

F 進体上の $GS_p(2)$ の既約 *supercuspidal* 表現について

東大理学部 益本 洋 (Hiroshi Masumoto)

§ 0. Introduction

F を剰余標数が奇素数の非アルキメデス的局所体とし, G を 4 変数の *similitude* 付きの *symplectic* 群とする。即ち $G = GS_p(2, F) = \{g \in GL(4, F) \mid gJtg = \chi(g)J, \chi(g) \in F^\times\}$ 但し $J = \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ -I_2 & O_2 \end{pmatrix}$ とする。

伊原 [5] の予想あるいはもっと一般に Langlands 予想の局所版の試みとして、日名との共同研究 [4] で、 G とその *compact twist* (2 変数の 4 元数 *unitary* 群) のある表現達の間に指標を保つ良い対応が存在する事を示した。しかし、ここでは非 *supercuspidal* 表現しか扱う事ができなかった。ここでは (将来、上述の対応が *supercuspidal* 表現達の範囲に迄拡張されるか否かを調べる前段階として) G の既約な *supercuspidal* 表現について調べて見た。

Harish-Chandra 予想に依れば、 G の既約表現は、その極

大 *torus* の指標で *parametrize* されると考えられる。そこで §1 では、 G とその Lie 環 \mathfrak{g} の半単純元 X の G -共役類の分類を行ない、然る後に G の極大 F -*torus* の分類を行った。(5つの型があり、その内2つが *anisotropic torus*.) 次の段階として(今の所、*anisotropic torus* の指標が与えられた時、それに既約 *supercuspidal* 表現を自然な意味で対応させる方法は知られていないが) Kutzko [6] が $GL(2, F)$ で、Carayol [1] が $GL(n, F)$ で行なって効果的であった様に、*compact-by-center* 部分群からの *compact* 誘導の方法を利用して既約 *supercuspidal* 表現を構成した。§2 では、各々、ある *parahoric* 部分群の G 中での正規化群となる様な *compact-by-center* 開部分群 $H(s)$ ($s=1, 2, 3, 4$) を定義し(従って $H(s)$ は自然な *filtration* を持つ)、 $H(s)$ の "*strongly cuspidal* 表現" という概念を導入した(定義 2-2)。これは Kutzko [6] の不分岐表現の一般化と見る事ができる。この概念の導入によって、非常に簡潔で美しい *compact* 誘導に関する理論を展開する事ができる(定理 2-4)。この方面の研究は土方 [3] によって、もっと一般の *reductive* 群に対して成されている。この定理 2-4 により、ここで構成する G の既約 *supercuspidal* 表現の分類は、 $H(s)$ の *strongly cuspidal* 表現の分類に帰着され、これは更に $H(s)$ の *strong-*

ly cuspidal 表現を介して定義される Lie 環 \mathfrak{g} の "strongly cuspidal な元" のある合同条件下での $H(s)$ -共役類の分類定理 (定理 2-5, 定理 2-7) に帰着する。§3 では "非退化" strongly cuspidal な元 A を使って、実際に $H(s)$ の strongly cuspidal 表現を構成し、(compact 誘導により) G の既約な supercuspidal 表現を構成する。

当然 G の既約 supercuspidal 表現が全てこの様な方法で得られるか否かという問題が残っているが、それは今の所未解決である。($GL(n, F)$ の場合でも一般のサイズ n では知られていない。)

§1. $GS_p(2, F)$ の極大 F -torus

この節では、先ず $G = GS_p(2, F)$ とその Lie 環 \mathfrak{g} の半単純な元の G -共役類の分類をする。

$$(\mathfrak{g} = \{ A \in M(4, F) \mid J^t A + A J = S(A) J, S(A) \in F \})$$

補題 1-1. E を F の 2 次拡大とし、 L_E を E の $M(2, F)$ への埋め込み (を自然に $M(2, E) \hookrightarrow M(4, F)$ に拡張した物) とする。この時 $\forall g \in M(2, E)$ に対して

$$J^t (h^{-1} L_E(g) h) J^{-1} = h^{-1} L_E \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) h$$

となる $h \in GL(4, F)$ が存在する。この時、特に

$$\begin{cases} h^{-1} L_E(g) h \in G \iff \det(g) \in F^\times \\ h^{-1} L_E(g) h \in \mathfrak{g} \iff \text{tr}(g) \in F \end{cases} \text{ が成立する。}$$

命題 1-2. $g \in G$ を、特性多項式が $f_g(X)$, *similitude* $n(g)$ の半単純元とすると、 g は次の内の唯一つの代表元に G -共役となる。(長くなるので、自明なもの及び後で不要な物は省略する。) (1) ~ (7) 略。

(8) $f_g(X) = f_A(X)^2$, $n(g) = n$, $g = \begin{pmatrix} A & O_2 \\ O_2 & n^t A^{-1} \end{pmatrix}$. 但し $f_A(X)$ は *regular elliptic* 元 $A \in GL(2, F)$ の特性多項式 (F -既約) で $\det(A) = -n$, $\text{tr}(A) = 0$ とする。

(9) $f_{g_t}(X) = f_A(X)^2$, $n(g_t) = \det(A)$, $g_t = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -t\beta \\ \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & -t^{-1}\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

但し $f_A(X)$ は、*regular elliptic* 元 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, F)$ の特性多項式で、 E を $f_A(X)$ の分解体とする時、 t は

$F^\times / N_E / F(E^\times)$ を動く。

(10) $f_g(X) = f_A(0)^{-1} X^2 f_A(X) f_A(nX^{-1})$, $n(g) = n$, $g = \begin{pmatrix} A & O_2 \\ O_2 & n^t A^{-1} \end{pmatrix}$

$A, f_A(X)$ は上と同じで、 $f_A(X) \neq f_A(0)^{-1} X^2 f_A(nX^{-1})$ とする。

(11) $f_{g_t}(X) = f_{A_1}(X) f_{A_2}(X)$, $n(g_t) = \det(A_1) = \det(A_2)$,

$g_t = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & t\beta_2 \\ \gamma_1 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & t^{-1}\gamma_2 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$ 但し $f_{A_1}(X), f_{A_2}(X)$ は各々 *regular elliptic* 元 $A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} d_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$

$\in GL(2, F)$ の特性多項式で、相異なるとする。 E_1, E_2 を

f_{A_1}, f_{A_2} の分解体とする時、 t は $F^\times / N_{E_1} / F(E_1^\times) N_{E_2} / F(E_2^\times)$

を動かす。

$$(12) f_{g\tau}(X) = X^2 f(X + nX^{-1}), \quad n(g\tau) = n, \quad g\tau = h^{-1} L_E \begin{pmatrix} \alpha & \tau\beta \\ \tau^{-1}\gamma & \delta \end{pmatrix} h.$$

但し、 E は F の 2 次拡大、 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ は $GL(2, E)$ の regular elliptic な元、 $f(X)$ は $L_E(\alpha + \delta)$ の特性多項式、 $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = n$ 、 $f_{g\tau}$ は既約でその分解体を M とする時、 τ は $E^x/F^x NM/E(M^x)$ を動かす。(L_E と h は補題 1-1 と同様とする。)

命題 1-3. $A \in \mathfrak{g}$ を、特性多項式が $f_A(X)$ 、 $J^t A + A J = S(A) J$ なる半単純な元とすると、 A は次の内の唯一つの代表元に G -共役となる。(命題 1-2. の (2) と (8) に相当する物はない。) (1) ~ (7) 略。

$$(9) f_{A_t}(X) = f(X)^2, \quad S(A_t) = \text{tr} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad A_t = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & -t\beta \\ \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & -t^{-1}\gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

但し $f(X)$ は、 $GL(2, F)$ の regular elliptic な元 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ の特性多項式で、 E を $f(X)$ の分解体とする時 t は $F^x/N_{E/F}(E^x)$ を動かす。

$$(10) f_A(X) = f(X) f(S-X), \quad S(A) = S, \quad A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} & 0_2 \\ 0_2 & S I_2 - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

但し $f(X)$ と $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ は上と同じで、 $f(X) \neq f(S-X)$ とする。

$$(11) f_{A_t}(X) = f_1(X) f_2(X), \quad S(A_t) = \text{tr} \begin{pmatrix} d_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & d_1 \end{pmatrix} = \text{tr} \begin{pmatrix} d_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$A_t = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & t\beta_2 \\ \gamma_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & t^{-1}\gamma_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{但し } f_1(X), f_2(X) \text{ は、 } GL(2, F) \text{ の regular elliptic な元 } \begin{pmatrix} d_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

の特性多項式で相異なるとする。 E_1, E_2 を $f_1(X), f_2(X)$ の分解体とする時、 t は $F^x / N_{E_1/F}(E_1^x) N_{E_2/F}(E_2^x)$ を動く。

$$(12) f_{A_t}(X) = f(X(s-X)), \quad s(A_t) = s, \quad A_t = h^{-1} L_E \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} h.$$

但し、 E は F の 2 次拡大、 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ は $GL(2, E)$ の regular elliptic 元、 $f(X)$ は $L_E(\alpha\delta - \beta\gamma)$ の特性多項式、 $t \in \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = s$, f_{A_t} は既約で、その分解体を M とする時、 τ は $E^x / F^x N_{M/E}(M^x)$ を動く。(L_E と h は補題 1-1 と同様とする。)

$$(注) (11) \text{ に於いて } [F^x : N_{E_1/F}(E_1^x) N_{E_2/F}(E_2^x)] = \begin{cases} 1 & E_1 \not\cong E_2 \text{ の時} \\ 2 & E_1 \cong E_2 \text{ の時} \end{cases}$$

$$(12) \text{ に於いて } [E^x : F^x N_{M/E}(M^x)] = \begin{cases} 2 & M/F \text{ が } (2, 2)\text{-拡大の時} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

が成立する。 G 内での中心化群は次の群に同型となる。(8)型

の元の場合 $\{g \in GL(2, E) \mid \det g \in F^x\}$, (9)型の場合、

$$\begin{cases} E^x \times GL(2, F) / \{(a, a^{\tau}) \mid a \in F^x\} & t \in N_{E/F}(E^x) \text{ の時} \\ E^x \times D^x / \{(a, a^{\tau}) \mid a \in F^x\} & t \notin N_{E/F}(E^x) \text{ の時 (但し } D \text{ は } F \text{ 上} \end{cases}$$

の四元数体) となる。 G 内での中心化群が mod center で

compact になるのは (11), (12)型 と (9)型 ($t \notin N_{E/F}(E^x)$) の

元の場合のみである。

命題 1-2 と 1-3 の証明は、橋本-伊吹山 [2] と同様の方法で行なえる。

次に G の maximal torus の共役類の分類

について述べる。

定理 1-4. $T \in G$ の極大 F -torus とすると, T は次の 5 つの型の内の 1 つに共役となる。

$$(1) T_1(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & na^{-1} & \\ & & & nb^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b, n \in F^\times \right\} \text{ (F-split torus)}$$

(2) 各 2 次拡大 E/F に対して

$$T_{2,E}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & \alpha & & \beta \\ & & na^{-1} & \\ & \gamma & & \delta \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in L_E(E^\times) \right. \\ \left. \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = n, a, n \in F^\times \right\}$$

(3) 各 2 次拡大 E/F に対して

$$T_{3,E}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} A & & \\ & n^t A^{-1} & \\ & & \end{pmatrix} \mid A \in L_E(E^\times), n \in F^\times \right\}$$

(4) F の 2 次拡大の組 (E_1, E_2) に対して, g_t を命題 1-2 (11) の様にとるとき,

$$T_{4,(E_1, E_2), t}(F) = Z_G(g_t) \\ \cong \{ (\alpha_1, \alpha_2) \in E_1^\times \times E_2^\times \mid N_{E_1/F}(\alpha_1) = N_{E_2/F}(\alpha_2) \}$$

(5) $E/F, M/E$ を各々 2 次拡大とする。 g_t を命題 1-2 (12) の様にとるとき,

$$T_{5,(M, E), t}(F) = Z_G(g_t) \cong \{ \alpha \in M^\times \mid N_{M/E}(\alpha) \in F^\times \}$$

以上の torus は (4) で, $E_1 \cong E_2 (\cong E)$ で $N_{E/F}(E) \neq -1$ の時 $T_{4,(E_1, E_2), 1}$ と $T_{4,(E_1, E_2), t}$ (t は $F^\times / N_{E/F}(E^\times)$ の元として見る時 $t \neq 1$) の共役になる以外は互いに非共役である。

(注) 上のトラスの内、中心で割って compact になるのは (4), (5) 型のみである。

§2. G のある compact-by-center なる部分群の strongly cuspidal 表現.

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ (F の整数環), $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_F$ (F の素イデアル), $\pi = \pi_F$ (F の素元, fix する) とする時, 記号を次の様に定める.

$$\mathcal{Q}(1) = M(4, \mathcal{O})$$

$$\mathcal{Q}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid A, B, D \in M(2, \mathcal{O}), C \in M(2, \mathfrak{P}) \right\}$$

$$\mathcal{Q}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}(2) \mid A, {}^t D \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathcal{O}) \mid C \in \mathfrak{P} \right\} \right\}$$

$$\mathcal{Q}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{Q}(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\pi(1) = \pi 1_4, \quad \pi(2) = \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ \pi I_2 & O_2 \end{pmatrix}, \quad \pi(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (= \pi(3)^2), \quad Z(1) = \langle \pi(1) \rangle,$$

$$Z(2) = \langle \pi(2) \rangle, \quad Z(3) = \langle \pi(3)^2 \rangle, \quad Z(4) = \langle \pi(4) \rangle; \text{無限巡回群}$$

$$\mathfrak{P}^\nu(s) = \pi(s)^\nu \mathcal{Q}(s) \quad (s=1, 2, 3, 4) \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

$$K_\nu(s) = (1_4 + \mathfrak{P}^\nu(s)) \cap G \quad \nu \in \mathbb{Z}, \geq 0$$

$$\mathfrak{q}_\nu(s) = \mathfrak{P}^\nu(s) \cap \mathfrak{q} \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

$$K(s) = K_0(s), \quad H(s) = K(s) \rtimes Z(s)$$

(注) $K(s)$ は いわゆる parahoric 部分群になつていて, $H(s)$ は, G 内での $K(s)$ の正規化部分群 $N_G(K(s))$ と一致している。

以下、混乱の恐れのない時は $K(S)$ 等の S を省略して単に K などと書く。次に以下で必要となる定義を2つ述べる。

定義 2-1. G の admissible 表現 R が supercuspidal とは、任意の G の極大 parabolic 部分群 P の unipotent radical $U=U(P)$ に対して $\text{Hom}_U(R, 1_U) = \{0\}$ が成立する事である。(ここで Hom は intertwining operator の成す空間で、 1_U は U の単位表現。)

定義 2-2. $\tau \in \widehat{H}$ (H の既約 admissible 表現全体を表わす) が "level ν ($\nu \in \mathbb{N}$) の strongly cuspidal 表現" であるとは、① $\tau|_{K_\nu} = 1$ ② $\text{Hom}_{K_\nu \cap U}(\tau, 1_U) = \{0\}$ が成立する事である。(ここで $\text{Hom}, U, 1_U$ は定義 2-1 と同様とする。)

$H(S)$ の level ν の strongly cuspidal 表現全体を $\widehat{H(S)}_\nu^\#$ と書く事にすると、 $S=2, 3, \nu = \text{odd}$ 又は $S=4, \nu = \text{even}$ の時 $\widehat{H(S)}_\nu^\# = \phi$ となる事が分かる。次に、 $\mathcal{G}_\nu(S)$ の "strongly cuspidal な元" という概念を導入する。

定義 2-3. $A \in \mathcal{G}_\nu(S)$ が (type (S, ν) の) strongly cuspidal な元であるとは、 \mathfrak{g} の任意の極大 parabolic subalgebra

と $A + \mathfrak{g}_{\nu+1}(S)$ が共通部分を持たない事を言う。

type (ν, S) の strongly cuspidal 元全体を $\widehat{H(S)}_{\nu}^{\#}$ と書く事にする。strongly cuspidal 表現に対しては、次が成り立つ。

定理 2-4. $\tau \in \widehat{H(S)}_{\nu}^{\#}$, $\tau' \in \widehat{H(S')}_{\nu'}$ とする時、

- ① $c\text{-Ind}^G \tau$ は G の 既約 supercuspidal 表現となる。
- ② $c\text{-Ind}^G \tau$ と $c\text{-Ind}^G \tau'$ が同値になる条件は $S=S'$, $\nu=\nu'$ かつ τ と τ' が同値である事である。
($c\text{-Ind}$ は, "compact induction" を表わす。)

証明は "Mackey の定理" による。さて ψ を F の additive character で $\psi(0)=1$, $\psi(\vartheta^{-1}) \neq 1$ なる物とする。 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 上に $\Phi(X, Y) = \psi(\text{tr}(XY))$ ($X, Y \in \mathfrak{g}$) なる bilinear form を定めると, \mathfrak{g} と $\widehat{\mathfrak{g}}$ は Φ (非退化となる) により 同一視できる: $\mathfrak{g} \ni X \mapsto \Phi_X \in \widehat{\mathfrak{g}}$ (但し $\Phi_X(Y) = \Phi(X, Y)$ $X, Y \in \mathfrak{g}$)。この時 $\Phi_X |_{\mathfrak{g}_{\nu}(S)} = 1 \iff X \in \mathfrak{g}_{\nu-d(S)}(S)$ (但し $d(1)=0$, $d(2)=1$, $d(3)=3$, $d(4)=1$) が成り立つ。 $H(S)$ は $\{K_{\nu}(S)\}_{\nu \geq 0}$ を normalize するので, $H(S)$ の $K_{\nu}(S)$ 上自明な既約表現 (これ全体を $\widehat{H(S)}_{\nu}$ と書く) を $K[\frac{1}{2}](S)$ (但し $\{\frac{1}{2}\}$ は $\frac{1}{2}$ 以上の最小整数を表わす) に制限する事により、次の写像が得られる。

$$\begin{aligned}
\widehat{H(s)}_\nu &\xrightarrow{\text{res.}} I(H(s)) \backslash \left(\widehat{K_{\{\nu/2\}}(s)} / K_\nu(s) \right) \quad (\nu \geq 2) \\
&\cong I(H(s)) \backslash \left(\widehat{\mathfrak{o}_{\{\nu/2\}}(s)} / \mathfrak{o}_\nu(s) \right) \\
&\cong I(H(s)) \backslash \left(\mathfrak{o}_{-\nu-d(s)}(s) / \mathfrak{o}_{-\{\nu/2\}-d(s)}(s) \right)
\end{aligned}$$

なお、 $I(H(s))$ は $H(s)$ の元の内部自己同型による作用全体を表わし、最初の同一視は $K_{\{\nu/2\}} \ni k \mapsto k-1 \in \mathfrak{o}_{\{\nu/2\}}$ によって得られ、次の同一視は上述の \mathfrak{o} と $\widehat{\mathfrak{o}}$ の同一視による。この時 $\text{res.}(\widehat{H(s)}_\nu^\#) = I(H(s)) \backslash \left(\mathfrak{o}_{-\nu-d(s)}^\#(s) / \mathfrak{o}_{-\{\nu/2\}-d(s)}(s) \right)$ となる。

よって level ν の $H(s)$ の *strongly cuspidal* 表現を調べるには、まず上式の右辺について考えればよい。上式の右辺は、

$$\left\{ \begin{array}{l} I(H(1)) \backslash \pi^{-\nu} \left(\mathfrak{o}_0^\#(1) / \mathfrak{o}_{\{\nu/2\}}(1) \right) \quad s=1 \text{ の時.} \\ I(H(2)) \backslash \pi^{-\nu/2-1} \left(\mathfrak{o}_1^\#(2) / \mathfrak{o}_{\nu/2+1}(2) \right) \quad s=2, (\nu: \text{even}) \\ I(H(3)) \backslash \pi^{-\nu/4-1} \left(\mathfrak{o}_1^\#(3) / \mathfrak{o}_{\nu/2+1}(3) \right) \quad s=3, \nu/2: \text{even} \\ I(H(3)) \backslash \pi^{-(\nu+2)/4-1} \left(\mathfrak{o}_3^\#(3) / \mathfrak{o}_{\nu/2+3}(3) \right) \quad s=3, \nu/2: \text{odd} \\ I(H(4)) \backslash \pi^{-(\nu+1)/2} \left(\mathfrak{o}_0^\#(4) / \mathfrak{o}_{(\nu-1)/2}(4) \right) \quad s=4, (\nu: \text{odd}) \end{array} \right.$$

となる。(但し $[\cdot]$ は Gauss 記号。) 以下、この様に "正規化" した、 $\mathfrak{o}_i^\#(s)$ の $\text{mod } \mathfrak{o}_{i+\{\nu/2\}}(s)$ での $H(s)$ -共役類について、2段階に分けて分類定理を述べる。($\mathfrak{o}_i^\#(s)$ は $\mathfrak{o}_0^\#(1)$, $\mathfrak{o}_1^\#(2)$, $\mathfrak{o}_1^\#(3)$, $\mathfrak{o}_3^\#(3)$, $\mathfrak{o}_0^\#(4)$ のいずれか。)

定理 2-5. E/F を不分岐2次拡大とし、 L_E を E の $M(2, F) \wedge$ の埋め込みで、 $L_E(\mathcal{O}_E^\times) \subset GL(2, \mathcal{O}_F)$ なる物と

する。 $A \in g_i^{\#}(s)$ は $\text{mod } g_{i+1}(s)$ で、次の形の元のいずれかの唯一つに $H(s)$ -共役となる。(以下で h は補題 1-1 の条件を満たし、 $h \in GL(4, \mathbb{Q})$ にとっておく。)

(1) $A \in g_0^{\#}(1)$ の時、

① $h^{-1}LE \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & s \end{pmatrix} h$ $s \in \mathbb{Q}_F, \alpha \in \mathbb{Q}_E^{\times}, X^2 - sX + \alpha \in \mathbb{Q}_E[X]$ は $\text{mod } \mathfrak{p}_E$ で既約。

② $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d_1 & 0 & s & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & s \end{pmatrix}$ $s \in \mathbb{Q}; d_1, d_2 \in \mathbb{Q}^{\times}$
 $X^2 - sX + d_1$ と $X^2 - sX + d_2$ は $\text{mod } \mathfrak{p}$ で、既約で相異なる。

(2) $A \in g_1^{\#}(2)$ の時、

① $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \\ \pi a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi t^{-1}b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{Q}^{\times}, t$ は $\mathbb{Q}^{\times}/(\mathbb{Q}^{\times})^2$ を動き、
 $t=1$ の時は $a \neq b \pmod{\mathfrak{p}}$, $t \neq 1$ の時は $ab \in (\mathbb{Q}^{\times})^2$ とする。

② $h^{-1}LE \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \pi\tau^{-1} & \alpha \end{pmatrix} h$ $\alpha \in \mathbb{Q}_E \setminus \mathbb{Q}_F, \tau$ は $\mathbb{Q}_E^{\times}/(\mathbb{Q}_E^{\times})^2$ を動き、
 $\tau \neq 1$ の時は $\alpha \in (\mathbb{Q}_E^{\times})^2$ とする。

(3) $A \in g_1^{\#}(3)$ [resp. $A \in g_3^{\#}(3)$] の時、

$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ \pi c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$ [resp. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ \pi a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi a \\ 0 & \pi c & 0 & 0 \end{pmatrix}$] $a, b, c \in \mathbb{Q}^{\times}$

(4) $A \in g_0^{\#}(4)$ の時、

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\pi d_1 & 0 & s & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & s \end{pmatrix}$ $s \in \mathbb{Q}; d_1, d_2 \in \mathbb{Q}^{\times}$
 $X^2 - sX + d_1, X^2 - sX + d_2$ は $\text{mod } \mathfrak{p}$ で既約。

証明は、極大 parabolic subgroup の G -共役類の代表系 $P(1), P(2)$ を固定して、 $\forall g \in H(s), \forall w \in P(j) \setminus G/H(s) (j=1,2)$ に対して $g^{-1}Ag + \mathfrak{o}_{i+1}(s)$ と $w^{-1}P(j)w$ が共通部分を持たない条件を具体的に書き下す事により、行なう。

この定理より、特性多項式を比較する事などによって、次の事が分かる。

系 2-6. $A \in \mathfrak{o}_{\nu}^{\#}(s), B \in \mathfrak{o}_{\nu'}^{\#}(s'), g \in G$ とする時、
 $g^{-1}Ag = B \implies s = s', \nu = \nu', g \in H(s)$ が成り立つ。

定理 2-7. $A, B \in \mathfrak{o}_i^{\#}(s)$ とする。(但し、 $\mathfrak{o}_i^{\#}(s)$ は $\mathfrak{o}_0^{\#}(1), \mathfrak{o}_1^{\#}(2), \mathfrak{o}_1^{\#}(3), \mathfrak{o}_3^{\#}(3), \mathfrak{o}_0^{\#}(4)$ のいずれか。) $f_A(X), f_B(X)$ を各々 A, B の特性多項式とする時、 A, B が $\text{mod } \mathfrak{o}_{i+\lfloor \nu/2 \rfloor}(s)$ で $H(s)$ -共役となる条件は、 A, B が $\text{mod } \mathfrak{o}_{i+1}(s)$ で定理 2-5 の同じ形の元に $H(s)$ -共役で、次の合同条件を満たす事である。

$$(1) \mathfrak{o}_i^{\#}(s) = \mathfrak{o}_0^{\#}(1) \text{ の時, } f_A(X) \equiv f_B(X) \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor \nu/2 \rfloor}}$$

$$(2) \mathfrak{o}_i^{\#}(s) = \mathfrak{o}_1^{\#}(2) \text{ の時,}$$

① A, B が定理 2-5 の (2), ① 型の時、

$$f_A(X) = (X^2 - sX + a)(X^2 - sX + b), f_B(X) = (X^2 - tX + c)(X^2 - tX + d)$$

$s, t \in \mathfrak{p}; a, b, c, d \in \pi \mathcal{O}^{\times}$ と書ける。この時、

$$s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor (\nu+2)/4 \rfloor}}, \quad (a, b) \equiv (c, d) \text{ 又は } (d, c) \\ \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor \nu/4 \rfloor + 1}}$$

② A, B が定理 2-5 の (2) ② 型の時、

$$f_A(X) = \pi^2 g_A(X(s-X)/\pi), \quad f_B(X) = \pi^2 g_B(X(t-X)/\pi)$$

(但し, $s = s(A), t = s(B) \in \mathfrak{p}$, $g_A(X), g_B(X) \in \mathcal{O}[X]$ は $\pmod{\mathfrak{p}}$ で 2 次既約) と書ける。この時、

$$s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor (\nu+2)/4 \rfloor}}, \quad g_A(X) \equiv g_B(X) \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor \nu/4 \rfloor}}$$

(3) $\sigma_i^\#(s) = \sigma_i^\#(3)$ [resp. $\sigma_3^\#(3)$] の時、

$$f_A(X) = X^4 - 2sX^3 + aX^2 + s(s^2 - a)X + b$$

$$f_B(X) = X^4 - 2tX^3 + cX^2 + t(t^2 - c)X + d$$

(但し $s = s(A), t = s(B)$ で $s, t \in \mathfrak{p}$; $a, c \in \mathfrak{p}$; $b, d \in \pi \mathcal{O}^x$ [resp. $s, t \in \mathfrak{p}$; $a, c \in \mathfrak{p}^2$; $b, d \in \pi^3 \mathcal{O}^x$]) と書ける。

この時、

$$s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor (\nu+2)/8 \rfloor}}, \quad a \equiv c \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor (\nu+4)/8 \rfloor}}, \quad b \equiv d \\ \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor \nu/8 \rfloor + 1}} \quad [\text{resp. } s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor (\nu+6)/8 \rfloor}}, \quad a \equiv c \\ \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor (\nu+4)/8 \rfloor + 1}}, \quad b \equiv d \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor \nu/8 \rfloor + 3}}]$$

(4) $\sigma_i^\#(s) = \sigma_0^\#(4)$ の時、

$$f_A(X) = (X^2 - sX + a)(X^2 - sX + b), \quad f_B(X) = (X^2 - tX + c)(X^2 - tX + d)$$

(但し $s = s(A), t = s(B)$ で $s, t \in \mathcal{O}$, $a, b, c, d \in \mathcal{O}^x$) と書ける。この時、

$$s \equiv t \pmod{\mathfrak{p}^{\lfloor \nu/2 \rfloor}}, \quad (a, b) \equiv (c, d) \text{ 又は } (d, c)$$

(mod $\mathfrak{p}^{[\nu/2]}$).

A を *strongly cuspidal* な元とすると, G 内での中心化群 $Z_G(A)$ は中心で割って *compact* になる。定理 2-5 の (2) ①型で $t \neq 1$, $a \equiv t \pmod{\mathfrak{p}}$ の時と, (4)型で $d_1 \equiv d_2 \pmod{\mathfrak{p}}$ の時を 'degenerate' と呼び, それ以外の時を 'non-degenerate' という事にすると, 非退化 *strongly cuspidal* な元 A に対しては, $Z_G(A)$ は *anisotropic torus* になっている。

§3. G の既約 *supercuspidal* 表現の構成

この節では, 非退化 *strongly cuspidal* な元 A が与えられた時に, $\text{res}^{-1}(A)$ に属する *strongly cuspidal* 表現を全て構成する。まず $A \in \mathfrak{o}_2^\#(S)$ ($= \mathfrak{o}_0^\#(1), \mathfrak{o}_1^\#(2), \mathfrak{o}_1^\#(3), \mathfrak{o}_3^\#(3)$ or $\mathfrak{o}_0^\#(4)$) $\nu \geq 2$ とする。($\nu=1$ の時の構成は方法が違うのでここでは取り扱わない。) この時 $K_{[\nu/2]}(S) / K_\nu(S)$ 上の表現 $\varphi_{A,\nu}$ を次の様に定義できる。($\psi \in \widehat{F}_+$ は §2 の様にする。)

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \varphi_{A,\nu}(h) = \psi(\pi^{-\nu} \text{tr}(A(h-1))) \quad S=1 \text{ の時 } (A \in \mathfrak{o}_0^\#(1)) \\ (2) \varphi_{A,\nu}(h) = \psi(\pi^{-\nu/2-1} \text{tr}(A(h-1))) \quad S=2 \text{ の時 } (A \in \mathfrak{o}_1^\#(2)) \\ (3) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{A,\nu}(h) = \psi(\pi^{-\nu/4-1} \text{tr}(A(h-1))) \quad S=3, \nu/2: \text{even} \text{ の時} \\ (A \in \mathfrak{o}_1^\#(3)) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{A,\nu}(h) = \psi(\pi^{-(\nu+2)/4-1} \tau(A(h-1))) \quad s=3, \nu/2: \text{odd} \\ \text{の時 } (A \in \mathfrak{g}_3^\#(3)) \\ (4) \varphi_{A,\nu}(h) = \psi(\pi^{-(\nu+1)/2} \tau(A(h-1))) \quad s=4 \text{ の時 } (A \in \mathfrak{g}_0^\#(4)) \end{array} \right.$$

各々の場合に、 $H(s) = K(s) Z_G(A)$ となっていて、 $H \supset K[\nu/2]$ なので、 $\varphi_{A,\nu}$ の H の作用による固定部分群が考えられる：

$$I(\varphi_{A,\nu}) = \{ h \in H \mid \varphi_{A,\nu}(h^{-1}kh) = \varphi_{A,\nu}(k) \quad \forall k \in K[\nu/2] \}$$

この時、次の事が成り立つ。

命題 3-1. $A, I(\varphi_{A,\nu})$ は上の様なものとすると、

$$I(\varphi_{A,\nu}) = K[\nu/2] Z_G(A) \text{ が成立する。}$$

これは、 A の strong cuspidality から出る。さて $\widehat{Z_G(A)}$ の部分集合 $X_{A,\nu}$ を

$$X_{A,\nu} = \{ \chi \in \widehat{Z_G(A)} \mid \chi = \varphi_{A,\nu} \text{ on } Z_G(A) \cap K[\nu/2] \}$$

と定めると、 $\chi \in X_{A,\nu}$ に対し、 $\varphi_{A,\nu}$ の $Z_G(A) K[\nu/2] \wedge$ の拡張 $\varphi_{A,\nu,\chi}$ を、次の様に定義できる：

$$\varphi_{A,\nu,\chi}(th) = \chi(t) \varphi_{A,\nu}(h) \quad (t \in Z_G(A), h \in K[\nu/2])$$

これは well-defined で、一次表現になっている。従って、命題 3-1 と、有限群の表現論の "Clifford の定理" より、 $\text{Ind}^H \varphi_{A,\nu,\chi}$ の既約成分は $\text{Ind}^{Z_G(A)K[\nu/2]} \varphi_{A,\nu,\chi}$ の既約

$$\begin{array}{ccc} H & & \text{キヤク} \\ | & \text{Ind.} & \uparrow \\ Z_G(A)K[\nu/2] & & \text{キヤク} \\ | & & \text{成分} \\ Z_G(A)K[\nu/2] & & \uparrow \\ | & & \varphi_{A,\nu,\chi} \\ K[\nu/2] & & \uparrow \\ & & \varphi_{A,\nu} \end{array}$$

成分を H に誘導する事によって全て得られる。この事と §2 の議論により次の定理が得られる。

定理 3-2. $\nu, \nu': \text{even}$ の時上の様にして作った $\varphi_{A, \nu, \chi} \in \widehat{Z_G(A) K_{\nu/2}(S)}$ と $\varphi_{B, \nu', \chi'} \in \widehat{Z_G(B) K_{\nu'/2}(S')}$ に対して次の事が成り立つ。

- (1) $\text{Ind}^{H(S)} \varphi_{A, \nu, \chi}$ は (既約) *strongly cuspidal* 表現になる。
- (2) $c\text{-Ind}^G \varphi_{A, \nu, \chi}$ は 既約 *supercuspidal* 表現となる。
- (3) $c\text{-Ind}^G \varphi_{A, \nu, \chi}$ と $c\text{-Ind}^G \varphi_{B, \nu', \chi'}$ が同値になる条件は $H(S) = H(S')$, $\nu = \nu'$, $A, B \in \mathcal{O}_2^\#(S)$ が $\text{mod } \mathcal{O}_{2+[\nu/2]}(S)$ で $H(S)$ -共役かつ ($Z_G(A)$ と $Z_G(B)$ を同一視した時に) $\chi = \chi'$ となる事である。

従って $\nu = \text{even}$ の時は $\text{res}^{-1}(A) = \{ \text{Ind}^H \varphi_{A, \nu, \chi} \mid \chi \in X_{A, \nu} \}$ と記述できる。 $\nu = \text{odd}$ の時 ($S=1, 4$ の場合のみ起こりうる) は $\text{Ind}_{Z_G(A) K_{[\nu/2]}}^{Z_G(A) K_{[\nu/2]}} \varphi_{A, \nu, \chi}$ の各既約因子に対して、定理 3-2 と同様の事が言える。そこで、以下では $S=1$ の場合に、この誘導表現の既約分解を行なう。

最初に $A \in \mathcal{O}_0^\#(1)$ が定理 2-5 の (U) の型の時を扱う。この時 $Z_G(A) \cong T \cong \{ \alpha \in M^\times \mid \text{Nm}/E(\alpha) \in F^\times \}$ (定理 1-4

の (5) 型の極大 torus (anisotropic) で M/F が不分裂) とする。 $v=2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) とおく。

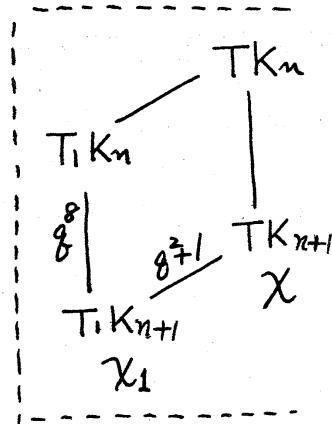
$Z(G)$ を G の center とし, T の部分群を

$$T_1 = \{ \alpha \in \mathbb{Q}_M^\times \mid \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{q}_M} \} Z(G)$$

$$T_E = \{ \alpha \in T \mid \alpha \in \mathbb{Q}_E^\times \} Z(G) \quad \text{と定め,}$$

$$\varphi_{A,v,\chi} \text{ を } \chi \text{ と略記し, } \chi_E = \chi|_{T_E K_{n+1}}$$

$\chi_1 = \chi|_{T_1 K_{n+1}}$ とする。 F の剰余体の元の個数を q と書く時、次の定理を得る。



定理 3-3 $\widehat{TK_n} \ni \textcircled{H}\chi$ を

$$\textcircled{H}\chi = \text{Ind } \chi - 2/q^2 \text{Ind } \chi_E + 1/q^4 \text{Ind } \chi_1 \quad \text{と定める。}$$

(1) $\textcircled{H}\chi$ は q^4 次の既約表現となる。

(2) $\text{Ind } \chi = \sum_{\eta = \chi|_{T_1 K_{n+1}}} (q^2 - 2\delta_E + \delta) \textcircled{H}\eta$ となる。但し和は

TK_{n+1} の character η で $T_1 K_{n+1}$ 上 χ と一致する物全体を

とる。 δ, δ_E は (Kronecker のデルタで), 各々 χ と η が $TK_{n+1}, T_E K_{n+1}$ 上一致する時 1, その他の時 0 と定める。

次に、 $A \in \mathcal{O}_0^\#(1)$ が 定理 2-5 の (1) ② 型の時を扱う。この

$$\text{時は } Z_G(A) \cong T \cong \{ (\alpha, \beta) \in E_1^\times \times E_2^\times \mid N_{E_1/F}(\alpha) = N_{E_2/F}(\beta) \}$$

(定理 1-4 の (4) 型の anisotropic torus で E_1, E_2 は F の

不分岐二次拡大 (実は $E_1 \triangleq E_2 (\cong E)$) で, $t=1$) とする。

前と同様に T の部分群を

$$T_1 = \{(\alpha, \beta) \in T \mid \alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_E}\} Z(G)$$

$$T_{E_1} = \{(\alpha, \beta) \in T \mid \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_E}\} Z(G)$$

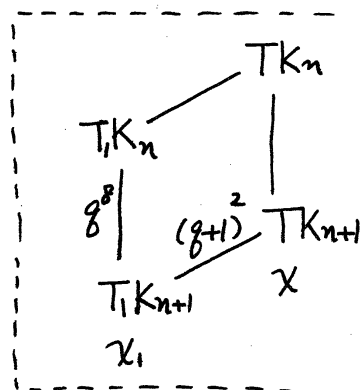
$$T_{E_2} = \{(\alpha, \beta) \in T \mid \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_E}\} Z(G)$$

$$T_E = \{(\alpha, \beta) \in T \mid \alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}_E}\} Z(G)$$

$$T_{\bar{E}} = \{(\alpha, \beta) \in T \mid \alpha \equiv \bar{\beta} \pmod{\mathfrak{p}_E}\} Z(G)$$

$$T_{\pm 1} = \{(\alpha, \beta) \in T \mid \alpha \equiv \pm \beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_E}\} Z(G) \quad \text{と定める。}$$

$\varphi_{A, \nu, \chi}$ を χ と略記し, χ の $T_1 K_{n+1}, T_{E_1} K_{n+1}, T_{E_2} K_{n+1}, T_E K_{n+1}, T_{\bar{E}} K_{n+1}, T_{\pm 1} K_{n+1}$ の制限を各々 $\chi_1, \chi_{E_1}, \chi_{E_2}, \chi_E, \chi_{\bar{E}}, \chi_{\pm 1}$ とおく時、次を得る。



定理 3-4. $\widehat{TK_n} \ni \textcircled{4}\chi$ を $\textcircled{4}\chi = \text{Ind } \chi - \frac{1}{g} (\text{Ind } \chi_{E_1} + \text{Ind } \chi_{E_2} + \text{Ind } \chi_E + \text{Ind } \chi_{\bar{E}}) + \frac{2}{g^2} \text{Ind } \chi_{\pm 1} + \frac{(2g^2 - 2g + 1)}{g^4} \text{Ind } \chi_1$ と定める。

(1) $\textcircled{4}\chi$ は g^4 次の既約表現になる。

$$(2) \text{Ind } \chi = \sum_{\eta = \chi|_{T_1 K_{n+1}}} \left((g^2 - 2g + 2) + 2\delta_{\pm 1} - (\delta_{E_1} + \delta_{E_2} + \delta_E + \delta_{\bar{E}}) + \delta \right) \textcircled{4}\eta$$

となる。和の取り方, δ 達は 前定理と同様とする。

証明は、誘導表現達の間の intertwining number の計算

と, $1/84 \text{Ind } \chi_1$ 等が、本当に表現になる事を示すのがポイントである。

大雑把に言うと、ここで構成した G の既約 *supercuspidal* 表現は、定理 1-4 の (4) 型 torus (E_1, E_2 は共に分岐又は不分岐/F) と (5) 型 torus (M/F が不分岐, 完全分岐の場合と, M/E が分岐, E/F が不分岐の場合) の *quasi-character* χ で ① $\chi|_{T \cap K_0} = 1$ ② $W_T \ni \forall W \neq 1$ に対して $T \cap K_{-1}$ 上 $\chi \neq {}^W \chi$ (但し W_T は T の Weyl 群で, ${}^W \chi$ は χ を W で *twist* した物) なる条件を満たすもので *parametrize* される物達である。他の分岐状態の拡大体で *parametrize* される 極大 torus の *quasi-character* に対応する既約 *supercuspidal* 表現は、ここで除外した *strongly cuspidal* 退化元などを考える事によって得られると思われる。最後に直接引用した文献のみを下に挙げておく。

文献

- [1] H. Carayol, Représentations cuspidales du groupe linéaire, preprint.
- [2] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive binary quaternion hermitian forms,

東大紀要, 27, (1980).

- [3] H. Hijikata, Some supercuspidal representations induced from parahoric subgroups, Automorphic Forms in Several Variables, Taniguchi Symposium, Katata 1983, Birkhäuser (1984).
- [4] T. Hina and H. Masumoto, On representations of p -adic split and non-split symplectic groups, and their character relations, 東大紀要 31, (1984).
- [5] Y. Ihara, On certain arithmetical Dirichlet series, J. Math. Soc. Japan 16, (1964).
- [6] P. C. Kutzko, On the supercuspidal representations of $GL(2)$, I, II, Amer. J. Math. Vol 100, (1978).