak{J}$ のときと同様に $X \circ Y$, $X \times Y$, (X, Y) を定義すると

$$F_{4(4)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}') \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \} = (F_4 \text{と同様}) \cdots$$
$$= \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}') \mid \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y \}$$

は F_4-型連結非コンパクト単純リー群であり, その極分解は

$$F_{4(4)} \simeq (Sp(1) \times Sp(3))/Z_2 \times R^{28}$$

で与えられる.

2.4. 写像 $\sigma : \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J}$ を

$$\sigma\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & -x_3 & -\overline{x}_2 \\ -\overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ -x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

で定義すると $\sigma \in F_4$, $\sigma^2 = 1$ となる. このとき群同型

$$(F_4)^\sigma \cong Spin(9)$$

を得る. ここに $Spin(9)$ は $SO(V^9)$, $V^9 = \{ X \in \mathfrak{J} \mid E_1 \circ X = 0, tr(X) = 0 \} =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \overline{x} & -\xi \end{pmatrix} \middle| \xi \in R, x \in \mathfrak{C} \right\}$ の普遍被覆群である. ただし

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とする. なおこの群 $(F_4)^\sigma$ は E_1 における F_4 の

等方部分群 $(F_4)_{E_1}$ に一致していることに注意しておく:

$$(F_4)^\sigma = (F_4)_{E_1} = \{ \alpha \in F_4 \mid \alpha E_1 = E_1 \}.$$

Jordan algebra $\mathfrak{J}$ に内積 $(X, Y)_\sigma$ をこの σ を用いて

$$(X, Y)_\sigma = (X, \sigma Y)$$

で定義するとき

$$F_{4(-20)} = \{ \alpha \in \mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J}) \mid \det\alpha X = \det X,\ (\alpha X, \alpha Y)_\sigma = (X, Y)_\sigma \}$$

は F_4-型連結非コンパクト単純リー群であり, その極分解は

$$F_{4(-20)} \simeq Spin(9) \times R^{16}$$

で与えられる.

(注意

$$\mathfrak{J}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & -\overline{x}_2 \\ -\overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \xi_i \in R,\ x_i \in \mathbf{C} \right\}$$ に積 $X \circ Y$, $X \times Y$

等々を $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ のときと同様に定義するとき,

$$F_{4(-20)} = \{ \alpha \in \mathrm{Iso}\ (\mathfrak{J}_1) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \} = \ldots$$

として, F_4, $F_{4(4)}$ と同様に定義し取り扱うこともできる).

2.5. $$F_4{}^C = \{ \alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \} = \ldots$$
$$= \{ \alpha \in \mathrm{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \mid \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y \}$$

は F_4型単連結複素単純リー群であり, その極分解は

$$F_4{}^C \simeq F_4 \times R^{52}$$

で与えられる.

E_6

3.1. Jordan algebra $\mathfrak{J}$ の複素化 Jordan algebra $\mathfrak{J}^C = \{ X + iY \mid X, Y \in \mathfrak{J} \}$ において $\mathfrak{J}$ と同様 $X \circ Y$, (X, Y), $X \times Y$, (X, Y, Z), $\det X$ 等も定義する. また $\mathfrak{J}^C$ の Hermite 内積 $<X, Y>$ を

$$<X, Y> = (\tau X, Y)$$

で定義する.

3.2.
$$E_6 = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det\alpha X = \det X, <\alpha X, \alpha Y> = <X, Y> \}$$
$$= \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid (\alpha X, \alpha Y, \alpha Z) = (X, Y, Z), <\alpha X, \alpha Y> = <X, Y> \}$$
$$= \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \tau\alpha\tau(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y, <\alpha X, \alpha Y> = <X, Y> \}$$

は E_6-型単連結コンパクト単純リー群である.

3.3. 元 $\alpha \in F_4$ とその複素化写像 $\alpha^C : \mathfrak{J}^C \to \mathfrak{J}^C$ を同一視することによって群 E_6 は F_4 を部分群として含んでいる そして次がなりたつ.

$$F_4 \cong (E_6)^\tau = \{ \alpha \in E_6 \mid \tau\alpha = \alpha\tau \}$$
$$= \{ \alpha \in E_6 \mid (\alpha X, \alpha Y) = (X, Y) \}$$
$$= \{ \alpha \in E_6 \mid \alpha E = E \}.$$

次に

$$E_{6(-26)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}) \mid \det\alpha X = \det X \}$$
$$= \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}) \mid (\alpha X, \alpha Y, \alpha Z) = (X, Y, Z) \}$$

は E_6-型連結非コンパクト単純リー群であり，その極分解は

$$E_{6(-26)} \simeq F_4 \times R^{26}$$

で与えられる

（お話し（群 $E_{6(-26)}$ と群 F_4, $F_{4(-20)}$ と Cayley 平面射影幾何との関係）

$$\mathbb{C}P_2 = \{ A \in \mathfrak{J} \mid A \times A = 0,\ A \neq 0 \}/\sim$$

（ $A \sim B$ の定義は，$B = \lambda A$ となる $\lambda \in R$ が存在するとき $A \sim B$ とする）

$$(\simeq \{ A \in \mathfrak{J} \mid A^2 = A,\ \mathrm{tr}(A) = 1 \})$$

を Cayley 射影平面という．元 $A \in \mathbb{C}P_2$ を点といい，また $L \in \mathbb{C}P_2$ を直線という．点 A と直線 L に対して

$$(L, A) = 0 \rightleftarrows \text{点 } A \text{ は直線 } L \text{ 上にある}$$

と定義すると，$\mathbb{C}P_2$ は平面射影幾何をつくる（ただし Desargues の公理を満さない）．実際，相異なる 2 点 A, B を通る直線は $A \times B$ であり，また相異なる 2 直線 L, M の交点は $L \times M$ である．3 点 A, B, C が一直線上にある条件は，点 A が直線 $B \times C$ 上にあること，すなわち

$$(A, B, C) = (A, B \times C) = 0$$

である．（したがって，量 (A, B, C) を不変にする変換は $\mathbb{C}P_2$ の射影変換をひきおこすことになる．実際，群 $E_{6(-26)} = \{ \alpha \in \mathrm{Iso}_R(\mathfrak{J}) \mid (\alpha X, \alpha Y, \alpha Z) = (X, Y, Z) \}$ は $\mathbb{C}P_2$ の射影変換群になっている．さて $\mathbb{C}P_2$ において恒等写像 1 と上記の対合 σ （$\sigma : \mathbb{C}P_2 \to \mathbb{C}P_2$ と思う）は極変換 (polarity) を与えており，それらに対応する 2 次曲線がそれぞれ

$$(X, X) = 0 \qquad (\text{虚の2次曲線})$$

$$(X, X)_\sigma = 0 \qquad (\text{実の2次曲線})$$

である．群 $E_{6(-26)}$ において，これらの2つの2次曲線 $(X, X) = 0$, $(X, X)_\sigma = 0$ を不変にする部分群が F_4, $F_{4(-20)}$ である．すなわち，F_4, $F_{4(-20)}$ はそれぞれ楕円型，双曲線型非ユークリッド幾何学に相応している群である．以上の観点から，$\mathbf{C}$ の代りに実数体 R で考察すると

$$E_{6(-26)} \longrightarrow SL(3, R), \qquad F_4 \longrightarrow SO(3), \qquad F_{4(-20)} \longrightarrow SO(2,1)$$

のように対応していると考えられる．)

3.4. $\gamma \in G_2 \subset F_4$ を E_6 の元と考える．群 $(E_6)^\gamma$ を決定するために次の準備をする．四元数体 H の標準基 1, i, j, k の代りにここでは 1, e_1, e_2, e_3 を用いることとし，R-線型写像 $k : H \longrightarrow M(2, C)$ を

$$k((x_0 + x_1e_1) + e_2(x_2 + x_3e_1)) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}, \qquad x_i \in R$$

で与える．この k は自然に R-線型写像

$$k : M(3, H) \longrightarrow M(6, C), \qquad k : H^3 \longrightarrow M(2, 6, C)$$

に拡張される．さらにこれらの k はそれぞれ C-線型写像

$$k : M(3, H)^C \longrightarrow M(6, C), \qquad k : (H^3)^C \longrightarrow M(2, 6, C)$$

を

$$\begin{cases} k(X_1 + iX_2) = k(X_1) + ik(X_2), & X_1, X_2 \in M(3, H), \\ k(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2) = k(\mathbf{a}_1) + ik(\mathbf{a}_2), & \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in H^3 \end{cases}$$

によって拡張する．最後に C-ベクトル空間

$$\mathfrak{S}(6, C) = \{ S \in M(6, C) \mid {}^tS = -S \}$$

と C-線型同型写像 $k_J : \mathfrak{J}(3, H)^C \to \mathfrak{S}(6, C)$ を

$$k_J(X_1 + iX_2) = k(X_1)J + ik(X_2)J, \quad X_1, X_2 \in \mathfrak{J}(3, H)$$

で定義する. ここに $J = \begin{pmatrix} J' & 0 & 0 \\ 0 & J' & 0 \\ 0 & 0 & J' \end{pmatrix}$, $J' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である. さて群

準同型写像 $\psi : Sp(1) \times SU(6) \to (E_6)^\gamma$,

$$\psi(p, A)(X + \mathfrak{a})\ k_J^{-1}(Ak_J(X)\,{}^tA) + pk^{-1}(k(\mathfrak{a})A^*)),$$

$$X + \mathfrak{a} \in \mathfrak{J}_H{}^C \oplus (H^3)^C = \mathfrak{J}^C$$

は群同型

$$(E_6)^\gamma \cong (Sp(1) \times SU(6))/Z_2, \quad Z_2 = \{(1, E), (-1, -E)\}$$

を誘導する.

$\mathfrak{J}^C$ に内積 $\langle X, Y\rangle_\gamma$ を γ を用いて

$$\langle X, Y\rangle_\gamma = \langle X, \gamma Y\rangle$$

で与えるとき

$$E_{6(2)} = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det\alpha X = \det X, \langle \alpha X, \alpha Y\rangle_\gamma = \langle X, Y\rangle_\gamma \}$$

は E_6-型連結非コンパクト単純リー群であり, その極分解は

$$E_{6(2)} \simeq (Sp(1) \times SU(6))/Z_2 \times R^{40}$$

で与えられる.

3.5. 群 E_6 の $E_1 \in \mathfrak{J}^C$ における等方群は Spin(10) に同型である:

$$(E_6)_{E_1} \cong Spin(10).$$

ここに Spin(10) は $SO(V^{10})$, $V^{10} = \{ X \in \mathfrak{J}^C \mid 2E_1 \circ X = -\tau X \} =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \overline{x} & -\tau\xi \end{pmatrix} \middle| \xi \in C, x \in \mathbf{C} \right\}$ の普遍被覆群である．次に

$U(1) = \{ \theta \in C \mid |\theta| = 1 \}$ とし，単射群準同型写像 $\phi : U(1) \to E_6$ を

$$\phi(\theta)\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^4\xi_1 & \theta x_3 & \theta\overline{x}_2 \\ \theta\overline{x}_3 & \theta^{-2}\xi_2 & \theta^{-2}x_1 \\ \theta x_2 & \theta^{-2}\overline{x}_1 & \theta^{-2}\xi_3 \end{pmatrix}$$

で定義する．さて群準同型写像 $\psi : U(1) \times Spin(10) \to (E_6)^\sigma$，

$$\psi(\theta, \beta) = \phi(\theta)\beta$$

は群同型

$$(E_6)^\sigma \cong (U(1) \times Spin(10))/Z_4,$$

$$Z_4 = \{ (1, \psi(1)), (-1, \psi(-1)), (i, \psi(-i)), (-i, \psi(i)) \}$$

を誘導する．

$\mathfrak{J}^C$ に内積 $\langle X, Y\rangle_\sigma$ を σ を用いて

$$\langle X, Y\rangle_\sigma = \langle X, \sigma Y\rangle$$

で与えるとき，

$$E_{6(-14)} = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det\alpha X = \det X, \langle\alpha X, \alpha Y\rangle_\sigma = \langle X, Y\rangle_\sigma \}$$

は E_6-型連結非コンパクト単純リー群であり，その極分解は

$$E_{6(-14)} \simeq (U(1) \times Spin(10))/Z_4 \times R^{32}$$

で与えられる．

3.6. $\mathfrak{J}^C$ に対合的共役 C-線型写像 ρ を

$$\rho = \tau\gamma = \gamma\tau$$

で定義する. 群 $(E_6)^\rho = \{\, \alpha \in E_6 \mid \rho\alpha = \alpha\rho \,\}$ を決定するために, C-線型同型写像 $g : \mathfrak{J}^C \longrightarrow \mathfrak{J}(4, H)^C$ (ここに $\mathfrak{J}(4, H)_0 = \{\, X \in M(4, H) \mid X^* = X,$ $tr(X) = 0 \,\}$) を

$$g\left(\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 + b_3 e & \overline{x}_2 - b_2 e \\ \overline{x}_3 - b_3 e & \xi_2 & x_1 + b_1 e \\ x_2 + b_2 e & \overline{x}_1 - b_1 e & \xi_3 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 + a_3 e & \overline{y}_2 - a_2 e \\ \overline{y}_3 - a_3 e & \eta_2 & y_1 + a_1 e \\ y_2 + a_2 e & \overline{y}_1 - a_1 e & \eta_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \overline{a}_1 & \lambda_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{a}_2 & \overline{x}_3 & \lambda_2 & x_1 \\ \overline{a}_3 & x_2 & \overline{x}_1 & \lambda_3 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \mu_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -\overline{b}_1 & \mu_1 & y_3 & \overline{y}_2 \\ -\overline{b}_2 & \overline{y}_3 & \mu_2 & y_1 \\ -\overline{b}_3 & y_2 & \overline{y}_1 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

$(\xi_i, \eta_i \in R,\ x_i, y_i, a_i, b_i \in H)$ ここに

$$\begin{cases} \lambda_0 = \dfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), & \mu_0 = \dfrac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2 - \xi_3), & \mu_1 = \dfrac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3), \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}(-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3), & \mu_2 = \dfrac{1}{2}(-\eta_1 + \eta_2 - \eta_3), \\ \lambda_3 = \dfrac{1}{2}(-\xi_1 - \xi_2 + \xi_3), & \mu_3 = \dfrac{1}{2}(-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3) \end{cases}$$

で定義する. さて群準同型写像 $\psi : Sp(4) \longrightarrow (E_6)^\rho$,

$$\psi(A)X = g^{-1}(A(gX)A^*), \qquad X \in \mathfrak{J}^C$$

は群同型

$$(E_6)^\rho \cong Sp(4)/Z_2, \qquad Z_2 = \{\, E, -E \,\}$$

を与える.

$\mathfrak{J}' = \{ X \in M(3, \mathfrak{C}') \mid X^* = X \}$ とおき，$\mathfrak{J}'$ にも $\mathfrak{J}$ と同様行列式 $\det X$ を定義するとき

$$E_{6(6)} = \{ \alpha \in Iso_R(\mathfrak{J}') \mid \det X = \det X \}$$

は E_6 型連結非コンパクト単純リー群であり，その極分解は

$$E_{6(6)} \simeq Sp(4)/Z_2 \times R^{42}$$

で与えられる.

3.7. $$E_6^C = \{ \alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det\alpha X = \det X \}$$

は E_6 型単連結複素単純リー群であり，その極分解は

$$E_6^C \simeq E_6 \times R^{78}$$

で与えられる.

以上.